S. 1142. A.

MEMORIE
DI
MATEMATICA
E FISICA
DELLA
SOCIETÀ ITALIANA
TOMO III.

VERONA
PER DIONIGI RAMANZINI
MDCCLXXXVI.

BRITISH
NATURAL HISTORY.

STATUTO

DELLA

SOCIETÁ ITALIANA.

I.

LA Società Italiana ſarà compoſta di quaranta Italiani di un merito maturo, e per opere date in luce ed applaudite univerſalmente riconoſciuto.

II.

La ſcienza della Natura è il grande oggetto intorno a cui ſi propone di verſare la Società Italiana. Pubblicherà ella pertanto di due in due anni nella città di Verona ſotto il titolo di Memorie di Matematica, e Fiſica le Ricerche di chiunque vorrà de' quaranta Socj attuali comunicare al pubblico il frutto de' ſuoi ſtudj negli Atti Sociali.

III.

Di queſti quaranta membri uno ſarà Preſidente della Società, e la Preſidenza durerà ſei anni, miſurandoſi queſto periodo coll' edizione di tre Volumi.

IV.

Avrà la Società un Secretario perpetuo e amministratore, ed un Vice-Secretario e direttore della stampa, ambidue residenti in Verona.

V.

Altra Classe nella Società sarà di Socj Emeriti di numero indeterminato. Ella è preparata a chiunque de' Socj attuali o per età avanzata, o per abituale mancanza di salute, o per altro motivo stimasse dicevole alle proprie convenienze di ritirarsi. Per il che scorgendosi non apparire in tre consecutive edizioni di Atti Sociali, principiando con questa, veruna produzione di qualche Socio, dovrà quest' inazione essere dal Presidente intesa per una formale dichiarazione di voler essere ascritto nella Classe degli Emeriti.

VI.

Altra Classe pur indeterminata sarà di Socj Onorarj. Questa deve esser composta a giudicio e scelta del Presidente di Soggetti che abbiano operato cosa a favore della Società, per cui meritino a buon diritto di essere dalla Società onorati particolarmente.

VII.

Ed altra Classe sarà finalmente col titolo di Socj Stranieri stabilita per distinguere e onora-

re il merito nelle Scienze in qualunque parte abbia luogo della Terra. Sarà ella composta di dodici membri aggregati a pluralità di voti. Perciò al caso di vacanza il Presidente col mezzo del Secretario manderà ai Socj votanti una lista con sei nomi, di cui è in libertà ciascun votante entro due mesi dal dì apposto alla lista di proporne uno in lettera diretta al Secretario, da cui sarà poi fatta consapevole la Compagnia dell' elezione. A ciaschedun membro straniero sarà mandato in dono di volta in volta un esemplare degli Atti pubblicati dalla Società Italiana.

VIII.

Nello stesso modo sarà fatta l' aggregazione de' quaranta Socj secondo la prevalenza de' voti, cui avrà in sorte un de' sei nominati dal Presidente, e offerti alla scelta de' votanti della Società.

IX.

Le Memorie de' Socj debbono essere scritte in lingua Italiana, in carattere chiaro e leggibile, e spedite franche al Secretario prima che spiri il mese di Marzo dell' anno destinato alla stampa. Ed essendo l' opera voluminosa può l' Autore distribuirla in due o più parti pe' Tomi susseguenti. Ma in tutti i casi ciò ch' è destinato per gli Atti deve essere nuovo,

inedito, e contenente cosa d' importanza, onde avanzamento n' abbia la Scienza. E qualvolta l' Autore il richiegga, sarà, sì per salvezza e assicuramento di proprietà in qualche scoperta, e sì ancora per motivo di nobile emulazione in uno stesso argomento, stampata a piè di pagina la data del ricevimento della sua Memoria.

X.

La Società non risponde delle opere pubblicate negli Atti sotto il suo nome, dovendone ciascheduno essere rispondente per sè, come se egli ne facesse separatamente la pubblicazione.

XI.

Non permette però, che, trattandosi di argomento in controversia, esca invettiva personale contro chicchessia, od anche critica non misurata, sopra di che veglieranno i Secretarj, e ne faranno al caso inteso il Presidente per un acconcio provvedimento.

XII.

A ciascheduno de' quaranta Socj è conceduta libertà d' inserire negli Atti una scoperta utile, un' importante produzione anche di persona non aggregata, ma italiana, purchè ne risponda egli stesso come di cosa propria inverso la Compagnia.

XIII.

Il Socio Autore di una Memoria avrà in dono il Volume in cui è contenuta, e dodici esemplari della medesima.

XIV.

I fogli stampati di ciascun Volume non dovranno eccedere il numero di cento e venti. Perchè è incaricato il Secretario di registrare le date de' ricapiti di ciascuna Memoria sì, che per ordine di quelle succeda la stampa delle Dissertazioni Sociali, essendo in libertà gli Autori delle più tarde di lasciarle in deposito pel Tomo susseguente, o di ricuperarle, come meglio a' loro riguardi venisse in acconcio.

XV.

Qualora un Socio nel pubblicare un' Opera separata appor voglia tra' suoi titoli letterarj quello di membro della Società Italiana, ragion vuole che primo in ordine sia il titolo letterario nazionale.

XVI.

All' elezione del Presidente saranno sempre invitati i Socj con una stampiglia dal Secretario. Entro due mesi dal dì apposto alla stampiglia dovrà da ciascun votante essere rimessa la nomina del Socio da sè eletto a Presidente

ſcritta e ſigillata in mano del Secretario, e la pluralità de' voti determinerà l' elezione, che dovrà toſto eſſere dal medeſimo annunciata alla Compagnia.

XVII.

De' Socj sì attuali, che emeriti, cui morte andrà togliendo alla Società di quando in quando, ſarà compilato un elogio, ben dovuto alla memoria di coloro, che ſi adoperano utilmente nell' avanzamento delle Scienze.

XVIII.

Alle principali Accademie eſtere ſarà offerto in dono un eſemplare di ciaſcun Volume della Società, che andrà ſucceſſivamente uſcendo alla luce.

XIX.

Gli Ufficj del Preſidente conſiſtono principalmente

I. Nell' avere in caſo di vacanza la nomina di ſei Soggetti nazionali da proporſi per la ſcelta di uno a' membri votanti della Società. Nel che fare dovrà tra ſei nominar ſempre, e ſegnare con aſteriſco quelli de' quali aveſſe avuto luogo qualche Memoria negli Atti preſentata da un Socio, come è detto all' Articolo XII.

II. Nell' avere lo ſteſſo diritto di nomina-

re ſei ſtranieri per la ſcelta di uno in caſo di un poſto vacante nella Claſſe de' Socj ſtranieri.

III. Nell' aggregare alla Claſſe de' Socj Onorarj durante la ſua Preſidenza due tra' Soggetti, che aveſſero operato coſa a prò della Società, com' è detto all' Art. VI.

IV. Nell' avere egli in governo e cura la conſervazione del fondo, e de' capitali della Società, e la ſopraintendenza all' amminiſtrazione del Secretario per la ſtampa biennale degli Atti e per le ſpeſe anneſſe, vegliando ſul ſiſtema economico, e facendone al terminare di ſua Preſidenza eſatto ragguagliamento al ſucceſſore.

V. Nel traſportarſi a Verona, qualora ſucceda vacanza o altra neceſſità di ſoſtituzione ne' poſti di Secretario, o Vice-Secretario ond' eleggere e ſtabilire con immediate cognizioni il Soggetto più acconcio ad un tale miniſtero, ſcelta libera al ſolo Preſidente commeſſa e raccomandata.

VI. E finalmente nell' invigilare con fermezza e zelo, perchè non s' alteri in checcheſſia il ſiſtema di queſta fondazione.

XX.

E quanto agli Ufficj ſpeciali de' Secretarj ſono eſſi compreſi ne' ſeguenti Articoli.

I. Dopo il Preſidente i Secretarj ſono le perſone propriamente deſtinate a mantenere cor-

rispondenza con tutti i membri della Società, e quasi centro ove debbono metter capo tutte le relazioni Sociali. Essi ricevono da' Socj le Memorie, presiedono al buon governo della stampa, ed all' incisione accurata delle Tavole, regolano la distribuzione delle Dissertazioni, e ogni altro affare della Società, sempre però coll' approvazione del Presidente, cui dovranno tener saputo d' ogni cosa esattamente.

II. Terranno fedele registro delle cose più importanti, e custodiranno religiosamente i voti secreti de' Socj nelle elezioni, de' quali al solo Presidente sarà permessa l' oculare ispezione su' fogli originali, non mai però la trascrizione, ch' è assolutamente vietata a chicchessia.

III. Il Secretario come Amministratore avrà l' economica per la stampa, e per ogn' altra spesa, di cui terrà esattamente ragguagliato il Presidente.

IV. Sarà cura di lui lo spedire le Patenti di aggregazione così a' Socj nazionali, come agli stranieri, che verranno successivamente eletti.

V. Il Vice-Secretario poi, cui è affidata particolarmente la direzione della stampa, dovrà sopraintendervi attualmente, valendosi eziandio dell' ajuto di altro soggetto scelto a sussidio, e vegliare per tutte le occorrenze nella Stamperia.

CATALOGO
DE' MEMBRI
DELLA
SOCIETÁ ITALIANA.

PRESIDENTE

. . . .

SOCJ ATTUALI

Giovanni Arduino Professore di Mineralogia, e di Chimica Metallurgica, e Pubblico Sopraintendente alle cose agrarie dello Stato Veneto. *Venezia*.

Carlo Barletti delle Scuole Pie, Professore di Fisica generale nella R. I. Università di Pavia. *Pavia*.

Teodoro Bonati Matematico del Pubblico di Ferrara. *Ferrara*.

Ruggero Giuseppe Abate Boscovich Regio Professore di Ottica nel Dipartimento della Marina di Francia. *Parigi*.

ANTONIO CAGNOLI Aſtronomo. *VERONA*.

LEOPOLDO MARCANTONIO CALDANI Primario Profeſſore ordinario di Medicina ſtorica, e di Anatomia nell' Univerſità di Padova. *PADOVA*.

SEBASTIANO CANTERZANI Profeſſore di Matematica nella Pontificia Univerſità di Bologna, e Secretario perpetuo dell' Iſtituto delle Scienze. *BOLOGNA*.

ANGELO ABATE DE CESARIS Aſtronomo nel Regio Oſſervatorio di Milano. *MILANO*.

GIOVANNI FRANCESCO CIGNA Pofeſſore di Anatomia nella Regia Univerſità di Torino. *TORINO*.

DOMENICO CIRILLI Profeſſore di Medicina Teorica nella Regia Univerſità di Napoli. *NAPOLI*.

DOMENICO COTUNIO Profeſſore di Anatomia nella Regia Univerſità di Napoli. *NAPOLI*.

PAOLO DELANGES Capitano degl' Ingegneri Veneti, e Profeſſore di Matematica nelle Scuole Militari. *VERONA*.

PIETRO FERRONI Idraulico di S. A. R. il G. Duca di Toſcana. *FIRENZE*.

FELICE FONTANA Direttore del Regio Gabinetto Fiſico di S. A. R. il G. Duca di Toſcana. *FIRENZE*.

GREGORIO FONTANA delle Scuole Pie, Profeſſore di Matematica Superiore nella R. I. Univerſità di Pavia. *PAVIA*.

VITTORIO FOSSOMBRONI Cavaliere dell' incl. Ordine Militare di Santo Stefano di Toſcana. *AREZZO*.

MICHELE GIRARDI Medico di Camera di S. A. R. di Parma, Preſidente al Gabinetto di Storia naturale, e Profeſſore della medeſima, e di Anatomia. *PARMA*.

Lodovico de la Grange Direttore dell' Accademia Reale delle Scienze di Berlino, e Presidente Onorario dell' Accademia Reale di Torino. *Berlino*.

Marsilio Landriani Cavaliere dell' incl. Ordine militare di Santo Stefano di Toscana, e Regio Professore di Fisica Sperimentale. *Milano*.

Antonmario Lorgna Cavaliere della sacra Religione de' Santi Maurizio e Lazaro, Colonnello degl' Ingegneri Veneti, e Governatore delle Scuole Militari. *Verona*.

Vincenzo Malacarne Direttore delle Regie Terme Acquesi, e Chirurgo Maggiore del Reale Presidio di Torino. *Torino*.

Giovanni Francesco Malfatti Professore di Matematica nella Pontificia Università di Ferrara. *Ferrara*.

Carlo Lodovico Conte Morozzo Maggiore del Reggimento di Susa di S. M. il Re di Sardegna, e Vice-Presidente dell' Accademia Reale delle Scienze di Torino. *Torino*.

Pietro Moscati Regio Direttore Generale degli Spedali di Milano. *Milano*.

Barnaba Abate Oriani Astronomo nel Reale Osservatorio di Milano. *Milano*.

Pietro Paoli Professore di Matematica nella Regia Università di Pisa. *Pisa*.

Ermenegildo Pini Ch. Reg. B. Professore di Storia Naturale. *Milano*.

Giordano Conte Riccati. *Treviso*.

Pietro Rossi Professore di Logica nella Regia Università di Pisa, e Naturalista. *Pisa*.

GIUSEPPE ANGELO CONTE SALUZZO Gentiluomo di Camera di S. M. il Re di Sardegna, e Presidente dell' Accademia Reale delle Scienze di Torino. *TORINO*.

GIROLAMO SALADINI Patrizio Lucchese, Canonico nella Metropolitana di Bologna. *BOLOGNA*.

LEONARDO SALIMBENI Capitano degl' Ingegneri Veneti, e Professore di Matematica nelle Scuole Militari. *VERONA*.

ANTONIO SCARPA Professore di Anatomia, ed operazioni Chirurgiche nella R. I. Università di Pavia. *PAVIA*.

GIUSEPPE SLOP DE CADENBERG Professore di Astronomia nella Regia Università di Pisa. *PISA*.

LAZARO ABATE SPALLANZANI Professore di Storia Naturale nella R. I. Università di Pavia, e Soprintendente al Pubblico Museo della medesima. *PAVIA*.

SIMONE CONTE STRATICO Professore di Matematica, e di Fisica Sperimentale nell' Università di Padova. *PADOVA*.

GIUSEPPE VAIRO Professore di Chimica nella Regia Università di Napoli. *NAPOLI*.

GIOVANNI BATTISTA ABATE VENTURI Professore di Matematica nell' Università di Modena. *MODENA*.

ALESSANDRO VOLTA Professore di Fisica Sperimentale nella R. I. Università di Pavia. *PAVIA*.

VERARDO ZEVIANI Medico-Fisico. *VERONA*.

SOCJ EMERITI

. . . .

SOCJ ONORARJ

ANGELO MONSIGNORE FABRONI Presidente della R. Università di Pisa, e Priore nell' incl. Ordine di Santo Stefano di Toscana. *PISA*.

IPPOLITO MARCHESE PINDEMONTE Patrizio Veneto, e Cavaliere Gerosolimitano. *VENEZIA*.

SOCJ STRANIERI

M. ACHARD. *BERLINO*.
M. BONNET. *GINEVRA*.
M. LE COMTE DE BORN. *VIENNA*.
M. LE COMTE DE BUFFON. *PARIGI*.
M. CAMPER. *AMSTERDAM*.
M. CAMPOMANES. *MADRID*.
M. FRANKLIN. *FILADELFIA*.
M. MULLER. *COPENAGHEN*.
M. NARVOYSZ. *WILNA*.
M. PALLAS. *PIETROBURGO*.
M. PRYESTLEY. *LONDRA*.
M. SCHEELE. *STOCKOLM*.

SECRETARJ

AGOSTINO ABATE VIVORIO Professore di Geografia e Storia nelle Scuole Militari di Verona, Secretario perpetuo, e Amministratore. *VERONA*.

GIUSEPPE ABATE TOMMASELLI Vice-Secretario, e Direttore della Stampa. *VERONA*.

E L O G I O

DI EUSTACHIO ZANOTTI

Scritto

Da Monsignor ANGELO FABRONI.

EUSTACHIO ZANOTTI nato in Bologna il dì 27 di Novembre dell' anno 1709 da un padre pittore e poeta, da una madre legata ancor essa per vincolo di parentela con rinomatissimi pittori, mostrò fino dalla più tenera età, ch' egli avrebbe accresciuta la gloria d' una famiglia, in cui pareva essere ereditaria la dottrina e la virtù. I primi suoi maestri furono i Gesuiti, poi apprese la filosofia dal suo Zio Francesco Maria Zanotti, chiarissimo lume della letteratura Bolognese, e finalmente fu esercitato nell' algebra dal maggior analista, che avesse allor l' Italia, Gabriello Manfredi. Frequentava anche il fratello Eustachio, che l' aveva tenuto a battesimo, e l' esempio, le voci e gli scritti di questo accesero in lui un vivo desiderio di diventare astronomo, e di servir la patria nella difficile e delicata scienza del regolamento dell' acque. Vi son dei talenti pieni di confidenza,

che riconoſcono come per iſtinto l' oggetto deſtinato loro dalla natura, e che corrono ad eſſo non ſolo con alacrità, ma ancora con una ſpecie d' impeto, che non ammette freno; ve ne ſono degli altri timidi e modeſti, che hanno biſogno di eſſere avvertiti delle lor forze, e che per queſta ignoranza di loro medeſimi non ſono meno intereſſanti, e meno degni d' eſſer condotti all' immortalità che gli aſpetta. Forſe lo Zanotti ſenza Euſtachio Manfredi non ſarebbe ſtato nè idroſtatico, nè aſtronomo, e i conforti di queſto tenero maeſtro e quaſi padre produſſero sì buon effetto, che l' ebbe, in luogo del Caſtelvetri, per ajuto nelle incombenze dell' Oſſervatorio, quando appena aveva egli compito il diciannoveſim' anno dell' età ſua. Poco dopo ottenne lo Zanotti dal Dottor Bazzani, allora Preſidente dell' Inſtituto, la laurea in filoſofia, e tre anni dopo, cioè nel 1733 ſoſtenne pubblica diſputa per facilitarſi il conſeguimento d' una cattedra. La Neutoniana teoria ſulla luce, e ſu i colori fecero il principal argomento delle ſue teſi, e ſe ſi conſidera in quale ſtato foſſe allora la fiſica in Italia, non poca lode dovrà darſi a chi procurava con tutto l' impegno di far note e di confermare le recenti maraviglioſiſſime ſcoperte del gran Neuton. Queſto ſolenne eſperimento ebbe la meritata ricompenſa, e lo Zanotti fu arruolato tra i pubblici profeſſori di matematica. La ſua modeſtia dovè fin d'allora aſſuefarſi ai contraſſegni di ſtima di tutti quelli, che il conoſcevano. Fu rappreſentato ai Riformatori dello Studio di Padova quanta dottrina ornaſſe lo Zanotti, ed eſſi gli offerirono una cattedra. Queſt' offerta poſe in timore il Senato di Bologna, che vedeva in lui un degno ſucceſſor del Manfredi, cui l' età e i mali d' orina conducevano a gran paſſi al ſepolcro. Poco però vi volle a trattenere un cittadino, che libero dagli ſtimoli dell' ambizione e dell' intereſſe nulla più deſiderava che di ſervir la patria. Muore intanto il Manfredi, e quell' uomo

raro, che rendè sempre più rispettabili le lettere per le sue opere e pe' suoi costumi, e che fu l' oggetto dell' ammirazione non sol di Bologna, ma anche di tutta l' Italia, dichiarò morendo, che era contento di lasciar libero un bel campo di gloria al suo Zanotti, raccomandandogli l' Osservatorio, e l' Instituto. Egli si mostrò subito degno di quest' elogio, profittando dell' apparizione d'una cometa, che non sappiamo essere stata da verun altro astronomo osservata. L' astronomia, che ha i suoi fasti non altrimenti che gli abbia la storia del mondo, ha bisogno di chi registri in essi le apparizioni di quest' astri e i loro caratteri per poterli riconoscere, quando ricompariranno. Lo Zanotti non solo seguitò la cometa per tutto quello spazio di tempo, in cui fu visibile, ma adoperò tal diligenza e maestria nelle osservazioni, che il rinomatissimo Abate la Caille nelle sue lezioni d' astronomia tra tant' altre comete, che avrebbe potuto scegliere, si serve di questa per mostrare l' applicazione d' un suo metodo di ricavar dai luoghi osservati d' una cometa gli elementi dell' orbita nel caso che la figura di questa si voglia supporre parabolica. Quantunque il Neuton avesse già creata la dinamica, e l' avesse corredata di que' metodi, che son così universali e grandi, quanto lo sia la natura nelle sue operazioni; ciò non ostante non si cominciò che tardi ad applicare i principj dell' attrazione per determinare l' orbita parabolica delle comete. Il Bailly assicura, che solamente verso l' anno 1740 cominciarono gli astronomi Francesi a battere questa strada, e che la cometa del 1744 fu quella che trionfò onninamente dei pregiudizj, mostrando che ella non aveva descritta nè una linea retta, nè un gran cerchio intorno la terra, come da molti, e particolarmente dai vecchj astronomi si credeva. Quest' epoca divien gloriosa allo Zanotti, perchè egli prima de' Francesi nel calcolare gli elementi dell' orbita della cometa del 1739 riconobbe la legge

dell' attrazione Neutoniana ; e perchè non si erano allora trovati que' metodi, che servono a diminuire la prolissità, il tedio, e l' intralciamento dei calcoli, così dovette egli pensare a un metodo tutto suo, e questo sarà stato il metodo trigonometrico, che pubblicò poscia nel III. Tomo degli Atti dell' Accademia di Bologna, giacchè appunto ci avvisa in quella Dissertazione, ch'eragli riuscito assai comodo nella cometa del 1739 e in quella del 1742. Tanto più di lode è dovuta allo Zanotti per l' invenzione di questo metodo, quanto meno era stata fino a quel tempo coltivata la parte dell' astronomia, a cui egli appartiene. I progressi, che ha fatti questa scienza nel corrente secolo, son principalmente dovuti al potente soccorso della geometria. Il geometra simile a uno scavator di mine discende per una strada sotterranea nel seno della natura; la scienza, ch' ei professa, gli serve di fiaccola, e tornato dalle tenebre alla luce del giorno racconta quel che ha scoperto, svela i misterj della notte, le difficoltà che ha superate, e annunzia che a tal verità vi è attaccata tal altra verità, e che appoggiandosi su tal principio il calcolo conduce a tal conseguenza. Così la geometria si è resa oggi giorno poco men che padrona dell' astronomia, o gode almeno di essere divenuta a lei sì necessaria, quando voglia seguitare la causa primordiale in tutti i suoi effetti, che senza il suo soccorso non può sperar di fare il più piccolo progresso. Questa felice unione, che fa la gloria del secolo presente, contribuì anche alla lode dello Zanotti, perchè egli in tutta la sua vita, e co' suoi profondi studj e colle sue osservazioni cercò di rendersi benemerito della fisica celeste. Consecrò anche a questa quattro volumi di efemeridi, tre de' quali furono in diversi tempi stampati, rimanendo il quarto inedito presso il successore del medesimo. La costumanza di dare dell' efemeridi astronomiche, che indicassero i luoghi, gli aspetti, e i moti dei pianeti, e lo stato

del cielo per molti anni avvenire, cominciò in Italia, e il Regiomontano può esserne riguardato il primo autore. L'Università di Bologna la mantenne anche ne' tempi, ne' quali l' astronomia infelicemente si confondeva coll' astrologia; ma le più esatte e le più celebri efemeridi furon quelle calcolate dal Manfredi. Lo Zanotti credè di dovere al suo impiego e ai voti del maestro la continuazione di quest' opera; che cominciò dall' anno 1751, in cui terminava quella del Manfredi. Nel pubblicarne il primo dodicennio riprodusse l' introduzione Manfrediana all' efemeridi, che può riguardarsi come un giudizioso compendio d' istituzioni astronomiche, ma non senza qualche mutazione e qualche giunta. Quella d' un catalogo di stelle fisse è la più commendabile di tutte, nè potè ad esso pensare il Manfredi, perchè l' Osservatorio Bolognese, mentr' ei visse, mancò di quegl' istrumenti, ch' erano a questo lavoro necessarj. I luoghi delle stelle, che essendo sempre i medesimi sembrano i più facili ad esser determinati, hanno però bisogno di esser rettificati, quando i mezzi d' osservare si perfezionano. I maggiori cataloghi, come quello del Flamsteed, erano riguardati come poco estesi, e come poco esatti, e perciò astronomi del prim' ordine si proposero di perfezionare questa parte importante dell' astronomia, che per essa divien più ricca e più bella. Lo Zanotti potè gareggiare con tutti nella diligenza, con cui compose il suo, e ognun sa che questi lavori esigono una somma pazienza, e tante e tali avvedutezze e finezze d' arte in chi gl' intraprende, che facilmente, trascurate che sieno, riescono non solo inutili, ma anco fallaci. Il conto, che dà lo Zanotti nella sua Prefazione della qualità degl' istrumenti adoperati, e del metodo tenuto nel fare l' osservazioni, forma una prova ben sicura dell' esattezza del suo catalogo e del merito della lode, che da essa ne riportò. Intanto nuovi progressi nella scienza del cielo interessavano la curiosità,

e domandavano l' opera d' eccellenti aſtronomi. La Francia, che invidiava ad un' emula vicina nazione la gloria d' aver prodotto il gran genio, che con una maniera più divina che umana portò all' evidenza le vere leggi, a cui obbediſcono tutti i corpi celeſti, volle almeno la preminenza nella copia e nell' eſattezza dell' oſſervazioni, che dovevano ſempre più confermare quelle leggi medeſime, e arricchire l' aſtronomia di nuove teorie. L' Abate de la Caille, nome, che farà eternamente una delle più belle comparſe nella ſtoria dell' aſtronomia, dopo di avere rettificata la teoria del ſole, ed oſſervate le più belle ſtelle viſibili ſul noſtro orizzonte, ebbe il coraggio di andare nell' emisfero auſtrale per contemplarvi l' altra parte del cielo, che ci è naſcoſta dall' opacità della terra. Al Capo di buona ſperanza eſeguì il più gran lavoro, che un uomo ſolo abbia ardito d' intraprendere, che fu di determinare i luoghi di tutte le ſtelle viſibili, che s' incontrano tra il polo auſtrale e il tropico del capricorno, e il numero delle quali oltrepaſſa le dieci mila. Anche la parallaſſe della luna occupò quell' uomo inſtancabile; e poichè per ben fiſſare queſto punto delicato ed importante era neceſſario, che le oſſervazioni ſi faceſſero ne' due emisferi, e ſi paragonaſſero tra loro, invitò i più celebri aſtronomi a contribuire alle ſue ſcoperte. Lo Zanotti ſi vide allora meſſo del pari col Vargentin, col de la Lande, col Caſſini, e col Bradley, e quel, che egli oſſervò, fu conſacrato all' immortalità nelle memorie, che pubblicò negli Atti dell' Accademia Reale delle Scienze di Parigi, quando al ſuo ritorno in quella Capitale credè il Sig. de la Caille di poter fiſſare, che la parallaſſi media è di 57′, 39″, e la diſtanza, che ella ſuppone, di leghe 85464. Queſti ajuti, che ora ſolamente gli aſtronomi a vicenda ſi danno, e la facilità de' viaggi ne' paeſi i più lontani, ſon tante prove, che l' uomo non ha cominciato ſe non che tardi a riguardarſi come un vero abitatore

della terra legato agli altri uomini pe' vincoli d'una comune utilità. Il carattere però dello Zanotti cauto e timido non sembrava fatto per l' ardite imprese; e si sarebbe detto che egli, come tant' altri illustri Bolognesi, non voleva altra gloria se non se quella che si poteva raccogliere dentro le mura della patria. Quindi era per lui il più sacro dovere quello della pubblica Scuola, e la costante umanità e dolcezza, con cui riceveva i suoi scolari, e un dono tutto suo di render facile l' intelligenza delle cose le più astruse forzava ognuno ad amarlo e stimarlo. Astronomo nell' Osservatorio, geometra nel gabinetto, non si stancava d'applicare al cielo o i suoi sensi o le sue meditazioni, e nel tempo che contribuiva ai progressi della fisica celeste arricchiva gli Atti dell' Accademia dell' Instituto di memorie, che meritavano sempre l' approvazione dei dotti. Eran soliti gli astronomi di ricavar la misura dell' anno tropico medio dagli equinozj senza far caso per questo effetto de' solstizj. Da varie osservazioni solstiziali fatte nella gran Meridiana di S. Petronio, dell' esattezza e certezza delle quali niun poteva dubitare, dedusse lo Zanotti questa misura, ed espose i metodi adoperati, e ne paragonò varj fra loro, ed indicò la picciolissima differenza di 17 minuti secondi, che passa tra la quantità dell' anno tropico medio trovata da lui, e quella dell'anno civile proposto da Gregorio XIII. La misura della terra, un de' maggiori oggetti dell' astronomia, e il più degno forse dell' ammirazione della posterità, occupò per lungo tempo l' Accademia di Bologna. Lo Zanotti non doveva essere ozioso, e non lo fu, in una cosa di tanta importanza, e son ricordati con lode alcune formole e alcuni teoremi, e molte osservazioni di lui dirette a questo fine. Ma i metodi ingegnosi e i tentativi delle osservazioni non equivalgono alle misure locali fatte all' equatore e al cerchio polare, onde la gloria di aver risoluta questa gran questione è interamente dovuta a que'

a que' coraggiosi Accademici Francesi, che per amor del vero non dubitarono di affrontare le difficoltà, che la natura, e gli uomini opponevano in copia all' esecuzion dell' impresa. Son però preziosi anche i tentativi de' nostri Filosofi, quando sieno diretti, come lo furon quelli dello Zanotti, dall' esattezza delle osservazioni e dalla precisione de' calcoli. Poichè i metodi, che egli osservando, e calcolando adoperava, acquistavano spesso tra le sue mani qualche maggior perfezione, se erano inventati da altri; gli fu anche facile l' inventarne de' proprj, e di rendere in cotal guisa agli astronomi suoi contemporanei una grata retribuzione per quel che aveva ricevuto da loro. Quello, per esempio, di calcolare l' equazioni nell' orbite de' pianeti ha il merito d' una facilità e semplicità maravigliosa; lo hanno egualmente quelli, con cui determinò la parallasse di Venere e di altri pianeti; e nella necessità, a cui oggi giorno è ridotta l' astronomia, necessità di calcoli lunghi e penosi, di delicatezza estrema d' osservazioni, e per conseguenza d' istrumenti, d' una costante pazienza per non abbandonare una strada oscura, che non promette se non se lenti avanzamenti, doveva fare una luminosa comparsa lo Zanotti, che fu per natura lontanissimo da quell' ardore, che sdegna di esaminare e di perfezionare l' opere altrui, e di aspettare l' occasione per paragonare i proprj o gli altrui pensieri coll' operazioni della natura. Caratteri di simil fatta sono i più proprj ad alimentare la scienza che professano, e per essi questa cresce, e si fortifica invecchiando. Ognun sa che la base delle teorie celesti è quella del sole, perchè egli esercita un impero quasi assoluto in tutto il sistema planetario. Al ben fissarla contribuì certamente non poco la gran linea meridiana descritta nell' anno 1656. dall' immortale Gio. Domenico Cassini nel Tempio Bolognese di S. Petronio, e questo monumento augusto consacrato alla gloria dell' astronomia domandava di

tanto in tanto l' opera d' un diligente e perſpicace aſtronomo, che eſaminaſſe e correggeſſe le più piccole alterazioni, che aveva il medeſimo ſofferto maſſimamente per cagione dell' edifizio, a cui è raccomandato. Lo Zanotti vinſe in ciò le cure de' ſuoi anteceſſori, perchè non ſolamente il rinnovò, ma provvide ancora che in avvenire non foſſe ſottopoſto a quelle tante mutazioni, che erano fino ai noſtri giorni accadute. La ſtoria de' metodi da lui e da altri adoperati, il paragone di queſti, una ſerie di proprie oſſervazioni fatte dopo la riſtaurazione dell' iſtrumento per determinare l' altezza del polo, l' obliquità dell' eclittica, e la miſura dell' anno tropico, la riſtampa d' un opuſcolo al medeſimo appartenente ſon la materia d' un libro prezioſiſſimo, che ha per titolo: *La meridiana del Tempio di S. Petronio rinovata l' anno 1776*. L' aſtronomia non era la ſola ſcienza, che occupaſſe gli ſtudj dello Zanotti. Profeſſava egli pubblicamente la meccanica; e le due diſſertazioni latine, della forza della percoſſa l' una, della forza elaſtica l' altra, ben dimoſtrano come ei ſi foſſe formate idee chiare e nitide anche nelle coſe le più inviluppate, e come ſeguendo queſte idee, foſſe in grado di promuovere la ſcienza, e liberarla da que' pregiudizj, che ſogliono tante volte inſinuarſi nelle facoltà anche le più capaci d' evidenza, e che ſi oppongono per lungo tempo al rapido loro avanzamento. Era celebre in quell' età la queſtione ſulle forze vive, che promoſſa dal Leibnitz, ſoſtenuta dagli Svizzeri, e dai Tedeſchi, impugnata dagli Ingleſi, agitata dai Franceſi, occupò anche non poco i filoſofi Italiani. Quei dell' Univerſità di Padova e di Bologna riguardavano la deciſione della controverſia come importantiſſima per li progreſſi della meccanica, e credè il Marcheſe Poleni d' avere acquiſtato un diritto ſingolare all' immortalità per avere immaginato un eſperimento, da cui reputava poterſi dedurre la più evidente dimoſtrazione della miſura

Leibniziana. Niuno dunque ſopettava allora, che queſta foſſe una mera queſtion di nome? Lo ſopettò Euſtachio, ma gli mancò in principio il coraggio per eſporne le ragioni, perchè troppi, e troppo autorevoli eran quelli, cui egli avrebbe dovuto opporſi. Finalmente nell' an. 1754 pubblicò i due opuſcoli nominati di ſopra, che poſſono riguardarſi come due parti d' un' opera ſola. Con eſſi ſpiegando il nome, tolſe la queſtione, ma non già la diſputa, che era allora nel ſuo maggior vigore. Nel primo trattando della ſorza della percoſſa dimoſtrò alcune propoſizioni meccaniche intorno alla caduta de' corpi nell' ipoteſi, che la forza centrale ſia ſempre proporzionale alle diſtanze. Il motivo, per cui preſe ad eſaminare la caduta dei gravi in queſt' ipoteſi, fu per potere colla medeſima illuſtrare le leggi dei movimenti, che dipendono dall' elaſticità, e ſpecialmente le vibrazioni delle corde elaſtiche, conducendoſi in tal maniera a fiſſare alcuni luminoſi teoremi ſpettanti all' arte muſica. Se ſi eccettuano la geometria, e l' algebra, le altre parti delle matematiche, che miſte ſi appellano, hanno ſpeſſo biſogno di adottare de' principj fiſici, cioè dei dati d' eſperienza, o di ſemplice ipoteſi, e allora non hanno che una certezza di fatto, o di pura ſuppoſizione. Non ſi può negare però, che ſi è più penſato a moltiplicare i principj ipotetici, che quei d' eſperienza, lo che ha ritardato non poco, in vece di affrettare, i progreſſi di alcune ſcienze; e tra queſte la meccanica dell' acque ha forſe più d' ogni altra provata una tal verità. Quel filoſofo pertanto, che animato dall' amore del pubblico bene prende a trattarla in modo, che non ammette altra guida ſe non la geometria e la propria, e l' altrui eſperienza, merita la noſtra gratitudine: e ſe il ſuo amor proprio dovrà contentarſi d' illuſtrare una ſcienza più di effetti che di cauſe, e di produrre poche pagine invece di groſſi volumi, ſarà ricompenſato dal ſuffragio de' dotti, pe' quali è un gran

merito il ritrovamento d' una ſola verità . A queſta lode aſpirò lo Zanotti dal momento che fu dichiarato in luogo del Dott. Eraclito Manfredi , di cui già vecchio e cieco avea prima adempite le parti, lettore d' idrometria, carica reputata a ragione delle più onorevoli di quella Univerſità , e che ſuol riguardarſi come un' illuſtre ricompenſa da concederſi ai più benemeriti Profeſſori . Il Guglielmini , che era ſtato il capo di queſta ſcuola, e poco meno che l' inventor della ſcienza, domandava non ſolo un illuſtratore, ma anche un correttore de' ſuoi ſcritti , perchè queſti non ſono eſenti da errori, che una fiſica ancor bambina doveva generare, e di cui un uomo imbevutone dalla prima età non arriva a ſpogliarſene interamente . Lo Zanotti ricco di lumi del ſuo ſecolo , e non addetto ad alcun ſiſtema , preparava i ſuoi ſcolari alla lezione del libro del Guglielmini ſulla natura de' fiumi con una Introduzione, che era piena di dottrina idroſtatica, e che moſtrava per ogni dove il buon giudizio dell' Autore in ſaper diſcernere il vero dal veriſimile , l' ipoteſi dall' eſperienza . Alla ſcelta giudizioſiſſima delle coſe univa egli il merito d' una ſorprendente chiarezza nello ſpiegarle, e niuno certamente fu più di lui degno del difficile incarico della pubblica iſtruzione. Queſti eſercizj, che i Latini chiamavano *umbratili* , eran più proprj del carattere tranquillo e pacato dello Zanotti, che quelli del campo , ne' quali le diſpute ſono infinite ,perchè ſon varj e ſpeſſo contrarj gl' intereſſi de' poſſidenti. Ciò non oſtante dovette egli, ſuo malgrado ,prendere la difeſa d' alcuni maſſimamente dopo la morte di Grabiel Manfredi , e ſervì anche la patria, eſponendo quel che credeva utile, e quel che reputava nocevole ne' diverſi progetti fatti da valenti matematici pel regolamento dell' acque del Bologneſe. Un de' più ſtrepitoſi affari idraulici trattati in queſto ſecolo è certamente quello dell' inalveazione nel ſolo fiume del Primaro di tutte le acque , che ſi

ſpandono con graviſſimo danno delle provincie di Bologna, di Ferrara, e di Ravenna. Per guidare coloro, che proponevano queſt' unica inalveazione, ſcriſſe lo Zanotti un belliſſimo ragionamento, che fu poi inſerito nel Tomo VII. della Fiorentina *Raccolta d' Autori, che trattano del moto dell' acque*. In eſſo prendendo gli eſempj dai più regolati fiumi, e conſiderando maſſimamente i profili del Po e del Tevere, ſtabiliſce, che l' accelerazione dell' acque originata dalla libertà dello sfogo, ſi ſtende fin dove arriva l' orizzontale tirata dal pelo baſſo del mare. E paragonando tra loro le oſſervazioni, trova, che la pendenza ragguagliata della ſuperficie nella maſſima eſcreſcenza dal punto, ove arriva il pelo baſſo del mare fino alla foce, è uguale alla pendenza ragguagliata del fondo, o del pelo baſſo del fiume, cominciando dal medeſimo punto, e procedendo in parte contraria. Condottoſi a Roma nel 1765 per cagione di queſti ſteſſi affari d'acque commeſſi al giudizio d' una Congregazione, dovè pubblicare diverſi ſcritti, da' quali appariva non meno il buon cittadino, che l' uomo prudente, e il dotto idrometra. Onorato per queſti ed altri titoli vivea in quella gran Capitale, come ſe foſſe nella patria ſua, ed io giovane allora ed amante di gloria attribuiva a mia gran ventura d' eſſere ammeſſo alla familiar converſazione di quell' uomo raro, cui la pubblica ſtima accompagnava per ogni dove. Nè ſolo dalla patria, e da' ſuoi concittadini, ma anche dagli eſteri fu conſultato intorno al regolamento dell' acque, e può dirſi, che le principali occupazioni degli ultimi anni della ſua vita apparteneſſero a queſte commiſſioni, e agli ſtudj che dovea fare per eſſe. La repubblica di Lucca vinſe la repugnanza, che egli avea, perchè vecchio e non ſano, di ſtaccarſi mai più dal ſeno della patria, e l' ebbe giudice e difenſore del progetto di formare un nuovo ozzeri, che conduceſſe al mare l' acque di quella parte del ſuo territorio,

che si stende verso il lago di Bientina, in cui le medesime con grave danno si scaricano. Lungo sarebbe il riferire tutte le scritture da lui composte in materia d' acque. Gli esami, che ebbe da fare ora sopra una parte ora sopra un' altra di questa difficile scienza, sempre più lo convinsero, che l' idraulica e l' idrometria devono riguardarsi piuttosto come una parte della fisica che della matematica, o come una parte della matematica, i cui progressi sinora fatti e da farsi sono puramente ipotetici e limitati a certi casi, che forse nella natura non hanno luogo. Tralasciò pertanto ne' suoi scritti a bella posta le dimostrazioni e i calcoli ipotetici, coi quali diversi autori hanno inviluppata la scienza, e raccolse in quella vece tutte l' esperienze e l' osservazioni, che potessero servir di lume ne' casi d' importanza, e che ci avvicinassero ogni giorno più alla conoscenza della natura de' fluidi. Una simile condotta dello Zanotti e di tutti coloro, che l' hanno avvedutamente imitata, può essere paragonata a quelle linee asintotiche, che si accostano sempre più a una retta, senza però arrivar mai a toccarla. E qual ricompensa meritavano tante e sì continue fatiche? La maggior di tutte, a cui possa aspirare un insigne letterato Bolognese; e fu quella di essere dichiarato nell' anno 1778 Presidente dell' Instituto in luogo di Francesco Maria Zanotti. Pianse nella morte dello Zio la propria disgrazia, e quella comune a tutti gli amatori delle scienze, e ricevè con animo grato la novella testimonianza della stima de' suoi concittadini. Così avesse potuto servir lungamente all' utilità e alla gloria di essi; ma appena passati quattr' anni di quella presidenza, che nella primavera dell' anno 1782 fu egli inopinatamente sorpreso da un' iscuria, che in principio i medici trascurarono, perchè da loro attribuita ad un accidentale riscaldamento. Ma non cedendo essa agli ordinarj rimedj, ben presto manifestò un vizio nella vescica, che in appresso accompagnaro-

no atrociſſimi dolori. Il paziente ben s' avvide ch' era vicino il termine della ſua vita, e religioſiſſimo, com' egli era, fece di queſta coi ſentimenti i più teneri, e i più devoti ſacrifizio a Dio, e colla tranquillità d' un uomo, che abbia fedelmente adempiuta la gran legge del Vangelo, l' amor di Dio, e de' ſuoi fratelli, paſsò agli eterni ripoſi nella ſera del dì 15 di Maggio. Quei, che con un merito raro non aveva, mentre viſſe, eccitata l' invidia d' alcuno, dovè morto eſſer pianto e ricordato amaramente, e perchè foſſe durevole la memoria di queſto dolore e delle cagioni di eſſo oltre l' iſcrizione poſta nella Chieſa Parrocchiale di S. M. Maddalena, ove fu ſepolto, ebbe l' onor d' una medaglia coll' epigrafe Oraziana *Quando ullum invenient parem*? e d' un elogio pieno di venuſtà latina. Un fratello e una ſorella, e varj nipoti furono gli oggetti della ſua liberalità nel teſtamento fatto alcuni anni prima; nè men fu liberale con eſſi e cogli amici, mentre fu in vita, perchè la beneficenza, l' amor de' ſuoi ſimili, la gratitudine, la carità verſo i biſognoſi furono virtù tanto ſue proprie, che parevano come in una pianta nativa inneſtate nella bell' anima dello Zanotti. Il ſuo linguaggio pien di dolcezza, di eleganza, e di circoſpezione, facile alla lode, e ſempre lontano dal biaſimare come dall' adulare chiccheſſia, paleſava la bontà del cuore, e ſi può dire che ogni parola, ed ogni azione di lui foſſero un armonioſo accordo della virtù e del talento. E ſe il carattere della vera grandezza dell' anima è la ſemplicità de' coſtumi, chi più di lui meritò queſta lode, e ſeppe meglio accoppiarla all' altra della ſeverità nella ſua morale condotta? Era ameno nella converſazione, feliciſſimo ne' ſuoi racconti; e quantunque il ſuo diſcorſo aveſſe un non ſo che di ſonante, era però ſempre naturale nelle eſpreſſioni, e ſempre manifeſtava una mente limpidiſſima nelle ſue idee, ed unica nell' arte di ſaperle ſpiegare fino a renderle intelligibili an-

che ai più idioti. Formato nella ſcuola del Manfredi e dello Zio amò, ma non coltivò, com'eſſi, l' arte, che fu quella de' primi filoſofi, arte ingegnoſa, ſpeſſo utile, e ſempre piacevole, chiamata frivola da quelli che diſprezzano quel che ignorano, ma ſtimata da' veri ſapienti ſoliti a riſpettare tutto quello, che è l' opera del genio. Un uomo di sì rare doti egualmente degno pe' ſuoi talenti d' avere degli ammiratori, che d' aver degli amici pel ſuo carattere, era amato e ricercato da tutti quelli che il conoſcevano, e un gran Cardinale, che preſedeva al Governo Bologneſe, e che ſembra nato per onorare il merito e per giudicarne, volle averlo per guida nello ſtudio delle matematiche ſublimi, dandogli la più pregevole di tutte le ricompenſe, che fu quella della ſua parzialiſſima amicizia. Non fu meno onorato dagli eſteri, ed ebbe luogo tra i membri della Reale Società di Londra, e della Reale Accademia delle Scienze e belle Lettere di Berlino. Noi uniamo volentieri la noſtra voce a quella di tant' altri, che han ſaputo rendere la debita giuſtizia al merito dello Zanotti, e vorremmo potere offerire alle ſue ceneri un tributo tale di lode, e d' amicizia, qual ſi merita un ſapiente virtuoſo, che ha conſacrato tutti i ſuoi giorni all'avanzamento delle ſcienze, e al ſervigio della patria.

SOPRA

SOPRA IL MOVIMENTO
CONCRETO DE' SOLIDI.
PARTE PRIMA.

Del Sig. Paolo Delanges Professore di Matematica nel Collegio Militare di Verona.

INTRODUZIONE.

All' immortale *Galileo* la scoperta dobbiamo delle prime, e semplici leggi del moto astratto de' corpi terrestri sollecitati da una forza costante verso un centro, supposizione che già viene, e può senza errore ammettersi, ne' gravi cadenti a discrete distanze dalla superficie terrestre. Ad un genio superiore poi, ad un *Newton* era riserbato il conoscere la natura intima di cotale forza centripeta variabile a differenti distanze dal centro de' gravi, per poter quindi determinare le leggi di siffatto moto più universalmente, e condursi passo passo per fino ad esplorare quelle che vengono seguitate da' corpi celesti nel trasferirsi per le orbite loro. Ma quanto doviziosamente ci troviamo forniti di belle ed importanti leggi, e proprietà sul movimento astratto de' corpi sì parziale che generale, altrettanto scarseggiamo, ed ignoriamo quelle che risguardano un movimento concreto vale a dire un movimento di fatto, in cui non venga ammessa astrazione da quelle accidentalità, che la natura ha radicalmente introdotte nella materia per conseguirne effetti analoghi, e corrispondenti a quell' economia ed a quell' ordine sempre mai ammirabile su cui ella è fondata col provvido e saggio fine della conservazione del tutto insieme. E vaglia il vero, discendendo dal generale al particolare, che ora intendiamo di prendere a maturo esame, non ignoriamo forse noi ancora quali sieno le leggi di quel movimento, che se-

guono i ſolidi terreſtri aſtretti a procedere gli uni ſopra gli altri più o meno velocemente ? Le prime nozioni della fiſica de' corpi baſtano a farci comprendere, ſenza ricorrere ad alcuna eſperienza di comprovazione, quanto ſieno in ſiffatti caſi i riſultati di fatto diſtanti da quelli, che proviamo, e concludiamo aſtrattamente. Ed a chi non è paleſe inoltre, che tale diſcrepanza proviene dalle ſole due reſiſtenze, che neceſſariamente incontrano i noſtri ſolidi in movimento, cioè la reſiſtenza del mezzo, da cui ſi trovano circondati, e quella dell' attrito prodotta dalla ruvidità più o meno ſenſibile sì, ma non mai inſeparabile dalle loro ſuperficie ? Non potremo adunque giammai conoſcere quali ſieno le leggi del movimento concreto de' noſtri corpi, che s' aggirano ſulla ſuperficie terreſtre, ſe non rileveremo l' influenza delle reſiſtenze accennate, ed il modo di eſercitare i' azione loro ne' corpi poſti in movimento. In tal guiſa verremo a ſtabilire una nuova ſcienza, che propriamente dovrà chiamarſi la *Scienza del moto concreto de' ſolidi*, la quale avrà bensì per inconcuſſa baſe, e fondamento le leggi già dimoſtrate del moto aſtratto, ma con eſſe medeſime ſi troveranno combinate quelle, che ſeguono le ſopraddette reſiſtenze; che è l' unica via da tentarſi per ridurre con ſicurezza queſta parte della Fiſica al concreto, e renderla in conſeguenza utile negli uſi umani. Il *Galileo* geloſo in certo modo delle belle proprietà ritrovate ſul moto aſtratto de' gravi, vorrebbe per fino indurci a credere traſcurabile la reſiſtenza dell' aria nell' impetuoſo movimento de' projetti *(a)*. *Newton* però conobbe quant' era importante di rilevare l' influenza della reſiſtenza de' mezzi nel movimento aſtratto de' corpi, e perciò intrapreſe egli il primo la ſoluzione di tale difficiliſſimo Problema, ſtabilendo alla diverſa natura de' mezzi la legge dell' azione loro (*b*): dopo di lui altri illuſtri Geometri, e Fiſici han cercato di concretare più al fatto queſto ſoggetto, di eſtendere, ſemplificare, e rendere familiare l' uſo di queſto nuovo ramo della Scienza del moto; di maniera che quanto alle modificazioni, che poſſono derivare dalla reſiſtenza de' mezzi,

---

(*a*) Opere di *Galileo Galilei*, Tom. III. pag. 148.

(*b*) *Philoſophiæ naturalis principia mathematica*. Tom. II.

e dall'aria singolarmente, sul particolare movimento de' corpi, che abbiamo noi presentemente in veduta, sembra che vi sieno bastanti materiali onde sottoporle a computo, e conoscerne presso a poco la loro natura e quantità.

Non possiamo però lo stesso affermare riguardo all' altra resistenza proveniente dall' attrito, trovandoci ben lungi ancora dal conoscerne la di lei azione ne' corpi, che sulle superficie degli altri si strisciano, e muovonsi: resistenza, che certamente nella qualità di movimento, in cui vogliamo considerare i solidi, ha molto più d' influenza e quasi senza paragone di quella che proviene dalla resistenza dell' aria, sulle alterazioni, che accadono alle astratte deduzioni, e proprietà del moto. Non è già, che così grave argomento non sia a più e più Fisici caduto sotto l'occhio, ma tale e tanta si è la discrepanza delle opinioni loro, che niente contar dobbiamo di avere intorno ad esso; a suo luogo nondimeno accenneremo le discordanti leggi, che o da esperienze poco decisive, ed incerte, o da ragionamenti vaghi condotti dalla sola immaginazione, troppo facile soprattutto nelle cose fisiche a sbagli ed equivoci, furono dedotte e stabilite. E per verità su tale proposito a ragione lamentasi il celebre P. *Barletti* che (*a*) " nella Fisica uno per mille appena s' in-,, contra, che abbia il coraggio di lasciare la generalità, e ,, le ipotesi, e voglia soggettarsi alle faticose, e strette leggi ,, delle particolari induzioni ,,. Nella mia *Meccanica pratica* ho cercato di stabilire fuori d' ogni controversia le leggi che segue la resistenza di attrito de' solidi, considerando lo stato del loro equilibrio, che distinsi io dall' equilibrio matematico, col chiamarlo *equilibrio meccanico* (*b*): ma rimane ancora da investigare l' azione di tale resistenza ne' solidi supposti già in movimento, e ciò non per via di raziocinj, ma calcando quella de' fatti, e dell'esperienza, onde possiamo trovarci in grado di conoscere reali, o false le sentenze de' Fisici de' tempi andati sull'argomento. A tale oggetto io mi sono ingegnato di architettare una macchina quanto più

(*a*) Fisica particolare, e generale in saggi ecc. Tom. I. Art. VII. pag. 23.

(*b*) Meccanica pratica Sez. Prima. Art. I. §§. V. VI.

semplice mi fu possibile, ed in cui non s' introducessero nell' esame dell' effetto di quella causa che ponevasi in esperimento effetti di altre cause straniere ad essa, dovendo in ciò a mio parere adoperarsi il fisico sperimentatore con ogni avvedutezza, e sagacità, onde venire plausibilmente a capo di conoscere l' indole, e la forza, oppure di rilevare la legge di qualche naturale fenomeno. Anzi che tenendo io per principio infallibile, che la natura proceda con costanti, e determinate regole, e leggi, tengo anche opinione, che se non arriviamo ad iscoprire legge in qualche di lei fenomeno, debba attribuirsi ciò al non aver noi avuta la prevenzione, od anche alle volte al non esser in nostro potere di considerarlo ne' suoi semplici; mentre già, come anche riflette il profondissimo Fisico P. *Barletti* (*a*) " dobbiamo ritener fermo, " che tutti gli effetti, e tutti i modi delle corporee azioni " nascono non mai da una solitaria, e precisa forza, o qua-" lità, nè da un solo, e preciso corpo; ma che si combina-" no, e si compongono, or più or meno con tutte le altre " qualità, che sono nel corpo stesso, e ne' corpi coi quali " s' incontra ". Così io mi lusingo di poter stabilire principj sodi, e regole sicure nella materia da me ora presa in discussione, e che inoltre sieno cotali regole applicabili alla pratica con quella prossima precisione di risultati, che dee esser giudicata conveniente da chi intende a quanto possano estendersi i di lei limiti nel maneggio della fisica de' corpi.

Conosciute le leggi anche della resistenza di attrito, che incontrano i solidi in movimento, mi riserbo in seguito di esporre la *Teoria concreta de' gravi*, *che discendono o ascendono per piani rettilinei*, *e per piani curvilinei*; e finalmente mi adoprerò per instituire una *Dinamica concreta de' corpi*, onde promovere per qualche parte la vasta, e nel tempo medesimo ben ardua *Scienza del moto concreto de' solidi*, costituente il più bello, ed utile ramo di una Meccanica concreta, di cui finora intieramente manchiamo. Riguardo a me pertanto prenderei per somma ricompensa delle mie applicazioni l' aver potuto somministrare materiali di buona,

---

(*a*) Opera citata. Tom. I. Art. VI. pag. 21.

e certa tempra a quegl' illustri Fisici, che o si trovano già inoltrati in tale rilevantissima impresa, o fossero disposti ad intraprenderne l'assunto: non intendendo io in verun modo di preoccupare un sì ubertoso, ed importante soggetto, ma soltanto di contribuire, per quanto mi sia possibile, investigazioni utili alla di lui sicura fabbrica, e perfezione.

ARTICOLO I.

Descrizione, ed uso del Forometro.

§. I. Due sono le parti principali, che insieme combinate costituiscono il *Forometro*, o sia la macchina misuratrice il moto de' solidi. La *Fig. I.* ne rappresenta la sezione interna fatta da un piano verticale segante la macchina secondo la di lei lunghezza *AB*; e nella *Fig. II.* comparisce in solido, perchè meglio possa distinguersi tutta la di lei costruzione. Scorrendo coll' occhio per l' una, e l'altra figura s' intenderà più prontamente la descrizione, che ora faremo delle parti, e del loro uso, nel nostro *Forometro*, avvertendo, che in ordine a misure, il piede da me adoperato al piede Regio di Parigi ha la ragione di 21 a 20, e che in ordine a' pesi la libbra da me usata a quella di Parigi ha la ragione di *65* a *96*. *ABEF* pertanto è un prisma di legno di noce lungo poll. 18., largo poll. *6.*, ed alto poll. 2., a cui stanno annessi quattro piedi alti poll. 3 $\frac{1}{2}$., onde possa reggersi in situazione orizzontale. Tale parte integrante della macchina chiameremo *Castello*. *CBHI* poscia che ha la figura di un tubo prismatico alto poll. 24., chiuso da tre pareti egualmente alte, e larghe in lume poll. 2. aperto sul dinanzi *BH*, e che si può volendo congiugnere in situazione verticale sopra il castello *AB* e fortificarsi contro di esso mediante i puntelli *AN AN* che vanno ad innestarsi in *A A*, potremo semplicemente nominare *Tubo*.

§. II. Il castello *ABEF* ha incavato verso l'estremità *BE* un foro *BC87* di base quadrata quasi di poll. 2. di lato, e passa quasi tutta la grossezza *BE*, se non che vi rimane in fondo un ritegno tre linee grosso, ma traforato però interamente in centro d' un pollice per ogni lato. Al solo osser-

vare le figure si può rilevare, come l'accennato foro, investendo in esso cassettine di legno di noce con accuratezza eseguite, si riduceva, conservando sempre la stessa profondità, ad un pollice e mezzo di base quadrata, ed anche ad un pollice solo.

§. III. Presa una lima vecchia Romana d' acciajo, che viene presso di noi reputata d' ottima temperatura, lunga poll. 15., larga poll. 1., e grossa una linea, la feci dolcemente incurvare, e quindi situare sulla metà della larghezza della base inferiore *FE* del castello, in guisa ch' essendo stata saldata all'estremità *D*, veniva coll' altra estremità *E* a baciare la testa *FE* del medesimo castello, restando incurvata nel mezzo per linee sette. Tale lima così preparata resisteva vie e vie più ad una forza, che applicata all' estremità *E* cercava di allontanarla, e distenderla, e restituivasi con somma prontezza al suo stato primiero se trovavasi libera a se stessa, agendo in somma come perfetto elastro, che così in seguito la chiameremo. Questo elastro inoltre era fornito d' un cubetto di legno di noce *G*, che diremo *martello*, d' un pollice di lato, sicchè innestavasi esattamente nel foro poco fa accennato, e che la *Fig. I.* singolarmente lo dimostra con chiarezza. Per disporre poscia quante volte più piacesse l'elastro *DE* sempre ad uno stesso grado di tensione, vi sta congegnata, sotto pure la base inferiore *FE* del castello, la staffa di lamina di ferro tre pollici alta, la quale, essendo fornita de' fori 1, 2, 3 passandovi per essi una cavicchia di ferro *XZ*, serviva a stabilire, e registrare con certezza l' elastro *DE* o al primo, od al secondo, oppure al terzo grado di tensione, legando con filo robusto l' estremità *E* di esso elastro, appoggiato alla detta cavicchia *XZ*, al braccio *T* che sortiva dal fondo della staffa.

§. IV. Nel mezzo delle pareti opposte *CH*, *CH* del tubo *CBHI* vi sono scavati li canaletti 45, 45, per li quali scorre il cursore *PRSV* composto del piano orizzontale *PR*, e del verticale *SV*, che s' inserisce lateralmente ne' detti canaletti. Viene sostenuto tale cursore da un filo di seta raccomandato alla metà dell' orlo superiore del piano verticale *SV*, il quale s' avvolge poscia per la girella *L* mobile intorno un cilindretto orizzontale fermato dalle sue estremità a tanta al-

tezza che la girella può muoversi liberamente senza incontrare ostacoli nella parete interna *CI* del tubo, tenendo dall' altro capo l'accennato filo sospesa la lance *M* caricata di tanto peso da tenere in equilibrio meccanico il cursore *PRSV*.

§. V. Descritte le parti componenti il nostro Forometro, veggiamone ora il loro maneggio ed uso. Disposta e preparata la macchina come rappresentano le *Fig. I. e II.* il suo uffizio si è di gettare verticalmente un solido, che venisse riposto nel foro *B78C*, e di far conoscere a qual' altezza sia egli pervenuto. Intorno a che si dee avvertire che stante le dimensioni, a cui poteva ridursi il detto foro *B78C*, già antecedentemente indicate, tre sono i solidi di figura prismatica, che in esso possono riporsi; il maggiore colla base quadrata di poll. 1, e lin. 11, il medio colla base quadrata di poll. 1, e lin. 5, ed il picciolo colla base quadrata di lin. 11, per lasciare in ogni caso mezza linea di spazio fra le facce del solido, e le pareti del foro, onde possa da esso sortirvi liberamente; tutti e tre però i detti solidi sono alti poll. 1, e lin. 9, ch' è la profondità *B7* del foro medesimo *B78C*. Qualora vuolsi pertanto spignere verticalmente uno di essi solidi delle dimensioni descritte, bisogna innestarlo nel foro *B78C* preparato come alla grandezza del solido conviene, e quindi con un filo stendere dall' estremità *E* l' elastro *DE*, finchè s' appoggi alla cavicchia *XZ* imperniata in due fori corrispondenti della staffa, raccomandando il medesimo filo al braccio *T* di essa coll' avvertenza che dopo assicurato rimanga disteso, del che si può facilmente accertarsene, se, così raccomandato l' elastro *DE*, continui esso a perfettamente baciare la cavicchia *XZ*: dopo di ciò con taglienti e ben affilate forbici recidesi il detto filo dando libertà all' elastro, il quale nel restituirsi al di lui stato primiero, col martello *G* ad esso unito, respigne e fa inalzare il solido che incontra nel di lui cammino, come si vede in *O*. Fatto questo primo esperimento di prova si dispone il cursore *PRSV* a quell' altezza, che presso a poco si conobbe inalzarsi il solido *O*, e si va ripetendo due o tre volte l'esperimento fino a che resti determinata dal piano orizzontale *PR* del cursore l' ascesa verticale del solido *O*; il che facilmente s' ottiene e con tutta precisione, trovandosi esso

curfore in equilibrio meccanico col pefo ripofto nella lance *M*. Per avere però la ricercata afcefa verticale in pollici, e linee, deggiono effer divifi gli orli anteriori del tubo *BH BH* in pollici, cominciando dalla metà dell' altezza *B*7, o *C*S ch' è linee 10 $\frac{1}{2}$; di maniera che la prima divifione nel noftro cafo fortiva linee 1 $\frac{1}{2}$ fopra i punti *B*, *B*, e fegnato dal piano orizzontale *PR* del curfore il punto delle divifioni, a cui perviene il folido *O*, fi dovrà da tale mifura detrarre la metà dell' altezza del folido *O*, che nel noftro Forometro è coftantemente, in tutti i folidi che poffono porfi in efperimento, linee 10 $\frac{1}{2}$, onde ottenere il viaggio verticale del folo centro di gravità del folido, a cui dee riferirfi ogni legge di movimento.

§. VI. L' altro uffizio, a cui dovremo applicare il Forometro, fi è di rilevare lo fpazio, che qualfivoglia de' defcritti folidi, che poffono inneftarfi nel foro *B*7S*C*, percorre fopra un piano orizzontale. Per ottenere ciò, all' eftremità d' una Tavola orizzontale *GH* (*Fig. III.*) fi è formato il gradino *GLI* per tutta la di lei larghezza, di tale altezza *GI*, che ripofando fopra di effo il caftello *ABEF* fciolto dal tubo *CBHI* nella pofizione, che la figura accennata dimoftra, la foglia ed il piano del foro atto a ricevere il minore folido s' unifce, e continua in uno fteffo piano orizzontale con quello della Tavola *GH*: mediante poi alcune tavolette ripofte fulla bafe *IL* del gradino *GIL* alzafi il caftello *ABEF* in guifa, che la foglia del foro atto a ricevere il folido medio, e così quella del foro pel folido maffimo, fi trova a livello, e nello fteffo piano con quello della Tavola orizzontale. Difpofto il caftello come s' è fpiegato, e rattenuto fermo in tale pofizione dalla fafcia zancata di ferro *TV*, che lo abbraccia, fi diftende l' elaftro, che fta dietro di effo nel modo fopraindicato, a cui tagliando il filo, fpigne col martello *G*, nel reftituirfi al di lui ftato di quiete, il folido *O*, e lo fa percorrere ful piano orizzontale *GH*, fopra di cui è difegnata una fcala di pollici, cominciando a contare il primo pollice dalla metà della lunghezza *B*7, o *C*S del foro, da cui fortono i folidi, onde, come nel cafo del loro getto verticale, fi poffa rimarcare il viaggio foltanto del loro centro di gravità.

ARTICOLO

ARTICOLO II.

Spiegare la forza dell' elaſtro impiegato nel Forometro.

§. VII. Sia *DGE* (*Fig. IV.*) l' elaſtro del Forometro, diſegnato come ad eſſo ſta anneſſo, ſicchè la linea *DE*, che parte dal punto *D* intorno a cui l' elaſtro s' aggira, e va al punto *E* contro cui s' appoggia, ſia orizzontale. E poichè nel noſtro caſo occorreva la forza equivalente al peſo di libbre due che agiſſe nel luogo *G* dell' elaſtro, in cui ſta attaccato il martello *G*, perchè cominciaſſe a diſtaccarſi dal punto d' incontro *E*, ed era inoltre neceſſario accreſcere ſempre più cotale forza per vie maggiormente diſtaccarlo dal punto *E*, e farlo paſſare nelle ſituazioni $DG'E'$, $DG''E''$ ecc., egli è manifeſto, che il martello *G*, in virtù dell' elaſtro a cui è unito, traſferito per eſempio a forza in G'', ſi porterebbe laſciato libero a ſe ſteſſo verſo *G* con quella natura di movimento accelerato, che è propria d' un corpo, la di cui forza centripeta creſca in ragione diretta di qualche funzione delle diſtanze dal ſuo centro di tendenza: anzi che, tolto l' oſtacolo *E* all' elaſtro, non v' ha da dubitarſi, che il martello *G* ſeguiterebbe a muoverſi con egual legge di movimento (e poſto che $DG'''E'''$ foſſe la poſizione, in cui l'elaſtro, venendo alla bella prima ſituato, ſi manterrebbe in quiete ſenza il ſoccorſo di alcuna forza applicata in *E*), finchè giungeſſe al punto G''' centro della ſua tendenza: donde poſcia proſeguirebbe, colla velocità acquiſtata, ad allontanarſi di movimento ritardato, e quindi retrocedendo ſi muoverebbe intorno ad eſſo centro di tendenza G''', a guiſa per così dire di pendulo, che diſcoſtato dalla linea verticale venga in ſeguito liberato a ſe ſteſſo. Tale ſi è la maniera di muoverſi del noſtro elaſtro, che baſta, per le coſe che dobbiamo dire in queſto luogo intorno ad eſſo, averla puramente accennata.

§. VIII. Siccome poi è proprio della natura dell' elaſtro partendo dalla poſizione di quiete $DG'''E'''$ di diſtenderſi ed allungarſi quanto più da eſſa ſi allontana, così è chiaro, che la linea $G'G'GG'''$, per cui tende il martello *G* unito all' ela-

ſtro, al ſuo centro di quiete G''', non è nè linea retta, nè arco circolare, ma una linea curva dipendente dalla forma, e coſtituzione dell' elaſtro medeſimo. Data pertanto la natura della curva $G''G'GG'''$ (riferendo le di lei ordinate GM $G'M'$ ecc. alle aſciſſe verticali $G'''M$ $G'''M'$ ecc. preſe nella verticale GM'') che è lo ſpazio per cui dee percorrere il martello G onde condurſi da qualunque punto G'' G' ecc. al centro di tendenza G''', ed eſpoſta con la curva $G'''HHH''$ riferita al medeſimo aſſe $G'''M'''$ la ſcala delle forze, ſicchè l' ordinata MH eſprimeſſe nel noſtro caſo le libbre due neceſſarie per mantenere l' elaſtro nella poſizione DGE, e così l' ordinata $M'H'$ la forza per mantenerlo nella $DG'E'$, e così diſcorrendo; biſognerebbe ritrovare la natura della curva $L''L'L'$, che foſſe la ſcala delle velocità, onde conoſcere quella di cui è dotato il martello G in un qualſivoglia punto intermedio, partendo da una data diſtanza dal centro di tendenza G'''.

§. IX. Ma ciò che inoltre maſſimamente importa di rilevare, ſi è in qual guiſa comunichi e metta in moto il martello G dell' elaſtro un ſolido che incontri per viaggio. Per non partire pertanto dal caſo noſtro, biſogna conſiderare, che trovandoſi internato lin. 7 il martello G dell' elaſtro DE (*Fig. I.*) quando termina il di lui viaggio per l' incontro che trova nella teſta EB del caſtello BF, per lo ſpazio appunto di ſole lin. 7 può egli accompagnare il ſolido, che incontra inneſtato nel foro $B78C$, eſtenſione di ſpazio che può aſſumerſi come percorſo per linea retta, e verticale, il che di fatti in eſperienza non compariva mai diverſamente. Per il che richiamando anche ciò che abbiamo ſuperiormente rifletttuto (§. VII.), poſſiamo adunque paragonare l' azione del martello G, condotto dall' elaſtro DE, verſo un ſolido che incontra ed accompagna per il corſo di lin. 7 a quella che eſerciterebbe un corpo moſſo verſo un centro di tendenza per linea retta da una forza centripeta in ragione diretta di una qualche funzione delle diſtanze dal detto centro, verſo un altro corpo, che reſiſteſſe al proſeguimento del di lui moto con forza proporzionale al proprio peſo. Non ſarebbe ora difficile inſtituire di tal movimento l' appoſita teoria: imperciocchè data la natura de' corpi urtanti, per li principj dinamici, ſi ſcuopre la velocità del primo iſtante,

colla quale procederebbero amendue i corpi unitamente; riguardati poscia essi come una sola massa dotata di tale velocità, e di una forza centripeta quale risultasse dall'eccesso di quella del corpo urtante da quella del corpo urtato, ridotte amendue ad omogeneità, mediante il maneggio de' comuni principj del moto, ricaverebbesi la legge della velocità, secondo cui seguiterebbero i detti corpi uniti insieme il loro movimento.

§. X. Anzi che discendendo al caso particolare del nostro Forometro, potremmo riguardare come corpi duri ed il martello *G* (*Fig. V.*) condotto dall' elastro, ed il solido *O* che va ad incontrare, essendo l' uno e l' altro di qualche specie di legno; e quindi rappresentandosi colla retta *GB* lo spazio delle 7 linee, per cui il martello *G* procede unitamente al solido *O*, e colla *GQ* la velocità del martello medesimo nell' istante che incontra il detto solido *O*, velocità che abbiamo veduto (§. VIII.) come può riconoscersi, è manifesto che il quarto proporzionale alla somma delle masse *G*, *O*, di quella del martello *G*, e dell' enunziata velocità *GQ*, che sia *GM*, indicherà la velocità del primo istante del martello *G*, e del solido *O* unitamente, come se fossero una massa sola. Posta quindi *FIE* la scala della forza centripeta, da cui viene trasportato il martello *G* per lo spazio delle 7 linee *GB*, sicchè le ordinate *GF*, *LI*, *BE* ecc. mostrino i pesi equivalenti alla forza centripeta, che sente il martello *G* ne' punti *G*, *L*, *B* ecc., è chiaro che applicando sull'ordinata *GF* la *GD* esprimente il peso del solido *O*, e menata *DC* parallela a *GB*, la stessa curva *FIE* riferita al nuovo asse *DC* dinoterà la scala della forza centripeta del martello *G*, e del solido *O* presi insieme come una massa sola: quindi co' principj del moto si determinerà la scala *MPR* delle velocità, delle quali è dotato il martello *G* col solido *O*, ne' punti *L*, *B*, ecc. dello spazio da percorrersi *GB*, ed in conseguenza s' avrà determinata pure l'ultima velocità *BR*, con cui seguiterà il moto verticale il solido *O* venendo impedito al martello *G* il seguitarlo, come quello, che per essere aderente, e congiunto all'elastro si fermerà con esso incontrandosi nella testa del castello del Forometro.

§. XI. Quanto abbiamo riflettuto intorno al movimento

verticale dell'elaſtro, dee applicarſi pure al di lui movimento orizzontale, qualora cioè il caſtello del Forometro è apparecchiato per il getto orizzontale de' ſolidi, giacchè il peſo del martello è da traſcurarſi, s' aggravi, come nel primo caſo, o non s' aggravi, come nel ſecondo, ſull' elaſtro, in riguardo alla forza centripeta, con cui ſi conduce al centro di quiete. Ed ecco aperta la via a poter ricavare, e ſtabilire in formule generali non ſolo la natura, le proprietà, e tutti gli accidenti del movimento del martello *G* congiunto al noſtro elaſtro, ma di qualunque punto negli elaſtri di ſimil fatta: ricerca, che nel noſtro argomento diverrebbe anzi che d' utilità, di ſolo abuſo di calcolo, ed interamente inutile, baſtando il poter dedurre preſentemente dalle coſe finora eſpoſte le nozioni ſeguenti.

§. XII. E poichè un ſolido reſpinto o verticalmente, od orizzontalmente dal martello congiunto all' elaſtro del Forometro viene accompagnato da eſſo martello per lo ſpazio di 7 linee (§. IX.) con quella legge di movimento, che abbiamo dichiarato (§. X.); è manifeſto che dibattendo dallo ſpazio percorſo dal ſolido le dette 7 linee, rimarrà lo ſpazio, ch' egli percorſe da sè ſolo, e con eſſo in conſeguenza la miſura dell' ultimo grado di velocità impreſſogli dall' elaſtro accennato.

§. XIII. Partendo l' elaſtro da un medeſimo grado di tenſione, comunicherà col martello ad eſſo unito a' ſolidi di egual peſo o maſſa, che incontraſſe nel di lui viaggio verticale, diſpoſti già nel Forometro, com' è noto (§. §. V. VI.), gradi eguali di velocità. Sarà però eguale, maggiore, o minore la velocità impreſſa ad un ſolido gettato verticalmente, di quella che verrà impreſſa al medeſimo ſolido lanciato orizzontalmente, ſe la reſiſtenza d' attrito nel getto orizzontale oppoſta dal detto ſolido ſia eguale, maggiore, o minore del ſuo proprio peſo, per lo ſpazio delle 7 linee, che dal martello congiunto all' elaſtro viene accompagnato.

§. XIV. Eſſendo la forza centripeta dell' elaſtro, nel punto ove ſta anneſſo il martello, paſſato al primo grado di tenſione, equivalente al peſo di libbre quattro, riducendoſi a libbre due quando viene arreſtato nella teſta del caſtello del Forometro; ſi fa per ultimo manifeſto, che in tanta

efficacia di forza centripeta in detto elaſtro tanto meno diverrà computabile la differenza delle velocità impreſſe dall' elaſtro a diverſi ſolidi, quanto ſaranno più vicini a pareggiarſi nel loro peſo aſſoluto ſe gettati verticalmente, oppure, peſando lo ſteſſo, quanto ſaranno più vicini a reſiſtere ugualmente all'eſſere traſportati per lo ſpazio delle 7 linee, che ſtanno in compagnia del martello congiunto al medeſimo elaſtro, ſe ſieno ſpinti orizzontalmente; eſſendo certo già che nel primo caſo il ſolido di minor peſo riceverà maggior grado di velocità, e così quello di minor reſiſtenza nel ſecondo caſo, non variando in queſto però, come s' è avvertito, di maſſa o di peſo aſſoluto.

ARTICOLO III.

Eſperienze per rilevare le leggi della reſiſtenza di attrito, che incontrano i ſolidi, che ſi trovano ſulle ſuperficie di altri ſolidi in movimento.

ESPERIENZA I.

§. XV. Scelte le tre ſpecie di legno, *Cirmolo* che è il più leggiero nella categoria de' legni dolci, *Noce*, e *Corniolo*, che degradano notabilmente nella loro gravità ſpecifica, non tenendomi che alla grandezza della baſe de' tre ſolidi che poſſono uſarſi nel noſtro Forometro (Art. I. §. V.), ne ho formati tre dello ſteſſo peſo di once $1\frac{3}{4}$ colle tre ſpecie di legno accennate. Il primo ſolido pertanto, ch'era di cirmolo, eſſendo della baſe quadrata di poll. 1, lin. 11, rimaſe alto poll. 1, lin. 4; il ſecondo di noce, colla baſe quadrata di poll. 1, lin. 5, ſi trovò alto poll. 1, lin. 9; ed il terzo ch' era di corniolo della baſe quadrata di lin. 11 di lato, riuſcì alto poll. 2, lin. $4\frac{3}{4}$. Ciò fatto diſpoſi il Forometro al getto verticale, ponendo in eſperimento i tre deſcritti ſolidi, ed appuntando l' elaſtro al primo grado di tenſione. Il riſultamento di queſta ſperienza ſi vede nella ſeguente Tavola, avvertendo, che non eſſendo riuſciti i ſolidi dell' altezza di poll. 1, lin. 9, eccettuato quello di noce, ſi dovette, per ottenere la preciſa aſceſa verticale del

loro centro di gravità, usare in tal caso la diligenza particolare nel solido di cirmolo alto poll. 1, lin. 4 di aggiugnere all' altezza dell' ascesa ricavata colle avvertenze indicate (Art. I. §. V.) (Art. II. §. XII.), lin. 2 $\frac{1}{2}$ metà della differenza fra l' altezza attuale del solido, e quella che dovrebbe avere di poll. 1, lin. 9, stante le divisioni segnate nel tubo verticale della macchina; ed all' opposto, per la stessa ragione, convenne detrarre dall' altezza dell' ascesa del solido di corniolo lin. 3 $\frac{1}{2}$, metà della differenza fra la di lui attuale altezza di poll. 2, lin. 4 $\frac{1}{4}$, e quella di poll. 1, lin. 9, che esattamente competerebbe alle accennate divisioni.

	Dimensioni dei solidi pesanti egualmente Onc. 1 $\frac{1}{4}$, in poll., e lin.			Ascesa verticale del centro di gravità de' solidi.	
	Altezza	Larghezza	Lunghezza	Pollici	Linee
Solido di Cirmolo	1 : 4	1 : 11	1 : 11	4 :	5 $\frac{1}{2}$
Solido di Noce	1 : 9	1 : 5	1 : 5	5 :	5
Solido di Corniolo	2 : 4 $\frac{1}{4}$	0 : 11	0 : 11	6 :	1 $\frac{1}{2}$

OSSERVAZIONE.

§. XVI. E poichè i solidi projetti in direzione verticale, essendo per tutti e tre ugualmente appuntato l' elastro del Forometro al primo grado di tensione, pesavano lo stesso, dee adunque essere stato loro comunicato dall' elastro il medesimo grado di velocità (Art. II. §. XIII.); e perciò secondo le leggi del moto uniformemente accelerato, e ritardato de' gravi sulla superficie terrestre, avrebbero dovuto inalzarsi alla medesima altezza, contro l' esperienza, la qual dimostra, che il solido di cirmolo di maggior base salì poll. 1, lin. $\frac{1}{2}$ meno del solido di noce di base media, e questo salì lin. 8 $\frac{1}{2}$ meno del solido di corniolo di base picciola; di modo che il primo salì meno dell' ultimo poll. 1, lin. 8 $\frac{1}{2}$. Cesserà però ogni motivo di dar pensiere a siffatta contraddizione di teoria, e di esperienza, se rifletteremo soltanto aver noi fondata la teoria dell' elastro del Forometro indipendentemen-

te dalla resistenza dell' aria: dopo di che qual meraviglia, che incontrando l' aria i solidi spinti dall'elastro con superficie prossimamente una doppia dell' altra, il primo di essi salisca meno del secondo, e questo meno del terzo? Sarebbe qui inutile fermarsi maggiormente su tale fenomeno, bastando al caso nostro presentemente averlo soltanto in osservazione nel confrontare fra di sè i risultati, che cercheremo di raccogliere dal nostro Forometro.

ESPERIENZA II.

§. XVII. Apparecchiato il Forometro pel getto verticale de' solidi (Art. I. §. V.), e disposto l' elastro al primo grado di tensione, sonosi posti in esperimento tre solidi dello stesso volume, colla base quadrata di linee 11 di lato, ch' è il minor solido ricevuto dalla macchina. Il primo solido era di abete, il secondo di noce, ed il terzo di corniolo. Nella sottoposta Tavola si rileva il peso di essi solidi, e l' ascesa verticale del loro centro di gravità, quale essa risulta colle considerazioni esposte (Art. I. §. V.) (Art. II. §. XII.), il che avvertiamo ancora questa sola volta per sempre.

	Peso de' solidi			Ascesa verticale del centro di gravità de' solidi.		
	Dramme		Grani	Pollici		Linee
Solido di Abete.	5	:	3	8	:	2 $\frac{1}{2}$
Solido di Noce.	6	:	37 $\frac{1}{2}$	7	:	10
Solido di Corniolo.	10	:	30	6	:	6

OSSERVAZIONE.

§. XVIII. Questa sperienza ci fa conoscere, ch' essendo le cose rimanenti pari, vie più il solido spinto verticalmente s' inalza quant' è di minor peso; fenomeno, che corrisponde a ciò che appunto abbiamo dedotto dalla teoria dell' elastro, impiegato nella macchina Forometrica (Art. II. §.

XIV.) . Imperciocchè comunicando l' elaſtro maggior grado di velocità al ſolido di minor peſo , a maggiore altezza dee eſſo pure inalzarſi per le note leggi Galileane , giacchè in tal caſo ſoffrono i ſolidi gettati dalla macchina , per eſſere dello ſteſſo volume , quaſi gradi eguali di modificazioni per conto della reſiſtenza dell' aria che incontrano nella loro aſceſa verticale. Dobbiamo inoltre oſſervare la ſomma ſenſibilità dell' elaſtro , tuttochè dotato ſia di energica forza centripeta , poichè la differenza di peſo d' una dramma e mezzo circa fra il ſolido di noce e quello di abete , fa che il ſecondo più leggiero s' inalzi linee $4\frac{1}{2}$, oltre l' aſceſa di poll. 7, lin. 8 del primo più peſante, e la differenza di dramme $5\frac{1}{2}$ circa , fra il ſolido di corniolo e lo ſteſſo di abete, fa che queſto s' inalzi poll. 1 , lin. $8\frac{1}{2}$ più di quello. Premeſſe queſte due ſperienze, che ci mettono in chiaro delle avvertenze , che dobbiamo avere nell' eſaminare i riſultati , che ricaviamo dalla noſtra macchina Forometrica , paſſiamo all' eſpoſizione delle ſeguenti , che ho inſtituito al propoſto oggetto di rilevare le leggi della reſiſtenza di attrito, che incontrano i ſolidi in movimento.

ESPERIENZA III.

§. XIX. Dello ſteſſo legno abete feci formare tre ſolidi della baſe quadrata di lin. 11 di lato, tre della baſe quadrata di poll. 1 , lin. 5 , ed altri tre colla baſe quadrata di poll. 1, lin. 11, eſſendo tutti della ſteſſa altezza di poll. 1, lin. 9 , onde foſſero applicabili eſattamente al Forometro (Art. I. §. V.) . Quindi o col vuotare in centro quel ſolido, che peſava più del biſogno, o coll' aggiungere peſo, ineſtandovi del piombo con aggiuſtatezza pure in centro a quel ſolido che peſava meno, ho ridotti i deſcritti ſolidi, in ciaſcuna claſſe, il primo di un' oncia di peſo, il ſecondo di due , ed il terzo di quattro . Così preparati i nove ſolidi ho ſperimentato lo ſpazio da ciaſcuno di eſſi percorſo e verticalmente, ed orizzontalmente ſopra una tavola di abete di pulitezza non all' eſtremo ricercata, diſponendo, ed applicando il Forometro ne' modi eſpoſti (Art. I. §§. V, e VI.) , e tendendo l' elaſtro coſtantemente al primo grado di apertura.

tura. Oltre a ciò all' estremità dell' accennata tavola ho annestato la mobile e pronta girella *L* (*Fig. VI.*) per ricavare con iscrupolosa precisione l' equivalente in peso alla resistenza che ciascuno de' solidi *O* projetti sulla tavola orizzontale *GH* oppone all' essere sopra di essa in istato di equilibrio meccanico : l' artificio a tal uopo usato è già per sè manifesto. Ecco pertanto il prospetto di tutta questa serie di esperimenti eseguiti con quelle cautele ed attenzioni , che sono necessariamente richieste dalla delicatezza del soggetto.

Lato della base quadrata de' solidi.	Peso de' solidi.	Ascesa verticale del centro di gravità de' solidi.	Corsa orizzontale del centro di gravità de' solidi.	Equivalente in peso alla resistenza di attrito, che incontrano i solidi pel loro equilibrio meccanico sulla tavola orizzontale.
Poll. Lin.	Once	Poll. Lin.	Poll. Lin.	Onc. Dram. Gran.
0 : 11	1	6 : 9	17 : 2	0 : 3 : 20
0 : 11	2	5 : 4	13 : 5	0 : 7 : 10
0 : 11	4	2 : 7	7 : 7	1 : 4 : 30
1 : 5	1	4 : 8	13 : 11	0 : 2 : 53
1 : 5	2	4 : 4	13 : 3	0 : 5 : 15
1 : 5	4	2 : 5	7 : 3	1 : 4 : 0
1 : 11	1	1 : 10	4 : 8	0 : 3 : 26
1 : 11	2	3 : 2	7 : 3	0 : 6 : 52
1 : 11	4	1 : 4	3 : 2	1 : 7 : 10

OSSERVAZIONE.

§. XX. Riflettendo sulla serie degli esperimenti descritti nella tavola sovrapposta si rileva, 1°. che i solidi in ciascuna classe, essendo dello stesso peso, si sono inalzati, ed hanno percorso orizzontalmente maggiore spazio, avendo minor volume, conformemente a ciò che abbiamo dedotto dalla sperienza I. (§. XVI.) : 2°. che considerati i solidi in ciascuna classe partitamente, nella prima e seconda si verificò, che i solidi essendo dello stesso volume hanno percorso verticalmente, ed orizzontalmente spazio maggiore, pesando meno, come abbiamo concluso nella sperienza II. (§. XVIII.); ma in

quelli della terza classe il fenomeno comparve con qualche differenza, avvegnachè il primo solido salì, e percorse bensì qualche poco più del terzo, ma assai meno però del secondo, contro ciò che dovea avvenire. Questa discordanza di effetti è quella che osservasi generalmente in tali esperimenti, riguardo al non essere i solidi saliti, o percorsi con degradazioni in qualche modo consimili a quelle delle due citate sperienze, deesi attribuire alla costruzione particolare de' nove solidi posti in cimento, alcuni de' quali, e singolarmente il primo della terza classe, che s'allontanò più sensibilmente degli altri, per seguitare la legge stabilita ne' loro pesi si dovettero vuotare, facendo loro a norma del bisogno un più, o meno ampio foro cilindrico, ed altri empiere di peso, come abbiamo indicato antecedentemente (§. XIX.), in conseguenza di che l' aria agiva in essi con maggiore, o minore efficacia a tenore della loro figura atta ad incontrarne, e contenerne maggiore, o minor quantità. Quindi ho abbandonato qualunque considerazione sul generale reciproco rapporto de' risultati degli esperimenti esposti, ed essendomi attenuto soltanto a considerare l' esperimento in ciascun solido da per sè in particolare, cominciai a ragionare così. E poichè il solido projetto verticalmente ha ricevuto nell' istante, che s' è distaccato dall' elastro, quel grado d' impeto o velocità, che sarebbesi da per sè acquistato cadendo liberamente dall' altezza medesima (non tenendo conto per un momento della resistenza dell' aria, e della differente resistenza opposta dal solido medesimo contro l' elastro, qualora viene gettato orizzontalmente (Art. II. §. XIII.)), si fa manifesto, che nel getto orizzontale il solido verrebbe spinto con quel grado d' impeto, che si acquisterebbe cadendo dall' altezza, a cui è salito verticalmente. Posto ciò abbiamo adunque nell' uno e nell' altro caso il medesimo solido dotato dello stesso grado di velocità, e se nel getto verticale non v' ha dubbio che proceda egli di moto uniformemente ritardato, nell' orizzontale è almeno certo che procede di un moto ritardato, giacchè passa, dopo percorso un certo spazio, dal sommo grado di velocità impressagli allo stato di quiete. Premessa pertanto questa riflessione, il primo esperimento che s' affaccia da tentarsi su i risultati di que-

sta sperienza III., si è di conoscere se pure il solido nel getto orizzontale proceda di moto uniformemente ritardato a somiglianza del verticale, colla differenza però, che siccome in questo movimento la forza costantemente ritardatrice è il peso del solido, così in quello la costante forza ritardatrice sia la resistenza di attrito, che incontra esso nel disporsi in istato di equilibrio meccanico sul piano, per cui si trasferisce. Per entrare in tale disamina basta ricorrere al noto teorema meccanico, cioè che *Gli spazj percorsi di moto uniformemente ritardato, da un mobile dotato d'un medesimo grado di velocità, seguono la ragione inversa delle forze ritardatrici, che contro di esso costantemente agiscono*. Di maniera che nel nostro caso lo spazio verticale all' orizzontale, percorsi amendue dal medesimo solido, dovrebbe avere la ragione inversa del peso assoluto del solido alla di lui accennata resistenza di attrito. Instituita pertanto in ciascun de' solidi registrati nella tavola degli esperimenti rapportata nell' antecedente §. XIX. cotale analogia, si osserva che essa accostasi al vero assai da vicino, rimarcandosi soltanto costantemente il difetto, che il viaggio orizzontale de' solidi per l' esatta di lei corrispondenza è un po maggiore del bisogno, e più ancora ne' solidi di maggior peso, il che piuttosto che metterci in diffidenza, ci vincola anzi a considerarla come l' unica che affettata venga da tal natura di movimento: imperocchè opponendosi il solido nel getto orizzontale contro l'elastro per lo spazio di 7 linee, che con esso lui va congiunto, con resistenza minore di quella che proverrebbe dal suo peso assoluto, essendo la resistenza di attrito in tutti i nostri solidi esperimentati minore del peso assoluto di essi, dee necessariamente essere maggiore la velocità impressagli dall' elastro nel getto orizzontale, che nel verticale (Art. II. §. XIII.), e quindi crescere lo spazio orizzontale dal solido percorso, oltre il voluto dall' enunziata proporzione: difetto che indubitatamente sarebbesi manifestato con differenze più rimarchevoli, se la resistenza dell' aria non vi avesse in qualche modo compensato, come quella che aumentandosi coll' aumentare la velocità del corpo dentro essa in movimento, in circostanze pari, dee aver agito con maggior efficacia nel getto orizzontale, che nel getto verticale de' solidi. L' esame

indicato può ancora egualmente verificarsi colla scorta de' due seguenti teoremi meccanici. 1.° *I tempi impiegati da un mobile sollecitato da diverse forze acceleratrici, onde acquisti lo stesso grado di velocità, seguono la ragione inversa delle medesime forze acceleratrici*, ed il 2.° *Gli spazj percorsi di moto uniformemente ritardato dallo stesso mobile sollecitato da differenti forze ritardatrici, finchè consumi uno stesso grado di velocità impressogli, procedono in ragione diretta de' tempi*. Sapendosi pertanto, che un grave percorre piedi Parigini 15, poll. 2 in un minuto secondo di tempo, oppure piedi 14, poll. 5 de' nostri, si trovi il tempo impiegato da ciascun solido nell' ascesa verticale; ed essendo poi cognita la ragione del suo peso assoluto alla resistenza di attrito che incontra pel suo equilibrio meccanico sulla tavola sopra cui è percorso, mediante il primo teorema, si ricavi il tempo, che il detto solido ha consumato nella corsa orizzontale; e quindi col soccorso del secondo teorema si verrà facilmente in cognizione se vera sia l' ipotesi assunta, che la resistenza di attrito cioè agisca contro il solido nel di lui movimento orizzontale a somiglianza della gravità, quando ascende verticalmente. Instituito sì fatto calcolo su i risultati esposti nella tavola degli esperimenti eseguiti intorno ai nove noti solidi, deduconsi finalmente le stessissime conseguenze, che dedotte abbiamo coll' antecedente esame. E le stessissime conseguenze pure si deducono paragonando fra loro gli spazj verticali cogli orizzontali percorsi da' sopradescritti solidi, appuntando l' elastro del Forometro a diversi altri gradi di apertura; rimarcandosi inoltre con prossimità fisica una costante ragione fra gli spazj orizzontali e i rispettivi spazj verticali da ciascun de' solidi percorsi; il che appunto dee accadere se il movimento orizzontale de' solidi è un movimento uniformemente ritardato: ma cerchiamo di accertarci su ciò con maggior precisione ed esattezza.

ESPERIENZA IV.

§. XXI. Colle solite diligenze ho posto in esperienza un solido di noce delle minime dimensioni accettate dal nostro Forometro, cioè della base di linee 11 di lato. Replicata più

volte l'esperienza, ascese il solido verticalmente poll. 7, lin. 11: e percorse orizzontalmente poll. 21, lin. 8. Il peso di esso solido era dram. 6, gran. $37\frac{1}{2}$, e la di lui resistenza di attrito per disporsi in istato di equilibrio meccanico su la tavola, in cui fu slanciato, era dram. 2, gran. 30.

OSSERVAZIONE.

§. XXII. Per rendere meno computabile la differenza di velocità, che comunica l' elastro del Forometro ad un medesimo solido, fra il getto verticale e l' orizzontale, ho assunto in questa sperienza l' enunziato solido di noce, il quale pesa meno dell' oncia, ch' era il peso de' solidi minori nell' esperienza antecedente; e ciò io intrapresi coll' oggetto di rilevare con maggior sicurezza la legge del movimento de' solidi projetti sopra un piano orizzontale, finora soltanto, può dirsi così, conosciuta in embrione. Applichiamo adunque su i risultati della presente sperienza i due esami, che indicati abbiamo (§. XX.). Quanto al primo esame pertanto dovrebbe verificarsi, che il peso assoluto del solido di noce dram. 6, gran. $37\frac{1}{2}$, alla di lui resistenza di attrito equivalente a dram. 2, gran. 30, ha la ragione dello spazio orizzontale poll. 21, lin. 8, al verticale poll. 7, lin. 11; cioè riducendo a' minimi termini, dovrebb' essere la ragione 53 a 20 uguale alla ragione 52 a 19. Ma fatto il confronto di esse ragioni, si trova che la seconda non eccede la prima, che della frazione 33:380, differenza, che certamente è pochissimo computabile. Passando ora al secondo esame, si trova che il tempo impiegato dal solido per l' ascesa verticale di poll. 7, lin. 11, è $12''', 50''''$, e che il tempo impiegato dallo stesso solido nello spazio orizzontale di poll. 21, lin. 8, è $34'''$; laonde, perchè venga comprovata l' ipotesi assunta, che lo spazio orizzontale sia percorso dal solido di moto uniformemente ritardato, avendo per forza ritardatrice la resistenza di attrito che prova per disporsi in equilibrio meccanico sulla tavola orizzontale per cui fu spinto, dee verificarsi che lo spazio verticale poll. 7, lin. 11, all' orizzontale poll. 21, lin. 8, ha la ragione del tempo $12'''\ 50''''$, al tempo $34'''$: ma il prodotto degli estremi in tale proporzione dà

3230, e quello de' mezzani 3337, numeri che ſi accoſtano all' uguaglianza quanto mai può pretenderſi; dunque vie più ci troviamo forzati a prediligere la natura di movimento che ſino da bel principio ſoſpettata abbiamo ne' ſei ſolidi projetti ſopra un piano orizzontale. Sarebbe in vero irragionevole il pretendere, che con eſattezza matematica aveſſero a corriſpondere i riſultati dell' eſperienza, prima di ſtabilire la legge che ſi va indagando, mentre ad ognuno è ben noto quanto difficile, per non dire impoſſibile, ſia il por mano nella materia, tanto vaga, e ſoggetta a modificazioni, e ſingolarmente nel noſtro caſo, in cui varie, e poi varie poſſono eſſere le combinazioni, che concorrano a deturpare gli effetti di quell' unica cauſa, di cui andiamo in traccia: ciò però che ci può mettere al ſicuro ſi è, che la differenza nelle proporzioni, dalle quali dipende la verità della legge, naſcendo coſtantemente dall' eſſere lo ſpazio orizzontale percorſo dal ſolido un po maggiore del biſogno, conoſciamo nello ſteſſo tempo la cauſa di tale inconveniente, cioè avvenire ciò dal ricevere il ſolido nel getto orizzontale qualche grado più di velocità, che nel getto verticale, con che in luogo di farci cotale differenza dubitare della legge, ſerve anzi ella a vie più aſſicurarci della ſua verità, ed a conſermarcela quanto è mai poſſibile fiſicamente. Ecco nondimeno un' altra ſperienza, che dovremo ſenza contraddizione ammettere per unica, e deciſiva nel preſente argomento.

Esperienza V.

§. XXIII. Laſciando fuori in ciaſcuna claſſe il ſolido del peſo d' oncie 4, de' ſei rimanenti regiſtrati nella tavola (§. XIX.) ho riveſtita quella faccia, con cui ſtriſciavano nel getto orizzontale, con tela di lino ruvida, e della ſteſſa tela pure ho coperto quel tratto di tavola orizzontale, per cui doveano ſcorrere. Dopo tale preparazione oſſervai l' aſceſa verticale, e la corſa orizzontale di ciaſcuno degl' indicati ſolidi con la ſolita diligenza, ed eſperimentai inoltre la reſiſtenza di attrito, che così riveſtiti, e ſopra un piano coperto del pari, incontravano pel loro equilibrio meccanico. Qui ſotto ſi vedono di tale ſperienza i riſultamenti chiaramente eſpoſti.

Lato della base quadrata de' solidi.	Peso dei solidi.	Ascesa verticale del centro di gravità de' solidi.	Corsa orizzontale del centro di gravità de' solidi.	Equivalente in peso alla resistenza di attrito, che incontrano i solidi pel loro equilibrio meccanico sulla tavola Orizzontale.
Poll. Lin.	Once	Poll. Lin.	Poll. Lin.	On. Dram. Gran.
0 : 11	1	6 : 9	8 : 6	0 : 6 : 40
0 : 11	2	5 : 4	5 : 11	1 : 6 : 50
1 : 5	1	4 : 8	7 : 11	0 : 5 : 30
1 : 5	2	4 : 4	6 : 5	1 : 4 : 0
1 : 11	1	1 : 10	1 : 10	1 : 0 : 0
1 : 11	2	3 : 2	3 : 2	2 : 0 : 0

OSSERVAZIONE.

§. XXIV. Coll'artifizio adoperato nella presente sperienza si è aumentata la resistenza di attrito, che i solidi incontrano pel loro equilibrio meccanico sul piano, per cui scorrere debbono, a segno che poca differenza passa fra essa ed il peso de' detti solidi, anzichè ne' due ultimi s' è combinata una perfetta uguaglianza, come può raccogliersi dalla tavola degli esperimenti. In tal modo si ottenne di porre quasi in parità di circostanze il getto verticale de' primi quattro solidi col loro getto orizzontale, ed in esatta parità i due ultimi; sicchè per questi singolarmente siamo certi, che l' elastro dovea loro comunicare orizzontalmente lo stesso grado di velocità, che imprimevagli verticalmente, e che la resistenza dell' aria era indifferente nell' uno e nell' altro movimento di tali due solidi, se fossero proceduti di moto uniformemente ritardato, venendo respinti da eguali forze ritardatrici; per gli altri quattro solidi poscia tali riguardi doveansi avere più o meno in osservazione, secondo che era distante in uguagliare la resistenza dell' attrito de' solidi il loro peso assoluto. Se pertanto ha luogo in natura la legge, che conghietturata finora abbiamo nel movimento orizzontale de' solidi, è manifestissimo che lo spazio verticale de' due ultimi accennati solidi dovea pareggiare lo spazio orizzontale da essi

percorso, e che negli altri quattro tanto più da vicino si dovea ciò riscontrare, quanto che era più prossima la resistenza del loro attrito a pareggiare il proprio loro peso assoluto. Ma così per l' appunto è accaduto, bastando per accertarsene una passeggiera considerazione sulla tavola degli esperimenti superiormente rapportata: resta dunque, dopo tutto ciò che si è anche sul proposito nelle antecedenti sperienze riflettuto, con evidenza, e con certezza fisica dimostrata l' indole, e la qualità del movimento, che seguono i solidi, ove non abbian a superare, che la resistenza di attrito, potendosi, o per meglio dire dovendosi intorno a ciò stabilire il seguente canone riguardo a que' solidi, che nel loro movimento incontrano quella resistenza di attrito, che col nome di resistenza della prima specie distinta viene da' Meccanici (Mec. Pratica. sez. I. Art. I.).

Ne' solidi, che muovonsi sopra le superficie piane di altri solidi, la resistenza di attrito della prima specie, che incontrano pel loro equilibrio meccanico sopra tali superficie, agisce nel loro movimento a guisa di costante forza ritardatrice, facendoli procedere perciò di moto uniformemente ritardato.

ESPERIENZA VI.

§. XXV. Un cilindro di noce del raggio di linee 6, e lungo linee 11, projetto verticalmente, aprendo l' elastro del Forometro linee 5 meno del primo grado di apertura, a cui lo abbiamo sempre teso nelle sperienze antecedenti, salì poll. 2 lin. 7; e projetto lo stesso cilindro orizzontalmente, percorse poll. 110. Il peso assoluto del cilindro era dram. 2, gran. 52; e siccome poi essendo il detto cilindro poggiato secondo la lunghezza sopra un piano inclinato liscio, com' era quello sopra cui percorse, si sostenne in equilibrio meccanico fino all' angolo di elevazione di 1.°, 24'; così la di lui resistenza di attrito, che chiamasi della seconda specie, si rileva di gran. $4\frac{1}{7}$ (Mec. Pratica. Sez. I. Art. II.)

OSSERVAZIONE.

OSSERVAZIONE.

§. XXVI. E poichè in questa sperienza il cilindro projetto orizzontalmente procede di moto diretto progressivo ed insieme di rotatorio intorno al proprio asse, è manifesto che la resistenza che incontra sulla tavola orizzontale è della seconda specie: ed è chiaro inoltre che in questo esperimento, atteso il picciol volume ed il pochissimo peso del cilindro, ed attesa la di lui figura, dee riguardarsi come incomputabile il maggior grado di velocità che può esso cilindro ricevere nel getto orizzontale in confronto del verticale, e così pure incomputabile la resistenza dell' aria che incontra ne' due accennati movimenti. Per il che se anche in tale circostanza di movimento le resistenze di attrito, che provano i solidi pel loro equilibrio meccanico, agissero contro di essi in via di costanti forze ritardatrici, dovremmo verificare (§. XXII.) che lo spazio verticale poll. 2, lin. 7, a cui salì, allo spazio poll. 110, che percorse sul piano orizzontale, ha la ragione inversa del di lui peso assoluto dram. 2, gran. 52, alla resistenza di attrito della seconda specie gran. $4\frac{1}{5}$, che sul medesimo piano incontra pel suo equilibrio meccanico. Dando pertanto il prodotto degli estremi il numero $444\frac{1}{3}$, e quello de' mezzani 462, non può pretendersi, in un fatto fisico di tal natura, maggiore approssimazione, onde stabilire anche per tale qualità di resistenza di attrito il canone seguente:

Ne' solidi, che muovonsi sopra le superficie piane di altri solidi, la resistenza di attrito della seconda specie che incontrano pel loro equilibrio meccanico sopra tali superficie, agisce nel loro movimento a guisa di costante forza ritardatrice, facendoli procedere perciò di moto uniformemente ritardato.

CONCLUSIONE GENERALE

§. XXVII. Dalle cose superiormente esposte si vede chiaro, che generalmente le leggi del movimento concreto de' solidi, quanto alla resistenza di attrito che incontrano trasportandosi sulle superficie di altri solidi, dipendono dalle leggi, che cotali resistenze seguono per lo stato di equilibrio mec-

canico de' medeſimi ſolidi, ſia pure tale movimento diretto per linea retta, o per linea curva, come circolare ecc., aſcenda, o diſcenda il ſolido per piani rettilinei, o curvilinei, giacchè è ben conveniente nella fiſica de' corpi il concedere di poter conſiderare il moto curvilineo di un ſolido come compoſto di movimenti diretti ſucceſſivamente per piccioli piani inclinati fra sè, ſecondo che richiede la natura della curva, ſopra cui va egli trasferendoſi. Per la qual coſa ſe ſi tratterà del movimento de' corpi, che procedono di ſolo moto progreſſivo retto, o circolare, ſiccome eſſi incontrano la reſiſtenza di attrito diſtinta col nome di prima ſpecie, così dovrà ricorrerſi alla legge da tale reſiſtenza ſeguita nel caſo di equilibrio meccanico, la quale, in parità di circoſtanze nelle ſuperſicie de' ſolidi, è quella del loro peſo (Mec. Prat. Art. I. §. XXV.): di modo che lo ſteſſo ſolido, che ſia projetto con qualſivoglia grado di velocità ſulla ſuperficie d'un altro, avrà per coſtante forza ritardatrice quella reſiſtenza, che proverebbe per diſporſi in iſtato di equilibrio meccanico ſulla detta ſuperficie, reſiſtenza che, com' è noto, ſoltanto creſce col peſo del ſolido, e con la maggior ſcabroſità delle ſuperficie, che ſi ſtrofinano. E ſe ſi tratterà del movimento de' corpi, i quali al moto progreſſivo han congiunto il rotatorio intorno ad un centro, od aſſe, ſiccome queſti incontrano la reſiſtenza di attrito chiamata della ſeconda ſpecie; così dovremo ricorrere alla legge ſeguita da tale reſiſtenza per lo ſtato di equilibrio meccanico, ch' è la ragione inverſa de' raggi di rotazione de' ſolidi, ſuppoſte pari le ſcabroſità delle loro ſuperficie; ſicchè procedendo un ſolido coll' indicata natura di movimento, avrà egli per coſtante forza ritardatrice la reſiſtenza, che incontrerebbe pel ſuo equilibrio meccanico ſulla ſuperficie, per cui ſi traſporta, reſiſtenza che, com' è già provato (Mec. Prat. Art. II. §. XLVIII.), s'aumenta colla diminuzione del raggio rotatorio, e con la maggior aſprezza delle ſuperſicie, che ſi sfregano. V' ha ancora un' altra qualità di attrito in cui continuamente, a cagione del moto contrario d' uno, o d' ambedue i corpi in isfregamento, diſtaccanſi particelle ſolide dalle loro ſuperficie, come ne abbiamo gli eſempj nell' uſo delle mole applicate a pulire, o ad affilare coltelli ed altri ſtrumenti di

ſimil fatta. Su tale natura di attrito io non mi ſono affrettato a darvi penſiero alcuno, conoſcendo bene la ſomma difficoltà di poterlo aſſoggettare a miſurate, e determinate regole, poichè certamente queſte debbono variarſi d'iſtante in iſtante, variando ad ogn'iſtante pure le qualità, e circoſtanze delle ſuperficie in isfregamento. Ciò però che a me ſembra poſſa dirſi in via generale di coteſta natura di attrito ſi è, che la ſua reſiſtenza dipender debba dalla maggior o minor durezza de' corpi in isfregamento, dalla figura, e aderenza delle particelle conſtituenti le ſcabroſità nelle loro ſuperficie, dalla maggior, o minor aſprezza di eſſe, dalla loro grandezza, dalla preſſione, con cui i corpi sfreganti vengono l'uno all' altro uniti, e per l'ultimo forſe dalla velocità, con cui ſi muovono, ſe pure oltre a tutto ciò non aveſſe ad avervi qualche influenza ancora il calore, che per l'ordinario eccitaſi, e sviluppaſi da' corpi obbligati a ſimili contraſti, e vicende. Quindi è, che laſciando da parte così intralciata ricerca, non mi ſono attenuto, che alle due qualità di attrito ſuperiormente deſcritte, le quali certamente ſono le idonee, ed eſſenziali, che occorrer poſſano per condurci al noſtro fine, che fu quello finora di ſtabilire nelle macchine generalmente il loro equilibrio di fatto, o ſia l'equilibrio meccanico, e di ridurre le leggi aſtratte del moto al concreto, cioè di preparare un materiale neceſſario per l'inſtituzione della Scienza del moto concreto de' ſolidi.

ARTICOLO IV.

Conſiderazioni ſugli eſperimenti, e ſulle opinioni di alcuni Fiſici intorno alla reſiſtenza di attrito, che incontrano i ſolidi in movimento.

§. XXVIII. Tra i molti Autori, che cercarono di ſtabilire la legge della reſiſtenza di attrito, che provano i ſolidi in movimento, non ſi trova che il *Muſſchenbroechio*, il quale, dopo aver conſultato ciò ch' era ſtato detto ſull' argomento dagl' Illuſtri *Amontons*, *Leibnizio*, *Sturmio*, *Camus*, *Deſaguliers*, *Bulſingero*, *Parent*, *Belidor*, *Rovvus*, *Nollet*, ed altri, abbia tentato di por mano all' eſperienza; ed eccone

ciò che da essa concluse. " (*a*) In minoribus corporum ve-
„ locitatibus sequitur attritus utcumque rationem velocitatis,
„ non tamen accurate. Verum in majoribus velocitatibus ra-
„ tio attritus multum increscit: idque locum habet, sive cor-
„ pora, quæ supra se moventur, sicca, sive oleo uncta fue-
„ rint, quamvis in siccis id potissimum sit, quia cito quam-
„ plurimæ partes abraduntur, ab abrasis sulci in altero cor-
„ pore inciduntur, & asperantur superficies vehementer. Cum
„ enim axis in Tribometro chalybeus volvebatur in cupro
„ rubro, oleoque large ungebatur, & velocitates erant uti 4,
„ 6, 7, 8, 10; fuit attritus uti 1, $1\frac{1}{2}$, 2, 3, 4; quando
„ erant velocitates in cupro sicco $1\frac{1}{2}$, 3, 5, 7, 8; attritus
„ fuit 1, $1\frac{1}{2}$, 2, 3, 4. Cum velocitas erat maxima in his
„ experimentis sive æqualis 10, fiebant 25 revolutiones axe-
„ os *D D* (*Fig. VII.*) intra tempus 2m'', & 24m'''. Attri-
„ tus qui ponitur æqualis 1 est ad pondus motum uti 16 ad
„ 95.„Chiaro pertanto apparisce ben diversa essere la riferita legge Musschenbroechiana dalla nostra (Art. III. §. XXVIII), mentre colla prima si stabilisce, che la resistenza di attrito incontrata da un solido in movimento cresca secondo il maggior grado di velocità di cui è dotato, e colla seconda si stabilisce, che la predetta resistenza sia sempre costante e quella medesima che incontra il solido pel suo equilibrio meccanico sulla superficie per cui si muove, qualunque sia il grado di velocità con cui egli procede. Essendo pertanto ambedue l' enunciate leggi fiancheggiate dall' esperienza, qual fra esse adunque avremo a considerare come certa e vera, e quale come falsa e ripugnante? Questo è uno di que' tanti e molti esempj, che dimostrano quanto difficile sia il promuovere con certezza la Fisica de' corpi, tuttochè abbia ella a' nostri tempi scosso il giogo peripatetico, e dirigasi soltanto per la via de' fatti, e dell' esperienza. Così è, e bisogna confessarlo, che il Fisico sperimentatore non può giammai usare abbastanza di circospezione prima di affidarsi interamente alle proprie sperienze, dovendo sempre dubitare della loro certezza, finchè almeno non rimanga con tutta evidenza con-

---

(*a*) *Introductio ad Philosophiam naturalem. Tomus Primus pag.* 160 §. *DXXIII. Patavii, Typis Seminarii. MDCCLXVIII.*

vinto aver egli veramente ottenuti nelle di lui sperienze risultati unici, e direttamente appartenenti a quella causa, che ha preso di mira. Ma venendo all' esperienza Musschenbroechiana siaci permesso di esporre intorno ad essa il nostro giudizio coll' unico, ed ingenuo fine di rintracciare la verità.

§. XXIX. La macchina, denominata dall' Autore *Tribometro*, e colla quale effettuò egli la sopra citata sperienza, consiste in un cilindro *AB* (*Fig. VII.*) di legno di 4 poll. di diametro sostenuto orizzontalmente ne' due perni *D D* di $\frac{1}{4}$ poll. di diametro ad esso annestati in direzione del proprio asse. Tali perni, e così pure i sostegni, ne' quali s' inserivano, potevano cambiarsi a tenore della qualità de' solidi, che volevansi porre in cimento. Aggravando pertanto il cilindro *AB* sopra i suoi perni *D D* del peso 95, sospendendo ad esso pesi uguali *P*, *Q* come indica la figura, pose il nostro Autore nella lance *R* i pesi 1, $1\frac{1}{2}$, 2, 3, 4 successivamente uno dopo l'altro, ed osservò, che nell' attrito dell' acciajo col rame rosso, essendo cioè i perni *D D* del primo metallo, e del secondo i sostegni, ne' quali s' avvolgevano, ungendo copiosamente d' olio le superficie in isfregamento, osservò, dico, che il cilindro *AB*, nel tempo costante di 2'', 24''', faceva 10, 15, $17\frac{1}{2}$, 20, 25 rivoluzioni intorno al proprio asse, relativamente alle accennate cariche della lance *R*, dichiarando con ciò essere le velocità del cilindro in ragione de' numeri 4, 6, 7, 8, 10: e pulendo le superficie in isfregamento da qualunque untume, le rivoluzioni del cilindro erano $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, $12\frac{1}{2}$, $17\frac{1}{2}$, 20, cioè procedeva esso con velocità proporzionali a' numeri $1\frac{1}{2}$, 3, 5, 7, 8. E questi sono i risultati, su' quali si fonda la poco sopra riferita legge Musschenbroechiana, vale a dire che la resistenza di attrito incontrata da' solidi in movimento segua, nelle velocità minori, prossimamente la ragione delle medesime velocità; e che nelle velocità maggiori le resistenze sieno maggiori del bisogno per seguitare la stessa legge delle velocità, tali essendo le relazioni, che si rimarcano fra i pesi 1, $1\frac{1}{2}$, 2, 3, 4 esprimenti la resistenza dell'attrito provata da' perni *D D* (avvegnachè il raggio del cilindro *AB*, all' estremità di cui tutti agiscono, è costante), ed i numeri 10, 15, $17\frac{1}{2}$, 20, 25, ovvero $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, $12\frac{1}{2}$, $17\frac{1}{2}$, 20 indicanti

le velocità del cilindro *AB*, ed in conseguenza de' suoi perni *D D*, com' è manifesto. Supponghiamo pure sormontate in tale sperienza tutte le gravi, e penose difficoltà, che non possono schifarsi nella pratica esecuzione di essa, fra le quali certamente è d' annoverarsi quella di misurare il tempo delle rivoluzioni del cilindro *AB*, mentre è d' uopo inoltrarsi nella delicata divisione del tempo in minuti terzi; e l' altra, che nel rivolgersi il cilindro *AB* si mantengano costantemente i pesi *P Q* fra di sè in equilibrio, benchè nell' istante che uno di essi s' inalza, l' altro s' abbassa, onde non venga alterato per tale riguardo il movimento cagionato nel cilindro *AB* dal peso riposto nella lance *R*: nondimeno io dico, che da' resultati della descritta sperienza non può dedursi legittimamente la legge, che dedusse il nostro Autore. Imperocchè abbia, o non abbia luogo siffatta legge in natura, è manifesto, che essendo stati i pesi 1, $1\frac{1}{2}$, 2, 3, 4 atti a porre in movimento il cilindro *AB*, ciascuno di essi, e sempre più procedendo dal primo all' ultimo, è maggiore del bisogno per l' esatto equilibrio colle resistenze di attrito incontrate da' perni *D D*; ma poichè i pesi suddetti sono proporzionali alle loro masse o sia quantità di materia, e ciascuno di essi ne applica un' egual porzione per l'equilibrio delle resistenze accennate, i loro momenti liberi adunque non saranno proporzionali alle loro masse rispettive, ma vie più ne' pesi maggiori avranno maggior ragione; e quindi il loro movimento, riposti che sieno nella lance *R*, sarà accelerato, e vie più accelerato passando dal minimo al massimo fra essi: e siccome il movimento del cilindro *AB* dipende da quello della lance *R*, così non v' ha difficoltà ad intendersi, che con siffatta legge esso pure si muoverà intorno a' suoi perni. Non possono adunque assumersi i pesi 1, $1\frac{1}{2}$, 2, 3, 4 aggravanti la detta lance *R* come equivalenti alle resistenze di attrito incontrate da' perni *D D* nelle diverse velocità, colle quali essi congiuntamente al cilindro *AB* si raggiravano intorno al proprio asse, salvo già il dovuto riguardo delle distanze dal comun centro di moto. Un Comentatore però della Fisica Musschenbroechiana, per non incontrare forse il da noi esposto obbietto, crede potersi assumere le rivoluzioni del cilindro Tribometro come equabili in sè stesse, e fra di sè, atteso il breve tem-

po, in cui si compiscono; ma secondo me non è questo un esperimento, in cui sieno lecite siffatte supposizioni; avvegnachè sia quanto si voglia breve il tempo impiegato dal cilindro nelle sue rivoluzioni, la differenza di tempo dall' una all' altra di esse non diventa trascurabile in sè stessa, nè può assolutamente considerarsi, neppure in senso fisico, per quantità infinitesima. Non v' ha esperienze in Fisica, che ricerchino maggiore esattezza e precisione di quelle, nelle quali v' abbia il moto per uno de' suoi elementi: l' introduzione di minima forza, o circostanza straniera al soggetto può apportare differenze ne' risultati di somma rilevanza. L' uso, e la pratica di esperimentare da per me stesso mi addottrinarono di tante avvertenze importantissime, che sorprendere sarebbero quelli, che lontani dal discendere al fatto materiale, si pongono in calma coll' affidarsi o alla propria immaginazione, o all' autorità degli altri. Per tentare con qualche buon successo l' esperimento del nostro Autore, sarebbe d' uopo non già d' una macchina da Gabinetto Fisico, ma che fosse di considerabile altezza onde poter osservare se dopo il movimento accelerato de' pesi aggravanti la lance *R*, succede l' equabile, e poter così con certezza determinare, che nel tal grado di velocità uniforme incontrano i perni *D D* la resistenza di attrito assegnata da' detti pesi. Senza però fermarsi d' avvantaggio sulle difficoltà inevitabili, che porta seco cotale esperimento, sarà qui opportunamente riferito il giudizio, che lo stesso Autore, nel luogo sopraccitato, teneva de' risultati della propria sperienza, giudizio che certamente l' onora, e ne forma il di lui elogio, dando a divedere egli medesimo chiaramente, ch' era ne' suoi studj condotto dal solo amore della verità, e che non lasciavasi sedurre da quello, che pur troppo gli uomini affettano per le proprie asserzioni con danno e pregiudizio delle scienze: ed ecco com' egli si esprime". In hisce experimentis tamen mihi non plane satisfeci: quo tempore capiebam, fere nihil innotuerat
„ Philosophis de Mechanica Motus, quæ omnino hic est con-
„ sideranda: præterea error facile committitur in via per-
„ cursa, quando prærapida velocitate corpus movetur, tum
„ in potentia movente, quæ vel est elater magni horologii
„ tabularii, vel pondus descendens & volubile, sed motum in

„ curva Tautochrona. Vix in hac senectute mihi vires superfuturas sperare licet, ut hæc omnia denuo ad incudem „ revocem, potius alios Philosophos adhortor, ut hæc, quæ „ magni in Mechanica sunt usus, liment, emendentque „.

§. XXX. La legge, che parve al *Musschenbroechio* poter stabilire da' risultati della sua sperienza superiormente rapportata (§. XXVIII.) venne sostenuta, salve certe modificazioni come vedremo, da più e più Fisici ancora, ragionando del seguente tenore. (*a*) " Supponiamo, dicon eglino, che *DE*, „ ed *FG* (*Fig. VIII.*) rappresentino due superficie di corpi „ duri, le cui ineguaglianze insensibili sieno inserite le une „ nelle altre; la pressione, che le unisce, operi nella dire„ zione *AB* perpendicolare a quella del moto, il quale fa „ sdrucciolare questi due corpi l' un sopra l' altro. Già si ve„ de, che il corpo, ch' è di sopra, non può muoversi secon„ do la direzione *BC*, se le sue parti più elevate *e*, *f*, *g*, *h* „ non si sviluppano dalle cavità, nelle quali sono affondate; „ il che non si può fare, se non a misura, che il corpo in„ tero *DE* solleverassi contro lo sforzo della pressione. Se „ questa pressione è tanta, che faccia ricadere coteste parti „ ingaggiate nelle cavità, che immediatamente susseguono a „ quelle, che hanno lasciate; vale a dire, che la parte *e* u„ scendo dalla prima cavità ricada nella seconda, nella ter„ za ecc. è visibile, che lo sforzo, che sarà mestieri di fare „ per sollevare il corpo *DE*, o (il che è la stessa cosa) per „ disgiugnere, e disgomberare le parti, tante volte si ripete„ rà, quante di queste picciole elevazioni ci sono nella su„ perficie *FG*; e quanto più procederà nel suo cammino in „ un dato tempo il corpo sfregante sopra quello, al quale „ è applicato, tanto più avran luogo questi sollevamenti, e „ queste ricadute: così la resistenza degli sfregamenti cresce „ per la velocità, fino a tanto che questa velocità non im„ pedisce, che le parti alte d'una superficie s'annicchino suc„ cessivamente in tutte le parti basse dell' altra, nel modo „ che abbiamo esposto „. Soggiungendo inoltre gli stessi Autori: " Ma può accadere, che il moto, che si fa secondo „ la direzione *BC*, sia sì rapido, che quando le parti spor„ genti *e*, *f*, *g*, *h* sono state disimpedite, sieno trascinate da

„ una

(*a*) *Nollet*. Fisica Sperimentale. Tom. I.

„ una considerabile quantità, avanti che la pressione le impedisca, o ingombri di nuovo; che la parte *e*, per esempio, avendo lasciata la prima cavità della superficie *FG*, in luogo di ricadere nella seconda, sia trasportata sino alla terza, o sino alla quarta; ed allora si concepisce facilmente, che il corpo sfregante *DE* potrà trascorrere due, ovvero tre volte altrettanto di superficie sopra *FG*, senza che le sue parti vi sieno più frequentemente intricate „. E quanto alla prima parte di tale discorso convengo io pure, che quanto maggiore sarà lo spazio percorso dal solido sfregante in un dato tempo, tanto maggiore sarà il numero degli ostacoli da esso incontrati, e conseguentemente degli sforzi, che contro il proprio peso avrà esercitato per sormontarli (parlando già di un corpo, che si muova sopra un piano orizzontale, nel qual caso la pressione è lo stesso peso del corpo sfregante); ma non so poi comprendere come da questa considerazione possa inferirsi la legge, che la resistenza di attrito incontrata da' corpi in movimento cresca col crescere la velocità in essi: imperocchè è vero, che lo stesso corpo percorrerà in un dato tempo maggiore spazio, secondo che sarà dotato di un maggior grado di velocità, e che però la somma degli ostacoli sormontati sarà eziandio maggiore nella velocità maggiore, ma non perciò può stabilirsi la mentovata legge, avvegnachè bisognerebbe dimostrare per la di lei sussistenza, che il corpo sfregante incontrasse maggior resistenza nel superare d' istante in istante gli ostacoli che incontra, di quella che incontrerebbe pure d'istante in istante procedendo esso con velocità minore. Dimostrata ripugnante, e di niun valore la prima parte del riferito ragionamento, cade pure da per sè la seconda parte di esso: nulladimeno non passeremo sotto silenzio una riflessione, che sola può bastare a farci anche di questa conoscere evidentemente la fallacia. E' principio incontrastabile, che un corpo s' aggrava contro il piano che lo sostiene con quell' intero sforzo, o pressione, che esercita come nello stato di quiete, così anche in quello di moto, qualunque sia il grado di velocità, con cui proceda: cosicchè, prendendo il caso del piano orizzontale, il solido sfregante preme ugualmente contro il piano soggetto con tutto il suo peso, sia egli in quiete, oppure in

movimento, sì tardo, che veloce quanto mai; colla sola differenza, che se in istato di quiete continua a perpetuamente premere il piano soggetto in quello stesso luogo, in cui si trova collocato, in istato di moto la pressione medesima esercitasi successivamente per tutti i luoghi, per li quali va passando nello scorrere per lo piano soggetto. Che se così è la cosa, non è ella forse un'idea chimerica il concepire, che possa muoversi con tal velocità il corpo sfregante, sì che le scabrosità sciolte una volta, sostenganssi disimpegnate per un considerabile spazio, prima che s' avviluppino nuovamente? Imperciocchè se l'innestamento delle scabrosità del corpo sfregante in quelle della superficie, per cui trascorre, nasce dalla pressione, con cui contro di essa si aggrava; ne segue pel principio mentovato, che qualunque sia la velocità del corpo sfregante, succederanno uno dopo l' altro, e senza interruzione nuovi innestamenti ai primi sviluppi delle dette scabrosità, e quindi la resistenza incontrata da esso corpo, considerata in ciascun punto dello spazio che percorre, sarà sempre la medesima, e indipendente affatto dal maggiore, o minor grado di velocità, di cui fosse affetto. Il vedere che oltre alle esposte sentenze ed opinioni tenute da' Fisici sulla resistenza degli attriti de' solidi in movimento, ve n' ebbe anche qualcuno, il quale allontanandosi dall'opinion più universale, mise in campo, che la predetta resistenza dovesse seguire non già la semplice, ma la duplicata ragione della velocità, di cui è dotato il solido sfregante, mi fece entrare in sospetto, che da tali Autori considerata fosse la resistenza degli attriti de' solidi di natura analoga a quella, che i medesimi solidi incontrano nello scorrere per entro i mezzi come l'aria, l'acqua ecc., e che quindi lasciandosi per dir così da una prevenzione trasportare, ragioni cercarono, ed argomenti, onde comprovare, che la prima delle accennate resistenze, a simiglianza della seconda, seguir dovesse una qualche ragione della velocità, secondo cui è mosso il corpo sfregante: ma quanto la cosa proceda diversamente lo faremo ora considerare. Qualora un solido si muove in un mezzo fluido ne caccia le molecule, che d' innanzi gli stanno, comunicando ad esse un movimento, il quale passa, e si diffonde a grado a grado per la massa fluida, venendo nello stes-

so istante riempiuto dallo stesso fluido il vuoto, che il corpo dietro sè lascia seguendo il suo cammino; ma per li principj dinamici, il solido urtante nel comunicare movimento al fluido ambiente dee perderne del suo proprio, e perderne maggior quantità, se maggiore sarà la massa fluida, in uno stesso tempo, posta in movimento. Chiaro adunque apparisce, che quella, che noi diciamo resistenza di mezzo, propriamente consiste nella quantità di moto, che il solido dentro di esso scorrendo comunica, e trasfonde con perdita, e consumo del proprio; e che siccome movendosi il solido con maggior velocità maggiore quantità di fluido dee mettere in movimento nello stesso tempo, così tale resistenza dee dipendere ed aver per norma essenziale, in parità di circostanze, la velocità di cui è fornito il solido, derivandone poi la legge dalla fluidità, dalla densità, dall' elasticità, ed in una parola dalla natura stessa del fluido ambiente. Che se per un altro canto si muova l' enunziato solido sopra un piano orizzontale, facendo astrazione da qualunque mezzo ambiente, sappiamo che in tal caso non può egli procedere pel suo cammino, se di mano in mano non si sviluppino, e disinnestino le di lui scabrosità da quelle della superficie, sopra cui si muove; il che succede esercitando il solido uno sforzo contro il proprio peso, al quale sforzo appunto noi applichiamo il nome di resistenza di attrito. Ora manifestamente si conosce l' indole ben diversa tra la resistenza de' mezzi, e quella degli attriti, mentre la prima deriva da una comunicazione di moto, che il solido in movimento trasfonde nel fluido ambiente, e la seconda da uno sforzo, che il solido sfregante esercita contro il suo peso; e si arguisce inoltre dalla svolta natura di tali resistenze, che siccome la prima dee necessariamente procedere secondo una qualche legge della velocità impressa al solido in movimento; così la seconda ne va affatto esente, e perciò non ha essa a variare di valore per conto della velocità con cui si trasferisce il solido sfregante. Ma qui cade finalmente in acconcio di far vedere come la legge da noi stabilita per la resistenza degli attriti de' solidi in movimento (Art. III. §. XXVII.), e dedotta dall' esperienza, si confermi anche con un ragionamento, che ci sembra quanto può desiderarsi fortemente appoggiato alla natura del soggetto medesi-

mo. Egli è un fatto innegabile, che un ſolido ſimile a queſli, che abbiamo uſati nelle noſtre ſperienze, eſercita coſtantemente lo ſteſſo sforzo, e renitenza a diſporſi in iſtato di equilibrio meccanico ſopra una tavola orizzontale di uniforme ſcabroſità, cioè ridotta ad un egual grado di ſorbitezza al giudizio de' ſenſi, venga egli riposto in qual luogo più piaccia ſu d' una medeſima direzione, a quella guiſa che lo ſteſſo ſolido non laſcierebbe di premere con tutto il ſuo peſo ſopra un piano orizzontale, che ſi muoveſſe pure per linea verticale o in ſu, o in giù verſo il centro de' gravi. Poſto ciò ne conſegue immediatamente, e con evidenza matematica, che il predetto ſolido, movendoſi ſulla tavola orizzontale, abbia ad avere ſucceſſivamente per forza ritardatrice quello ſteſſo sforzo, che eſercita per diſporſi in iſtato di equilibrio meccanico in ciaſcun luogo della direzione, ſecondo cui ſi trasferiſce; naſcendo quindi la legge, che la reſiſtenza degli attriti de' ſolidi in movimento ſia quella medeſima, ch' eſſi incontrano pel loro equilibrio meccanico ſopra quella ſuperficie, per cui ſcorrono, ma operante contro il loro movimento in via di coſtante forza ritardatrice, come abbiamo concluſo dall' eſperienza.

§. XXXI. Dalle coſe eſpoſte nel preſente Articolo ſi rileva in quanta oſcurità, e confuſione ſi trovava avvolto il ſoggetto, così importante nella ſcienza del moto concreto de' corpi, e generalmente in tutta la Fiſica, che abbiamo ora noi tentato di ponere in chiaro lume coll' appoggio non ſolo dell' eſperienza, ma eziandio di ragionamenti ſeveri a quel grado, che può permettere la natura del ſoggetto medeſimo. E per dire il vero ſtabilendo alcuni, che la reſiſtenza degli attriti de' ſolidi in movimento ſeguitaſſe ne' peſi minori la ragione della velocità, e ne' peſi maggiori creſceſſe alquanto ſopra tale ragione; volendo altri, che la detta reſiſtenza doveſſe procedere in ragione delle velocità ne' movimenti mediocri, dovendoſi poi diminuire nelle grandi velocità; e finalmente altri pretendendo che ſiffatta reſiſtenza ſeguir doveſſe la duplicata ragione della velocità del corpo sfregante; dovea tanta, e così varia diſcrepanza di leggi tenerci in diſfidenza, e farci anche ſoſpettare, che il ſoggetto non veniſſe preſo, e conſiderato nella ſua propria, e naturale coſtitu-

zione ; il che appunto venne dimoſtrato dalle noſtre indagini , mentre la nuova legge , che abbiamo ſcoperta, non ha affinità , nè analogia alcuna colle già enunziate . Io mi rimetto però ben volentieri al giudizio de' dotti per que' progreſſi, ch'io mi luſingo di aver fatto ſu tale argomento, eſſendo intimamente perſuaſo della difficoltà ſomma di ſtabilire con certezza una legge , un canone , nella Fiſica de' corpi. Ragionano poi con molta leggerezza coloro, i quali ſi sforzano di dar ad intendere, che atteſa la varietà della teſſitura ſuperficiale de' ſolidi, e la moltiplicità degli accidenti, che poſſono concorrere in fatto, di poca utilità, ed anche, come eſſi dicono, di veruna certezza ſieno le leggi, che ſi cercano di ſtabilire ſulla materia, che abbiamo per le mani, o in altre materie analoghe nella Fiſica de' corpi . Se in tal guiſa ragionaſſe il volgo ſoltanto , non vi ſarebbe niente a meravigliarſi; ma il male ſi è, che uomini inſigni per ogni riguardo ſi ſieno così eſpreſſi pubblicamente nelle opere loro, che non crediamo neceſſario di qui citare; e niente meno m' è accaduto di ſentire dalla viva voce di alcuni , forniti per altro di dottrina , e di ſapere , co' quali ho avuta occaſione di parlare più e più volte ſul propoſito. Rivolgendo pertanto il penſiero ſul noſtro argomento, io ragiono così. Sia pure quanto ſi voglia varia la teſſitura ſuperficiale de' ſolidi, ciò non dee recare imbarazzo al Fiſico ſperimentatore d' indagare la legge delle reſiſtenze degli attriti, qualora ha egli l' avvertenza di ſperimentare coſtantemente colla ſteſſa maniera di ſolidi ridotti per quanto può apparire a' ſenſi in parità di circoſtanze, nè può egli, così operando , in veruna maniera dubitare, che la legge manifeſtatagli dalla ſerie de' riſultati, che avrà ottenuto , non ſia deſſa preciſamente quella, che a ſiffatta natura di reſiſtenze appartenga . Siccome poi le teſſiture ſuperficiali de' ſolidi , oltre di eſſere varie per la diverſa natura loro, lo poſſono eſſere anche in riguardo ad una maggiore, o minor forbitezza; così la legge dedotta dee riguardarſi come una legge aſtratta, la qual facilmente può nullameno condurſi al concreto, mediante un particolare eſperimento ſul ſolido, intorno a cui debba accaderne l' applicazione, ricercando, che così eſattamente ſi dee chiamare, il termine di paragone: in ſomma inveſtigata la leg-

ge, come s' è ſpiegato, pel di lei uſo, non occorre che conoſcere in un dato caſo la quantità aſſoluta della reſiſtenza di attrito, di cui è capace la qualità, e coſtituzione ſuperficiale di que' ſolidi, ſopra i quali verſar ſi doveſſe. E quanto all' eſattezza e preciſione dei riſultati, che poſſiamo ſperare nell' applicazione di tali leggi, non v' ha dubbio primieramente, che quanto più diligenza ed attenzione verrà preſtata da chi le maneggia, potrà anche aver egli la compiacenza di vedere vie più verificati nella pratica eſecuzione delle proprie idee quegli effetti, che gli verranno antecedentemente indicati, e promeſſi dal calcolo; dico poi in ſecondo luogo, che moſtrerebbero del pari poca conoſcenza della Fiſica de' corpi, tanto chi prendeſſe l' aſſunto di ſtabilire regole, e canoni tali, che ſomminiſtrar doveſſero nell' applicazione pratica riſultati di preciſione matematica, quanto chi diſperando un tal eſito giudicaſſe perciò di poca utilità quelle leggi e regole, che atte foſſero a indicare riſultati proſſimi al vero, come poſſiamo luſingarci di ottenere nel preſente fiſico argomento. Ed in fatti non è da ſupporſi nemmeno, che ſiavi alcuno, il quale abbia a contare coſa di lieve importanza il poter prevedere, che, a cagion d' eſempio, un ſolido projetto ſopra un piano orizzontale con un dato grado di velocità, perderà egli il ſuo movimento, e ridurraſſi alla quiete dopo aver percorſo un tale determinato ſpazio, benchè paſſando al fatto, ciò ſuccedeſſe con qualche differenza o in più, o in meno, mentre per la legge aſtratta l' enunciato ſolido dovrebbe procedere, poſto il piano in tutti i ſuoi punti egualmente diſtante dal centro de' gravi, col grado di velocità impreſſogli di moto uniforme all' infinito.

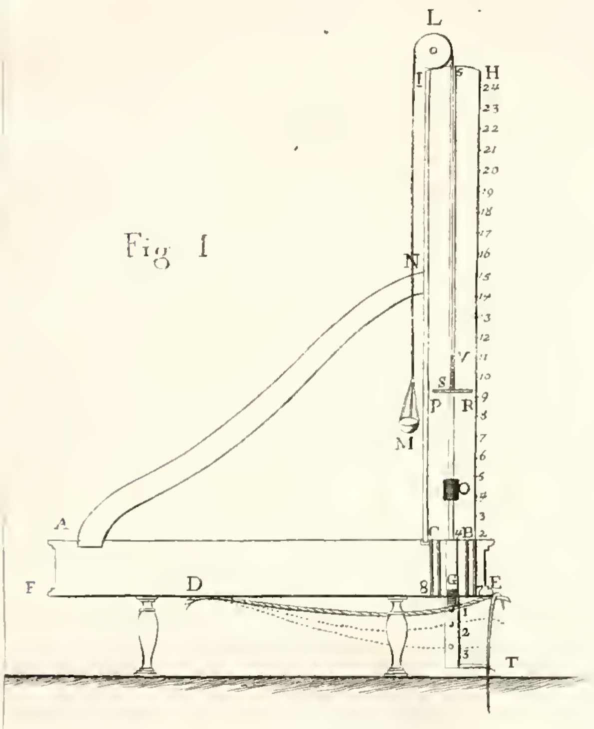


Fig I

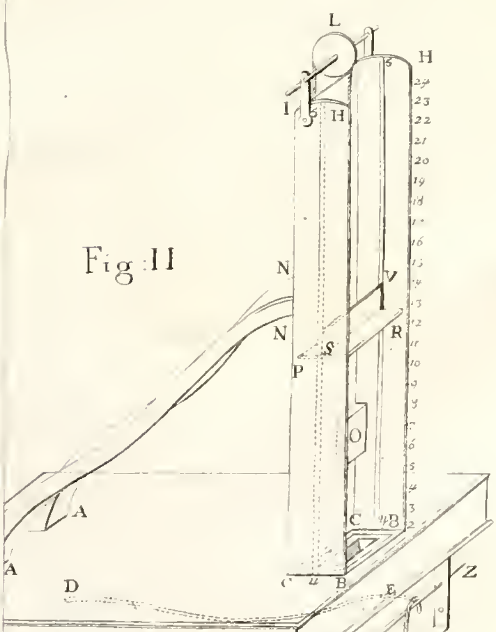


Fig :II

d
az
ee co
tuttor
per ch
sterità
maturc

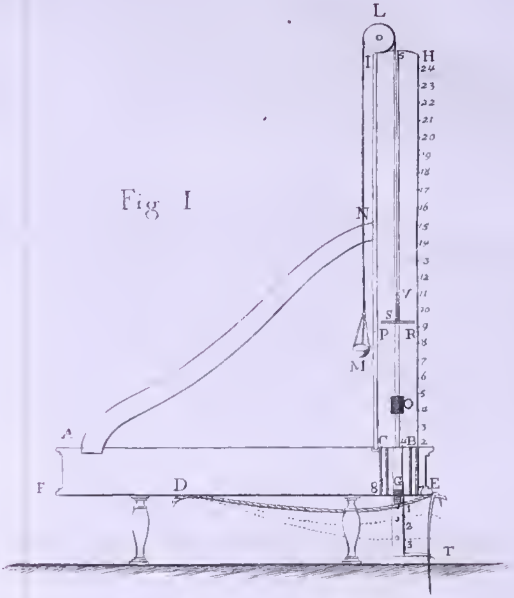


Fig I

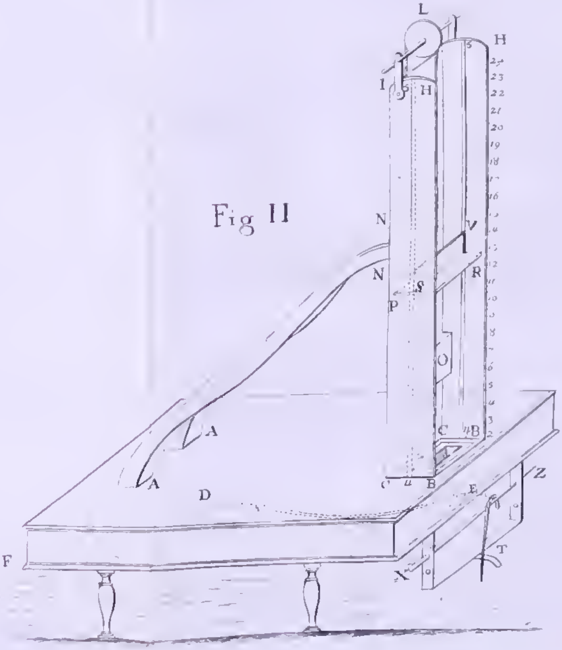
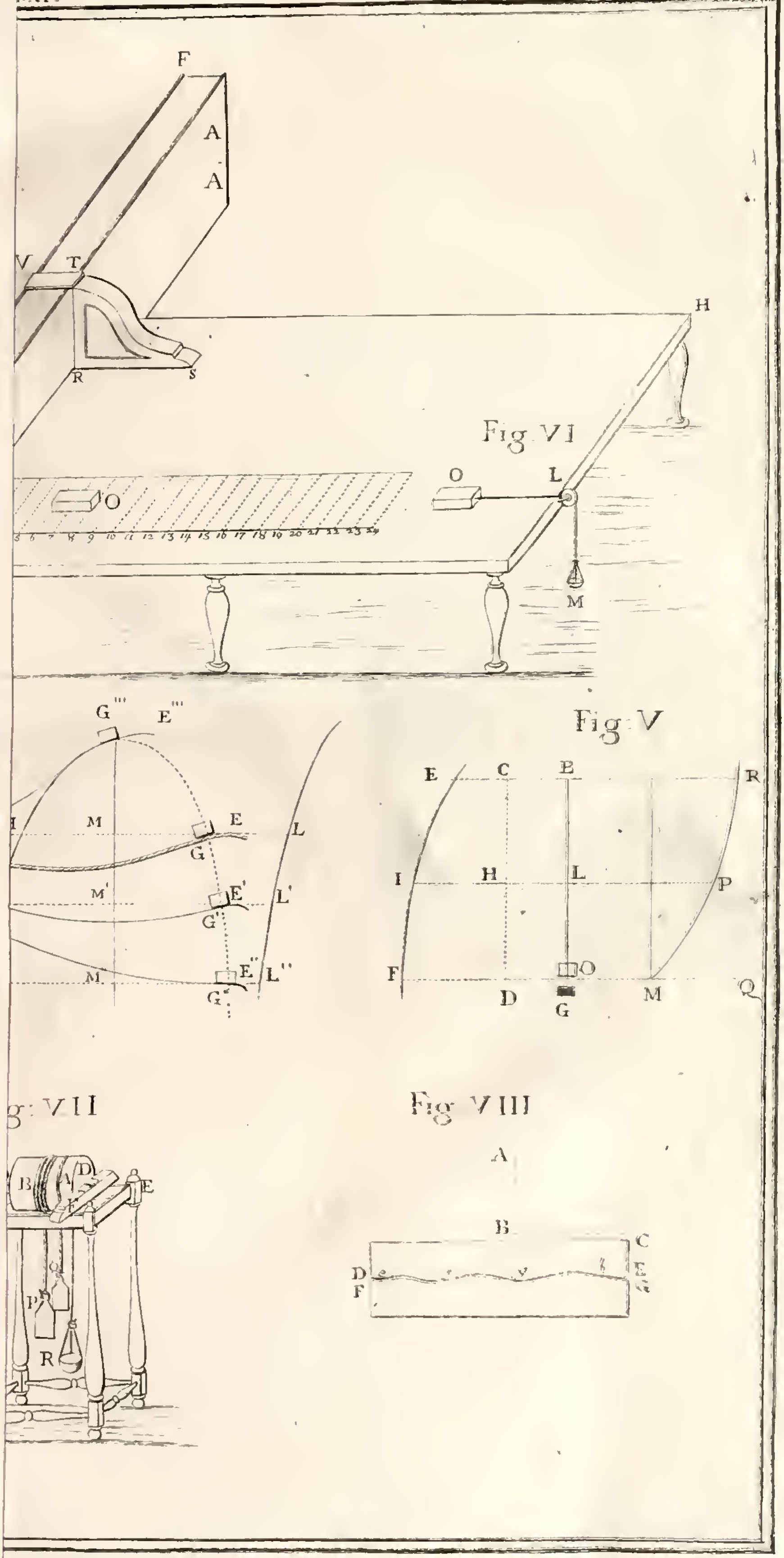


Fig II



a
. az
ee co
tuttor
per ch
fterità
maturo

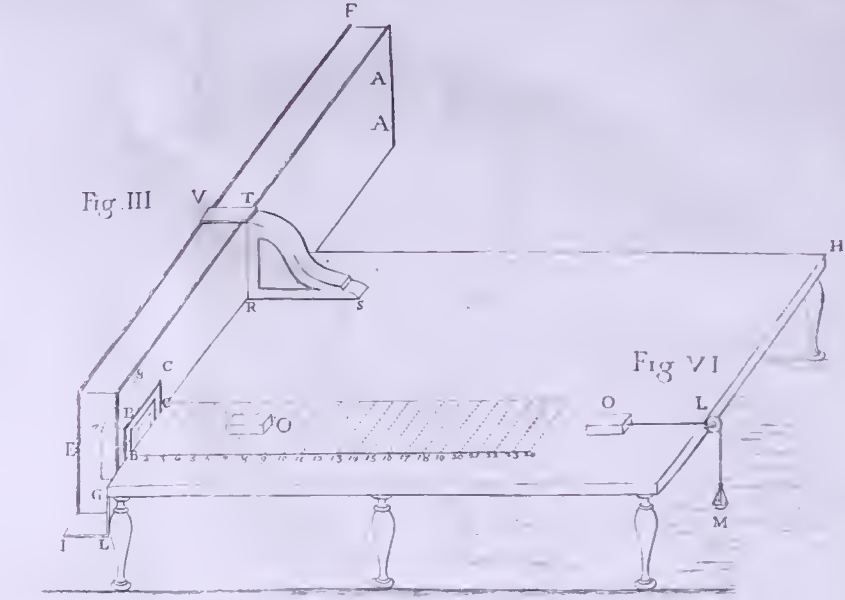


Fig IV

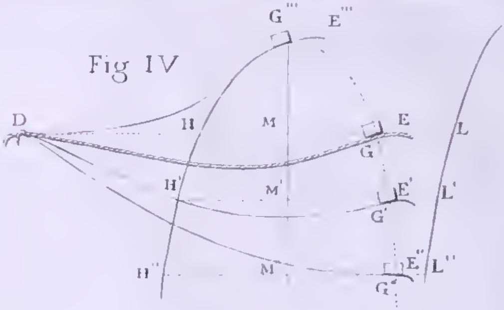


Fig V

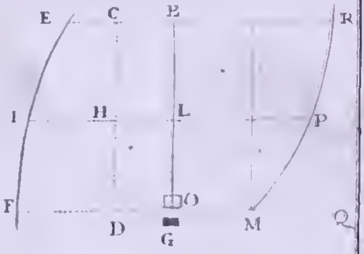


Fig VII

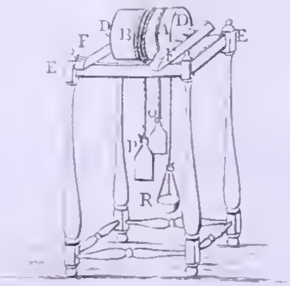
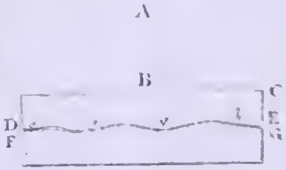


Fig VIII



RICERCHE

INTORNO ALL' ORIGINE DEL NATRO O ALCALI MARINO NATIVO.

Del Sig. Cavaliere Lorgna.

Tra le cause, che concorrono più in un tempo che in un altro ad accelerare o ritardare l'avanzamento delle scienze, e dell' arti, non è l' ultima per avventura il costume dominante del secolo. La tendenza naturale degli uomini a imitarsi scambievolmente tien vivo un certo secreto dilicatissimo consenso, per cui la scuola del maggior numero diventa a poco a poco la scuola di tutti, ove ciascun si modella senza avvedersene, e va impercettibilmente uniformandosi all' esempio, all' opinione, all' autorità de' suoi tempi. Quindi il languore negli studj in un secolo guerresco, il fervore in un altro dedito alle lettere, il variar perpetuo delle umane sollecitudini al variar successivo delle istituzioni, e consuetudini predominanti. Qual meraviglia pertanto se innumerabili oggetti non men utili, che dilettevoli sieno rimasti fino a' dì nostri inosservati, se ne' passati tempi non abbiano fatto le umane cognizioni progressi pari a' nostri sì rapidamente, se oggidì pulluli novità da ogni canto? Chi non ravvisa in ciò l' opera, la scuola del secolo dedito all' esperimentare, al far osservazione e cimento su tutto? E' vero, che in tutto ciò ch' è fatto non è dileguata ogn' incertezza, che moltissime verità son tuttavia isolate e sconnesse, che un gran numero d' illazioni non ha bastevole fondamento, che moltissime osservazioni sembrano in opposizione tra di sè. Ma non altro dee conchiudersi da questo, se non che resta molto e molto tuttora da farsi. Un edificio non è comunemente destinato per chi non sa che adunar materiali per fabbricarlo. La posterità e ben tarda corrà il frutto delle nostre cure, oggi immaturo, e a' viventi basti intanto il dolce presentimento de'

plausi che verran fatti un dì a' nomi superstiti degli uomini benefattori. Non è però senza esempio nel secolo l' essersi fatte or in una or in altra parte della Fisica osservazioni capitali e feconde, onde abbiamo prevenuto i posteri nel trarne amplissimi vantaggi con rapida e felice anticipazione. Me fortunato se quelle che sto qui per esporre sieno di questa classe, e vagliano a spargere luce su moltissimi oggetti della Terra che abitiamo involti ancora in una densissima caligine.

Nozioni generali intorno al Natro, o Alcali-base del Sal marino.

I.

Natro, fatta nostrale la voce greca *νάτρον*, è quell' alcali fisso base del sal marino, altramente detto alcali minerale ed anche muriatico, che si trae per lisciva dalle ceneri semifuse e sodate delle piante marittime, e per ciò prende il nome di sal di Soda. Gli usi importantissimi, a cui questo sale supplisce a' dì nostri, l' hanno fatto oggetto di momento non lieve, e argomento di seria indagine pe' Fisici da gran tempo. Gli antichi il conoscevano al par di noi, ma non ne avevano idee tanto distinte, come noi abbiamo, per non confonderlo e col nitro, e coll' alcali vegetale, che si ricava dalle ceneri delle piante terrestri. Il bisogno dell' arti non rendeva per avventura più l' uno che l' altro di questi sali, come oggidì, necessario e prezioso separatamente. Sapevano per altro render caustico il natro con la calce, *adulteratur in Ægypto calce. Deprehenditur gustu; sincerum enim facile resolvitur, adulteratum pungit* (Plin. nel Cap. X. del Lib. XXXI.). Conoscevano l' azione di quest' alcali su la cera, *Cera punica fit hoc modo: ventilatur sub dio sæpius cera fulva: deinde fervet in aqua marina ex alto petita, addito nitro* ecc. (Plin. Lib. XXI. Cap. XIV.). Sopra di che in un Opuscolo stampato poco avanti in Verona ho osservato per avventura il primo, che questa cera privilegiata per la pittura, e per la medicina, come la decanta *Plinio*, non poteva essere una cera puramente imbiancata, che non avrebbe potuto nè farsi arrendevole

rendevole mescolata co' colori per dipingere, nè oltre le prime vie penetrare, ed insinuarsi nel corpo umano. E che però essendo da *Plinio* sempre indifferentemente detto nitro anche il natro, dimostrato tale da' suoi evidentissimi caratteri, ben distinti da quelli del nitro propriamente detto, il caso era questo più ch' altri mai in cui andava inteso per un natro, per un vero alcali marino, il nitro adoperato nella composizione della cera punica. Quindi la cera punica diveniva necessariamente un sapone di cera agli usi della pittura, e della medicina adattissimo, come le mie sperienze prime, e le altrui fatte successivamente il comprovano, senza che qui ne faccia parola ulteriormente. Ma non ignoravano nè pure la composizione de' saponi direttamente combinando un alcali con qualche sostanza oleosa concreta *prodest & sapo; Gallorum hoc inventum est rutilandis capillis. Fit ex sebo & cinere. Optimus fagino & caprino; duobus modis spissus & liquidus* (Plin. Lib. XXVIII. Cap. XII.).

II.

Fioriva abbondantemente spontaneo il natro ne' contorni de' laghi del basso Egitto, nella Nubbia, nelle pianure della Persia, nell' India, nel Tranquebar, nella Siria, nell' Assiria, e in moltissime parti dell' Asia minore, ed ora il trovavano gli antichi libero, or mescolato col sal marino. Se ne raccoglie pur oggidì in quelle regioni, e nelle vicinanze di Tripoli, come pure in Efeso, e a Smirne. Ve n'ha nell' Ungheria, nella Siberia, intorno al mar Caspio, e in moltissime altre parti dell' Impero Russo. E non lascia pure di manifestarsi tuttodì qua e là per l' Europa or involto in sostanze vulcaniche, or in efflorescenza su materie calcaree, e per fin nell' acque minerali se ne trova disciolto non di rado. Non saprei però dire se oltre allo spontaneo e nativo conoscessero distintamente gli antichi quello che or ricaviamo dalle ceneri delle piante marittime familiarmente. Per verità fa menzione *Plinio* nel Cap. X. del Lib. XXXI. del sale, che si trae dalla combustione della quercia. Ma non è poi questo, che un alcali vegetale, come il mentovato qui sopra pe' saponi inventati da' Galli. Per la qual cosa la combustione

delle piante marittime ſegnatamente per trarne il natro libero ſembra eſſere lavoro de' noſtri dì al più confuſamente dagli antichi conoſciuto. Non avevano però alcun lume, che il ſal marino, ſale prezioſo, e forſe più d' ogni altro benefico, di cui la terra e il mare abbondano ſenza miſura, aveſſe per baſe il natro combinato intimamente e compiutamente con un acido particolare; ed erano molto meno in grado di ſapere, che poteſſe e queſt' unione romperſi, e, decompoſto il ſal comune, ottenerſi il natro libero per queſta via.

III.

Ma un alcali sì copioſamente diffuſo ne' regni di natura e libero, e combinato, onde mai può trarre origine e principio? E' d' uopo credere, che l' alto ſilenzio di tutti i Fiſici ſu queſto argomento non d' altronde ſia provenuto, che dal non eſſerſi giammai manifeſtata loro da vicino la generazione di queſto ſale, perchè aveſſero campo di corre ſul fatto, per così dire, il ſegreto operare della natura. V' ebbe chi ſoſpettò, che apparteneſſe in origine al regno vegetabile; ma il fatto e l' eſperienza, come il vedremo nel decorſo di queſta Memoria, hanno da molto tempo convinto i Fiſici, che queſt' alcali è totalmente ſtraniero alle piante da cui il ricaviamo per combuſtione, non mai eſſenziale di loro, ſiccom' è il vegetale. Per la qual coſa intorno all' origine di lui non ſiamo punto avanzati in cognizione più degli antichi, eſſendo ella a' tempi noſtri niente men oſcura di quel che ſia ſtata in tutti i ſecoli paſſati. Ed ecco donde ſiamo per muovere con le ricerche preſenti. Sciolto un nodo capitale nella Fiſica, tutte ſi ſvincolano le fila che vi mettevano capo d' ogn' intorno. Scoperta la ſede nativa del natro, ſi fa paleſe a un tempo e l' aver ivi pur ſede la magneſia, e il differire l' un dall' altra più nello ſtato ſalino, che nella ſoſtanza elementare. Queſte prime cognizioni ad altre fanno ſtrada e lume ſucceſſivamente sì intorno al trovarſi comunemente accoppiata all' alcali marino la magneſia, che all' eſſere coſtantemente l' uno e l' altra con uno ſteſſo acido in combinazione ne' ſali marini, e all' annidarſi di loro nelle piante marittime, e al manifeſtarſi ne' letti abbandona-

ti dal mare in tante parti della terra. E più addentro internandosi molte oscurità prendono in oltre a schiararsi intorno alla costituzione del mare. La formazione e congerie di tanto sale marino nel mare e sotterra non è più sì misteriosa, riconosciuto che sia ove hanno sede i principj prossimi di lui. Così della salsedine può dirsi del mare, che a quel sale, e alla di lui produzione e riproduzione si attiene radicalmente. Ma non lascia di tralucere a un tempo l' intima causa del fosforeggiamento del mare, e di farsi chiara la ragione d' altri fenomeni moltissimi tra via. Ma venghiamo al fatto.

Del Natro nativo.

IV.

Accade sovente, che gli uomini s' aggirino lungo tempo intorno ad un oggetto, senza che lor venga fatto di conoscerlo a fondo, finchè non isquarcia il velo un' osservazione fortunata, e per lo più accidentale. Così vedremo per appunto essere in questo caso intravenuto, di che non è inutile il far parola, affinchè la parte che v' ebbe l' accidente non vada con quella indistintamente confusa, che alla riflessione dee attribuirsi.

Nel passare dinanzi ad un sotterraneo delle Fortificazioni di Verona nel 1782 osservai ne' fianchi della volta sì carico di fioritura salina un mattone, che mi prese voglia di raccorne, siccome feci sul fatto. Ne presi un poco sulla lingua, e mi sorprese il sentirvi oltre alla freschezza una particolare acredine, ed un ritorno sì disgustosamente urinoso, che ne liberai la lingua prestamente. Parvemi di riconoscervi tutti i caratteri di un alcali ben puro distintamente. In fatti cimentatolo alla mia abitazione su le brace ardenti replicatamente non fece che gonfiarsi e bollire; e discioltane un' altra porzione nell' acqua, filtrata la dissoluzione, e fattala svaporare a secchezza, versai sul sale poche stille d' acqua per la cristallizzazione. Questo sale cristallizzato sugli orli del piattello pareva squamoso, ma nel mezzo affettavano i cristalli una figura al senso prismatica quadrangolare, e di acquea trasparenza. Lasciatolo all' aria prese tutto a sco-

lorarsi, e i cristalli divennero bianchi come neve, spugnosi, e leggeri, e finalmente si convertirono in finissima farina. Su d' un' altra porzione versai un po d' aceto distillato, con cui fece viva effervescenza, e si cristallizzò poscia perfettamente. Ma su questo sale acetoso torneremo qui appresso. Conchiusi pertanto da questi saggi, che aveva in potere un sal alcali, cui le prime apparenze denunziavano per l' alcali fisso minerale al sapore, alla figura de' cristalli, allo sfarinarsi, perduta l' acqua di cristallizzazione, e che dando presa all' acido vegetale, non pareva con altro acido combinato fuorchè coll' aereo, come l' effervescenza il manifestava. Ecco quello che ad un' accidentale osservazione è dovuto.

V.

Da quel momento non ho più perduto d' occhio nè quel sotterraneo, nè altri di quelle Fortificazioni. Trovava qualche volta di queste fioriture, che contenevano mescolato del nitro. Ma vedeva vicina la causa di quella nitrificazione negli escrementi animali, che giacevano a piè de' muri, da' quali esaltandosi nella putrefazione le emanazioni volatili, il gaz della putrefazione, se così vuol dirsi, egli si elaborava nelle calci dell' incamiciatura generando un nitro. Ed è cosa da notarsi, che il più di questo nitro aveva una figura romboidale, e per base l' alcali predominante in quelle fioriture. Prima pertanto d' inoltrarmi in ricerche volli accertarmi dell' indole di quest' alcali, e conoscerla perfettamente. Nel castello di S. Felice particolarmente il trovai abbondantissimo in un sotterraneo, ove era mestieri introdursi col lume, freddo ed umido, e il raccoglieva purissimo ammonticchiato a piè de' muri, che sostenevano la volta, a guisa di neve bianchissima accollata. Queste sono le sperienze, che ne ho fatto, messi da parte i cimenti di pura indicazione per mezzo de' noti reattivi.

I. Ho precipitato con questo sale e la terra dell' allume, e il metallo di molti sali metallici.

II. Decantato il liquore dietro alla precipitazione della terra alluminosa, il filtrai, e concentratolo a dolce foco l' abbandonai alla cristallizzazione. N' ebbi un sale in prismi al-

lungati e ſtriati , traſparente , amaro , che sfarinava prontamente perdendo l' acqua , e cui non ebbi difficoltà di riconoſcere per un deciſo ſale di Glauber.

III. Ma ottenni lo ſteſſo ſal mirabile dall' immediata combinazione dell' acido vitriuolico libero con queſt' alcali . Il combinai poſcia cogli acidi marino e nitroſo , ed ho conſeguito un perſetto ſal marino, ed un nitro quadrangolare, il quale fulminava con attività e vivezza.

IV. Meſcolato queſt' alcali con rena, e in un crogiuolo chiuſo ſottopoſto il meſcuglio per quattro ore ad un foco viviſſimo, ſi fuſe e vetrificò, e reſtonne intaccato il crogiuolo medeſimo d' ogn' intorno.

V. Con olio di uliva ne compoſi un ottimo ſapone. E come ne aveva in abbondanza, e poteva raccoglierne a talento, così ho più volte ripetuto queſte ſperienze, ed altre molte che non rimembro . Per la qual coſa non ebbi più alcun dubbio, che non foſſe queſto il vero natro, l'alcali-baſe del ſal marino . Ed è ben notabile coſa che non v' abbia mai ravviſato indizio di ſal marino meſcolato, nè d' altro ſale ſtraniero.

VI.

Donde mai queſt' alcali sì puro? Come in diſtanza diretta di ben ſeſſanta miglia dal mare ſu d' una collina, ove il mercurio nel Barometro ſi tiene quattro linee più alto, che non fa ſu la coſta del mare Adriatico, può egli annidarſi in tanta copia? E' agevole da crederſi, che una viva curioſità e voglia mi ſi eccitaſſe nell' animo d' inoltrare le mie ricerche, quanto mai poteva eſſermi conceduto di fare . L' averlo continuamente ſotto gli occhi, il vederlo ſotto gli occhi riprodurſi, tutto denunziava, che la cauſa di un effetto sì famigliare e foſſe proſſima, e poteſſe diſcuoprirſi indubitatamente oſſervata da vicino. Preſi pertanto ad eſaminare la natura del ſuolo ſu cui la Fortezza è piantata , il materiale onde ſono coſtrutte le mura, e l' indole del terrapieno poſto in groppa de' ſotterranei. Trovai primamente argilloſo il colle, di argilla per altro impura, e ſparſo di ſpoglie e tritumi d' animali marini; di quella terra e tritumi ſormato il terrapieno;

l' ossatura della collina di pietra tenera tufacea di color giallastro, impastata di marine conchiglie; e con questo tufo costrutte finalmente le volte e le mura stesse de' sotterranei in gran parte. Non mi sorprese altramente il ravvisar quivi pure, come in tante altre parti della terra si riconoscono tuttodì, spoglie patentissime di animali marini, ma m' indusse ben tosto a sospettare che non fosse già nativo di quel luogo il natro, ma annidatovi e sopravvenuto con le produzioni marine, che vi si trovavano in tanta abbondanza. E s' inoltrò il sospetto fino a farmi pensare, che tutta la parte calcarea del colle, e quella che l' effervescenza cogli acidi mostrava contenersi sì nell' argilla che in tutte quelle concrezioni tufacee, non d' altronde venisse, che da' disfacimenti evidentissimi de' crostacei, onde s' offerivano gli avanzi, e le spoglie d' ogn' intorno, in qualunque tempo e per qualunque rivoluzione si fossero ivi ammassati, che non è mio scopo l' indagare, e può ben esserlo meritamente e con frutto di qualche diligente Naturalista.

VII.

M' avvisai dunque di fare osservazioni accuratissime sul terreno, su le conchiglie, e su' tufi separatamente. Dal terreno lavato e rilavato non mi riuscì di trar lumi decisivi, non avendovi trovato che qualche poco di natro disseminato, onde restava sempre a dimandarsi donde traesse l' origine. Ne trovai pure nelle conchiglie polverizzate, e più nelle sostanze de' tufi conchigliferi, e ne' cementi singolarmente che commettevano i mattoni delle muraglie, su' quali cementi il vedeva fiorire in copia; il che attentamente ripetuto e verificato su tutte queste materie cavate da varie situazioni della collina, bastò bensì per confermarmi nel pensiero, che a quegli avanzi marini appartenesse il natro indubitatamente, ma per questa via non mi si apriva adito all' intima cognizione che desiderava. Come conosceva perfettamente, ch' era questo un articolo di sommo rilievo nella Fisica, e che il momento non poteva essere più di questo opportuno e propizio per iscuoprire la sede originaria di quest' alcali; così, fatti i primi passi, mi rivolsi tutto a studiare da vicino la spontanea

efflorescenza di lui, e su le parti di quelle sostanze argilloso-calcaree, ond' egli sbucava immediatamente. Scelsi per ciò fare e tufi, e mattoni, e cementi calcarei, e tutte quelle sustanze per fine su la superficie delle quali fioriva il natro e rifioriva costantemente. Andava spazzando il sale con una piuma, e ve lo lasciava riprodursi successivamente ponendo attenzione a tutto di dì in dì. Ma non mi venne mai fatto di comprendere il magistero chiaramente, finchè non mi pervennero alla mano alcuni pezzi di tufo particolari, ov' erano qua incastrate conchiglie marine, là pezzetti nericci, che parevano contrassegnare sostanza animale, e qua e là piccole aree interposte di nuda terra calcarea in parte, e in parte argillosa. Spazzando in questi più di frequente che non soleva la fioritura salina, guardando attentissimamente di momento in momento, per così dire, il rinascere del sale, finalmente m' accorsi che non dalle nude guscie, non dalla concrezione cretosa, ma bensì da quelle distinte parti, cui giudicava animali, sbucava il natro decisivamente. Fatto avveduto di questo spezzava i tufi, estraeva e separava l' una parte dall' altra, e vi faceva le mie osservazioni partitamente; perchè venni sempre più a confermarmi, che le conchiglie semplici non somministravano altramente il sale, e che tutto esciva dell' animale, che aveva messo da parte, dalle spoglie di lui disanimalizzate, ove dopo pochi dì tornava quello a comparire costantemente. Di qualche pezzo di queste concrezioni tufacee singolari ho fatto qua e là dono, e n' ho mandato anche in Francia, da cui spontaneamente fiorisce e rifiorisce il natro libero purissimo su le parti animali terrificate e fatte pietrose, che vi si trovano sparse ed incastrate; bastano in vero elle sole a mettere in chiaro la generazione di quel sal alcali, di cui è tanta abbondanza in questa collina. Ma ne vedremo le prove allorchè passeremo ad investigare la presenza di lui negli animali viventi nel mare.

VIII.

E qui prima d' inoltrarmi è d' uopo, che alcune osservazioni riferisca fatte nel sottoporre all' esperienza tutte quelle marine sustanze, che ho detto, le quali osservazioni mi

sembrano meritare tutta l' attenzione de' Fisici. Faceva in polvere le pietre, polverizzava le conchiglie, e tutto metteva a disciorsi nell' acqua e fredda, e tepida, e per sin bollente successivamente per non lasciarvi appiattato alcun sale. In tutte queste sperienze, che divennero per un anno, direi quasi, giornaliere,

I. Non ho mai potuto, non già ottenere caratterizzato, ma nè pur discernervi alcun vestigio di sal marino.

II. E all' opposto non ve n' ebbe alcuna, in cui, operando con le dissoluzioni d' argento e di mercurio, non discoprissi manifestamente perpetue e sensibili traccie di un acido marino *latente*, sì nella terra delle conchiglie, che ne' tufi e nel terreno stesso, ov' erano tutti que' testacei disseminati. Comprendendo bene l' importanza di questi due fatti, non ho lasciato di ripetere, variare, e verificare le prove in guisa da non poterne più dubitare. Sopra di che torneremo a luogo.

IX.

Veggendo dunque, che tutte le più scrupolose osservazioni menavano a conchiudere, che nell' animale marino risiedesse in proprietà il natro, e che in conseguenza tutto quello che traevasi su quella collina, e in que' sotterranei bello e formato sì in efflorescenza, che per lisciva, fosse un prodotto degli esseri marini decomposti ond' erano quivi i tritumi sì copiosi e visibili da per tutto, rivolsi il pensiero a prender per mano gli animali stessi che poteva proccurarmi in natura dal mare. Imperciocchè era necessaria cosa il ben conoscere, per quanto sarebbe conceduto, se il natro annidato nella sostanza animale marina vi fosse essenziale, o pure straniero, come dicemmo essere quello delle piante marittime; quistione inseparabile dal suggetto, che non può meglio per avventura dilucidarsi che coll' interrogare la natura direttamente coll' esame di quegli esseri medesimi ancor viventi, e nella loro intatta organizzazione. M' accinsi pertanto all' opera con molte prevenzioni e cautele, una delle quali si fu di ben conoscere alcuni caratteri distintivi del natro acetoso, cioè del natro combinato coll' acido dell' aceto distillato. Converranno i Fisici essere

essere operazione sommamente incerta e pericolosa l' adoperare acidi minerali in traccia di un alcali, di cui si voglia in qualche misto non tanto accertare la presenza, come lo stato di lui libero o combinato. Un acido vegetale sembra essere il più acconcio per tal uopo, siccome quello ch' è impotente a decomporre i sali neutri, che potrebbero nel misto avere quell' alcali per base, lasciandoveli egli intatti. E non è ultimo oggetto pure il poter separare l' alcali dalla sostanza in cui può essere involto, e averlo in potere totalmente libero; al che fare più d' ogni altro mezzo sembra valevole l' acido vegetale, come vedremo. Per la qual cosa le sperienze addotte dal Sig. *Wiegleb* per provare l' esistenza dell' alcali vegetale libero nelle piante prima della combustione, fondate sull' uso degli acidi minerali su le materie estrattive, non lasciano di essere da molte dubbietà accompagnate. Quindi è, che mi sono in primo luogo occupato a preparare il natro acetoso, che ho detto, per ben conoscerlo al caso. Ecco le principali osservazioni, che v' ho fatto.

I. Affuso l' aceto distillato, concentrato bastevolmente, sull' alcali marino cristallizzato, s' eccita immediatamente una viva effervescenza. Ma fa d' uopo affonderlo a poco a poco, non versando nuovo acido che al terminar dell' effervescenza suscitata poco innanzi.

II. Svaporato a secchezza il liquore o al sole, o a moderatissimo fuoco, perchè il sale non si decomponga, e affusevi poche goccie d' acqua distillata si cristallizza il sale perfettamente, ma non altramente a scaglie o a lamine sottilissime, come la terra fogliata. La cristallizzazione è regolarissima, composta di fascetti lunghi radiati, e quasi a filamenti setosi formanti una bellissima ramificazione. La figura de' fili è prismatica poliedra, veduta con occhio armato, e pare composta di prismi minori tetraedri.

III. Il sapore del natro acetoso è fresco e piccante; molto meno però della terra fogliata d' alcali vegetale. Vi si distingue perfettamente e a un tempo il sapor dell' aceto, e l' urinoso del natro.

IV. Egli è interamente dissolubile nello spirito di vino rettificato.

V. Esposto all' aria secca non s' umetta, nè va in delique-

ſcenza, ma ſi sfarina come il ſal di Glauber preciſamente.

VI. Finalmente mettendo di queſto ſale ſu' carboni acceſi, fugge l' acido, e prende odore empireumatico l' emanazione ſenſibilmente.

Valendoſi pertanto dell' aceto diſtillato al caſo d' inveſtigare un alcali nativo in ſoſtanze gelatinoſe, non ſenza miſcuglio di ſali marini e vitriuolici, oltrachè non ha egli preſa ſu queti ſali neutri, è certo, che il ſale acetoſo, che ne riſulta, vien rapito e diſciolto dallo ſpirito di vino, ſenza che ne reſtino attaccati i ſali neutri, e reſta perciò l' acetoſo ſeparato, da cui può quindi l' alcali precipitarſi agevolmente.

X.

Prima di ſoggettare gli animali marini, penſai di far cimento ſu le pure conchiglie di varie ſpecie di teſtacei, che mi proccurai dal mare Adriatico, come oſtriche, datteri, granchj, ed altri tali moltiſſimi peſci armati, ch' è inutile il denominare. Ne faceva venire di tratto in tratto de' freſchi per ripetere le ſperienze, le quali dovevano unicamente eſſere rivolte a riconoſcere l' eſiſtenza del natro, ovunque poteva in queſti marini viventi annidarſi, ſenza divertire le mie ricerche in analiſi non opportune all' oggetto, che aveva in veduta. Di queſti guſcj parte ne faceva ſeccare al ſole, e parte calcinare, dopo di averli replicatamente lavati nell' acqua calda. Diremo pertanto ciò che de' primi è intravenuto. Ridotti in polvere li diſcioglieva in acqua puriſſima, e filtrava le diſſoluzioni. Faceva poi ſvaporare le liſcive a ſecchezza. Da queſte intanto non ebbi mai reſiduo ſalino manifeſto, e non ſolamente non n' ebbi di ſal alcali, ma nè pur di ſale marino, che pur m' aſpettava non irragionevolmente diſciolto nell' acqua. Delle ſoſtanze terroſe che rimanevano ſul filtro faceva queſt' uſo. Le ſaziava primamente di ſpirito d' aceto verſato per interruzione, con cui facevano effervefcenza gradatamente creſcente. Filtrava quindi il liquore, lo ſvaporava al ſole a ſecchezza, e tornava a diſciorre il ſal ſecco nello ſpirito di vino; filtrava e ſvaporava di nuovo a ſecchezza, e finalmente con poca acqua diſtillata bagnando il ſale il riponeva in luogo freſco a criſtallizzarſi. Come è queſto il

modo, che ho costantemente praticato e su le conchiglie, e su le materie estrattive in traccia del natro, non lo ripeterò più, contentandomi d' indicarlo solamente.

La cristallizzazione di questo sale è stata più o men lenta, e difficile secondo l' indole varia delle sostanze costitutive delle conchiglie. I gusci delle ostriche, e di que' testacei tutti che non avevano legame intimo coll' animale, somministrarono un sale di forma setosa simile alla zeolite, e di lentissima e malagevole cristallizzazione. All' opposito quando il guscio polverizzato apparteneva a squille od altri granchj di corteccia tenera, e quasi parte dell' animale, il sale acetoso più facilmente si cristallizzava, e ve ne aveva su' piattelli, che affettava una figura prismatico-romboidale. Ma non potei giammai accertarmi, per quanto esaminassi attentamente il carattere di questi sali, che vi avesse decisivamente indizio di natro acetoso. Per altro su' carboni accesi lasciavano tutti sfuggir l' acido con un odore empireumatico, come fa il natroso. Ma ne' sali acetosi fatti colle conchiglie calcinate s' ebbero altre apparenze. Tutti si manifestavano pure terre fogliate calcaree, svanendo quelle apparenze saline, che aveva notato nelle cortecce in parte animalizzate, che non avevano sofferto l' azione del fuoco. La terra non era sostanzialmente che una vera calce.

XI.

Assicurato da molte e replicate sperienze fatte con tutto lo scrupolo, che non risiedeva altramente il natro nelle conchiglie de' testacei, prima di rivoltarmi agli animali, giacchè di materia abbondava e calcinata, e in istato naturale, volli ripetere anche su queste le ricerche che avea fatto precedentemente sulle conchiglie antiche quali terrificate, quali lapidefatte del nostro colle, di cui nel §. VIII. Non ebbi pertanto sensibile vestigio di sal marino in tutti i dilavamenti che ne feci, siccome delle antiche era accaduto; e all' opposito, come in quelle, non lasciò giammai di manifestarsi l' acido marino fissato nella loro sostanza, e più nelle non calcinate, che in quelle che erano state tormentate dal fuoco. Potrebbe quindi non essere ragione sufficiente per conghiettu-

rare non appartenere una terra calcarea a ſpoglie animali marine, o per caratterizzarla primitiva, il non dar ella ſegni d' acido marino *latente*, avvegnachè non può queſt' acido conſiderarſi da lei inſeparabile, ſe il fuoco può intaccarlo, come n' ebbi indizio manifeſto. Baſta intanto, che dell' eſiſtenza di un tal acido *latente* ſi abbiano prove ſuperiori ad ogni eccezione, ove non è traccia di ſale marino naſcoſto, il quale renda equivoca l' oſſervazione. Di che faremo parola in altra ſezione.

XII.

Ed eccoci giunti al nodo, al maſſiccio della quiſtione, la quale reſta pienamente deciſa ſe ci rieſce di ſcuoprire libero il natro negli animali marini, e coſtituente parte della ſoſtanza di loro, qualunque ſiaſi l' ufficio di lui nell' organica condizione di quegli eſſeri.

Su due claſſi d' animali ho iſtituite le mie ſperienze, cioè ſu' peſci armati o teſtacei, e ſu' peſci propriamente detti del mare. Mi limiterò a dire il modo, che ho uſato ſu entrambe, ch' è l' eſſenziale a ſaperſi, e proprio ad eſſere da chicheſia ripetuto, e ad eſporre il finale riſultamento, ſenza involgermi in una ſtucchevole e minuta deſcrizione di più che cinquanta eſperimenti fatti in due anni di tempo, e tutti ad un modo.

Lavava più volte l' animale, e il dilavava in acqua calda, ſinchè queſta ceſſava di contrarre ſapore, e colore diverſo dal ſuo naturale. Il faceva quindi peſtare in un mortajo, e parte ne poneva a macerare nell' acqua calda, parte a ſeccare al ſole per indi a poco calcinarlo.

I. E parlando della porzione macerata faceva paſſar tutto per un filtro di tela, e ſpremeva sì, che l' acqua ſi caricaſſe della materia eſtrattiva, e tornava a filtrare aggiugnendo nuova acqua. Ciò fatto, a dolce calore ſvaporava a ſecchezza la diſſoluzione, e la ſoſtanza ſecca metteva a digerire nell' aceto diſtillato tepido, e concentrato. Sin da principio oſſervava farſi un' effervefcenza ſenſibile. Di nuovo a calor dolce ſvaporava a ſecchezza, e tornava a verſarvi interrottamente un po di quello ſpirito di aceto ben caldo.

Cessata ogni effervescenza filtrava finalmente il liquore, e ridottolo a secchezza al sole, vi versava poche goccie d' acqua distillata abbandonandolo in luogo fresco alla cristallizzazione.

Questa era sempre confusa, parte in lame cristalline, parte in lucidi cristalli sparsi, visibilmente prismatici. Allora poneva tutto a digerire nello spirito di vino, decantava, ripetendo l' operazione finchè lo spirito restava nel suo stato naturale. Messi da parte i residui, faceva svaporare lo spirito per ottenere secco il sale acetoso di cui s' era quello caricato.

Questo è il costante metodo che ho usato in esperienze di tanto rilievo.

Il risultamento di tutti i cimenti fatti in questa guisa è stato, che il sale acetoso comparve sempre a base di natro, o d' alcali marino a prova non equivoca. Imperciocchè ora facendo cristallizzare quel sale seccato, aveva il natro acetoso co' suoi caratteri descritti al §. IX., ora decomponendolo col calore, ne ricavava il natro libero, natro caratterizzato, ed or decomponendolo coll' acido nitroso, ne traeva un bel nitro prismatico quadrangolare, cui mi dilettava d' infiammare su carboni accesi, e n' otteneva l' alcali indurito e pietroso, per così dire, sloggiato l' acido.

II. Quanto all' altra porzione seccata al sole, la calcinava all' aria libera finchè riducevasi in cenere brunastra senza odore. Facea quindi bollire la cenere nell' acqua, filtrava e svaporava la lisciva finalmente a secchezza. Esposto questo sale secco all' aria si sfarinava in gran parte. Il trattava poscia coll' aceto distillato, indi con lo spirito di vino, come qui innanzi precisamente. Non mancò in questi pure, come ne' precedenti saggi, di comparire il natro libero, con cui combinati gli acidi vitriolico, nitroso, e marino, ottenni sal di Glauber, nitro, e sal marino tutti ben caratterizzati.

XIII.

Ed ecco verificata negli animali viventi nel mare l' esistenza del natro libero, come le efflorescenze spontanee, e tutti gl' indizj ed apparenze concorrevano a manifestarcelo nelle osser-

vazioni fatte sulle spoglie terrificate degli animali marini, di che abbiamo fatto esposizione e presagio ne' §. §. precedenti.

Ma, come dicemmo al §. IX., è egli essenziale o avventizio e straniero quest' alcali nella sostanza animale marina, in cui dietro a tante prove è fuor di dubbio, ch' egli risiede? E' tolto già ogni scrupolo, che potrebbe aversi, ch' egli possa annidarvisi in istato di sal marino, mentre, oltre che sarebbe ridicolo l' avvisarsi che la calcinazione dell' animale fosse bastevole a decomporre questo sale, troviamo sempre libero e puro l' alcali nella sostanza animale coll' uso di un semplice acido vegetale senza alcuna combustione. Il che toglie pure ogni sospetto, che l' alcali marino che si trae dalle sostanze vulcaniche, e quello stesso che troviamo in tanta abbondanza fiorire sul colle di Verona, provenga da una decomposizione di sal marino operata dal fuoco, o da altra cagione ignota, tosto che il ricaviamo a piacere bello e sviluppato dalla sostanza degli animali vivi, e viventi nel mare. Pertanto di quella quistione parlando, tutto induce a credere, appartenere il natro libero originariamente e essenzialmente alla sostanza animale marina, e far parte di essa propriamente. Imperciocchè per qualificarlo straniero e accidentale bisognerebbe, che nel medesimo animale potesse verificarsi il caso di totale privazione e assenza di questo sal alcali, salvo l' essere organico di lui, e la vita, come delle piante accade le più natrifere, che si conoscano, le quali possono spogliarsene interamente, se lungi dal mare vengano coltivate, del che altrove parleremo. E d' altronde sappiamo per le analisi non avervi altramente nell' acque del mare natro libero disciolto, di cui possano i viventi marini nutricarsi. Che se il si voglia attribuire al sal marino, che nel servire all' organizzazione ed incremento di loro possa decomporsi, che è ardua cosa da concepirsi, avuto riflesso all' intimo legame de' principj prossimi in un sal neutro perfettissimo, com' è il marino, il trovarsi co' nostri sperimenti costantemente passato in sostanza animale, e nella materia estrattiva segnatamente, e libero d' acido muriatico il natro, lo rende e qualifica necessariamente nativo ed originario in un animale, di cui è nativo, originario, e proprio quel modo di essere, quell' organizzazione, ed incremento nel mare. Ne' pesci intanto

d' acqua dolce armati e disarmati non m' è mai riuscito di ravvisarvene sensibilmente vestigio. Al qual fine ho suggettato nel 1783 varj pesci del nostro Lago di Garda, dell' Adige, e di altre acque del Territorio Veronese, alle sperienze medesime poc' anzi descritte. Per la qual cosa se una tale costante esistenza di questo sal fisso negli animali marini vivi, se il somministrarne che fanno in copia dietro alla risoluzione e terrificazione della loro sostanza dopo un corso d' anni senza numero, come apparisce nelle fioriture che accennammo, non decidono la quistione a tutto rigore, caratterizzano certamente il natro come naturalizzato e fatto proprio nelle sustanze degli esseri marini; ch' è quanto nel bujo eterno de' magisteri di natura possiamo sperar di vedere. Qualche chiarore di più ci si offrirà nell' esame che faremo della terra animale nella seguente Sezione.

XIV.

Tra le altre cognizioni acquistate in queste sperienze, di una vo' far qui menzione, ch' è il luogo acconcio, sembratami notabilissima, ed è, che dietro a' dilavamenti fatti collo spirito di vino delle sostanze animali seccate, onde ricavarvi il natro acetoso, trovai sempre rimanere assai piccola quantità di sale marino, relativamente alla massa degli animali. La materia residua, estratto il sale acetoso, era fatta bollire in acqua purissima, la quale dovea necessariamente caricarsi de' sali, e però filtrava la dissoluzione, ottenendo due oggetti di osservazione separati, la terra sul filtro, di cui qui appresso, e la lisciva filtrata. Reiterate, e ponderate estimazioni m' hanno fatto conchiudere, che 40 parti di sostanza animale calcinata, or più or meno, si riducevano a sei di cenere. La decima parte di queste ceneri era salina, di cui un terzo appena era sale marino perfettamente cristallizzato. In conseguenza negli animali marini, che ho potuto soggettare, ho trovato contenersi di sal marino appena la 200ma parte della lor massa; il che può sembrar piccola cosa in animali che nascono, si nutriscono, e vivono continuamente nel mare.

XV.

Ma non vo' tacere un' altra osservazione che ho fatto della quantità diversa d' alcali, che le due vie di operare umida e secca somministravano nelle sperienze precedenti. Non ottenni giammai da pari quantità di sostanze animali trattate con la macerazione, e con la combustione, pari quantità di natro, essendo sempre riuscito l' alcali tratto dietro alla calcinazione minore dell' altro, che traevasi dietro alla macerazione. E non senza fondamento ho sospettato, che l' azione del fuoco ne distruggesse alquanto nel primo caso volatilizzandone parte, e parte riducendone in istato di terra indissolubile nell' acqua. Ma vedremo poi di quest' effetto deciso del fuoco.

XVI.

Quest' importantissimo fatto del trovarsi il natro inerente, proprio, e come in luogo nativo costituito nella sostanza degli animali che nascono, vivono, periscono, e si riproducono nel vastissimo Oceano continuamente, svela intanto moltissimi arcani, ed apre la via ad altre cognizioni moltissime, che ci sarebbero state mai sempre occulte, se non iscioglievasi il nodo capitale, come dicemmo al §. III. Ecco intanto donde può venire il natro in tante regioni meridionali, che abbiamo rimembrato, conosciuto dagli antichi, e che ora pure si trova abbondantissimo; ecco donde può procedere il natro in vicinanza del mar Caspio, nella Siberia, nella Tartaria, e in tante altre parti del Settentrione; come può fiorire e rifiorire dalle concrezioni tufacee conchiglifere; come può introdursi tra via nell' acque minerali, nelle materie vulcaniche; come ne' vegetabili; come finalmente annidarsi e spargersi nelle sostanze de' varj regni di natura. Ovunque il mare sia stato (che pur non ha quasi parte la terra, in cui di mare non sieno impresse vestigia), ovunque abbia egli co' suoi abitanti soggiornato, e vi si sieno questi decomposti o per naturale putrefazione, o per l' azione de' fuochi sotterranei, ovunque le spoglie loro si sieno arrestate, qual meraviglia che siasi

ſiaſi manifeſtato per l'addietro, e ſi manifeſti tuttora in ogni parte del globo indiſtintamente il natro libero che fa tanta parte della materia animale marina? Dall'accidentale in fuori, che può anche lungi dall' origine rinvenirſi, s' indichi un ſito, ove fioriſca e abbondi queſt' alcali, in cui non ſieno viſibili e manifeſti i ſegni di vicina o remota ſtazione fatta ivi dal mare, e preſenti le ſpoglie d' animali marini decompoſti. Quindi l' alcali volatile, che hanno oſſervato i Fiſici ſepararſi dal natro; quindi le terre natrifere dall' Egitto ai deſerti della Tartaria, ove ha fatto oſſervazione il Sig. *Georgi* (Acta Acad. Imp. Petrop. An. 1777.), trovate ſempre cretoſe, e manifeſtanti disfacimento di teſtacei. E non è più neceſſario il ricorrere nè a ſpontanee ineſplicabili decompoſizioni del ſal marino, nè a decompoſizioni di queſto ſale operate dal fuoco, o dall' organizzazione delle piante marittime che il ſucchino per nutrimento, onde render ragione della preſenza di un alcali, cui la decompoſizione e diſorganizzazione degli animali marini può ſomminiſtrare, in qualunque modo ella accada.

XVII.

Si faccia ora più attenta oſſervazione ſu le fioriture ſaline delle abitazioni, ovunque hanno luogo, ſegnatamente ne' paeſi marittimi, fioriture che il volgo co' ſal-nitraj chiama ſempre nitroſe: vi ſi diſcernerà facilmente un natro libero familiare, e più comune, che ſino al dì d' oggi non s' è eſtimato, e non potrà confonderſi col nitro, che vi foſſe per avventura meſcolato, facendo attenzione anche al ſolo ſapore urinoſo, che de' ſali neutri non è mai proprio. La città di Venezia, ed altre marittime ſituazioni dell' Adriatico me ne hanno ſomminiſtrato negli anni addietro, e me ne ſomminiſtrano prove tutto dì ne' ſaggi ſenza numero fatti ſu le ſpontanee fioriture ſaline, dopo che ho riconoſciuto poterſi generare il natro dietro alla totale decompoſizione degli animali marini, e sbucare dalle ſoſtanze di loro. Lo ſteſſo dee accadere da per tutto, ove ſimili circoſtanze ſi verifichino, e non ſia diſſipato l' alcali, o decompoſto egli ſteſſo, il che avviene per replicati lavamenti, e replicate eſſiccazioni, come tutti ſanno.

XVIII.

M' era da principio propoſto di far eſtimazione, ſe mi foſſe ſtato poſſibile, della quantità d' alcali libero contenuto negli animali marini relativamente alla loro maſſa, e aveva intrapreſo qualche appoſito eſperimento. Ma veggendo eſſere ſommamente varj i riſultamenti, eſtremamente difficile l' accertamento, e non fondamentale per tutti il cimento che ſu pochi animali del mare era conceduto d' iſtituire, ho abbandonato l' opera. Le parti oleoſe, le gelatinoſe, le gommoſe, la terra ſteſſa animale che fa tanta parte di quegli eſſeri, tutto vi dee naturalmente trovarſi sì difformemente diſtribuito nell' immenſa quantità di loro, generi, e ſpecie innumerabili, da non poterſi far caſo di ſingolari eſperimenti.

Della Magneſia.

XIX.

La Magneſia ha tali e tanti caratteri ſpeciali e ſuoi proprj, che non ſenza fondamento vien ella diſtinta da tutte le altre terre conoſciute. Se n' aveva contezza ſin dal principio di queſto ſecolo, ma più per gli uſi medicinali che per riguardo alle proprietà di lei, nè prima della metà poterono averſene nozioni un po più chiare, eſſendo ſolamente del 1755 comparito l' eſame fattone dal Sig. *Black*, indi del 1759 quello del Sig. *Margraff*. N' è poi ſtato ſcritto in appreſſo da molti altri Chimici, e ſingolarmente dal Sig. *Bergman* ſapientemente sì, che mi credo diſpenſato dal parlare di un oggetto di cui ogni Fiſico è ormai pienamente iſtrutto. Vo' qui ſolamente eſporre quello, che intorno all' origine tuttora ignota di queſta terra le ricerche precedenti ſul natro hanno dato occaſione di penſare, e di tentare coll' eſperienza alla mano. Se queſta è la maeſtra, cui dobbiamo conſultare, e ſu la cui fede dobbiamo ripoſare, apparirà, far ella parte eſſenziale della ſuſtanza degli animali marini al par del natro, e doverſi a buon diritto diſtinguere dalle terre calcarea, e alluminoſa, come l' hanno avvedutamente diſtinta i celebri *Mar-*

graff e *Bergman*, del che hanno addotto ragioni validiſſime ne' loro Opuſcoli Chimici. E vuol di più il ſecondo, ch' ella ſia *placée au nombre des ſubſtances primitives juſqu' à ce que l' on ait decouvert ſon origine*. Sopra di che potrà ſparger luce per avventura ciò che vedremo qui appreſſo.

XX.

Nel leggere la Memoria ſopraccitata del Sig. *Georgi* mi venne notato al §. V., che dal natro della Ruſſia impuro ſi precipita coll' alcali tartaroſo maggior quantità di magneſia che non ſi trae dall' acqua-madre del ſal marino. Entrai quindi in un primo ſoſpetto, che la magneſia, che ſi precipita per un alcali fiſſo o volatile dall' acque-madri del ſal marino, poteſſe avere col natro comune l' origine, e un ufficio nell' organizzazione degli animali marini. In appoggio di queſta idea venne il conſiderare, che un gran numero di caratteri proprj a un tempo del natro e della magneſia avvicinava talmente queſte due ſoſtanze, che parevano non differire tra di sè, che nell' eſſere ſalino. In fatti

I. Il vitriuolo di natro, o altrimenti il ſal di Glauber richiede 15 parti di natro, e 27 d' acido vitriuolico, e il vitriuolo di magneſia 15 parti di magneſia, e $26\frac{1}{9}$ d' acido vitriuolico (*Bergman* Opuſc. T. 1. pag. 148. 150.)

II. Per diſciorre uguali doſi di entrambi queſti ſali occorre proſſimamente la ſteſſa quantità d' acqua bollente, dimandandoſene pel primo $\frac{12}{15}$ del peſo del ſale, e quaſi $\frac{11}{15}$ per la diſſoluzione del ſecondo.

III. Il vitriuolo di natro, e quel di magneſia prendono non molto differente quantità d' acqua per la loro criſtallizzazione, e le figure de' criſtalli non ſono al ſenſo eſtremamente diſſimili tra di sè.

IV. Si criſtallizzano entrambi per raffreddamento: il ſapore in amendue è freſchiſſimo, e il ritorno amaro: amendue eſpoſti all' aria ſecca perdono l' acqua di criſtallizzazione e la traſparenza, e ſi riducono in farina bianchiſſima.

Queſte analogie, ed altre che non rimembro, non mi parvero totalmente accidentali, potendo ogni lieve modificazione della ſoſtanza principio, ſe mai foſſe comune, dar luogo

alle differenze, che sembrano distinguere il natro dalla magnesia, allontanando per avventura questa più che quello dallo stato salino alcalino.

XXI.

Ma non volendo dar corpo all' ombra mi rivolsi all' esperienza, profittando dell' occasione in cui era di maneggiare sostanze animali in copia per le osservazioni precedenti. Prima di tutto pertanto feci quest' esperimento. Presa la materia animale fresca di un gran numero d' ostriche la feci pestare in un mortajo, e macerare nell' acqua per tre giorni; feci poscia svaporare e seccare al sole l' estratto, e su d' una porzione della materia secca versai dell' acido vitriuolico, lasciandola in digestione sopra un fuoco moderato. Fatta di nuovo svaporare la dissoluzione e seccare, disciolsi la materia secca nell' acqua, filtrai, e svaporai nuovamente la dissoluzione sino ad un certo grado di concentramento. Preparate successivamente tre dissoluzioni d' alcali vegetale, d' alcali volatile, e di calce viva, e separatamente filtrate e concentrate, versai in ciascheduna pari dose di questa liscivia di sale vitriuolico. In tutte e tre le dissoluzioni ottenni un' abbondante precipitazione. Decantati i liquori, purgai con acqua purissima i precipitati a poco a poco da ogni mistura di sal neutro, e trovai in tutti una terra finissima, leggera, bianca, e insipida. Scelta quella porzione ch' era stata precipitata dall' alcali volatile, ne combinai parte coll' acido vitriuolico, e dopo le consuete operazioni n' ebbi un sale amarognolo, il quale si disciolse in poco men del suo peso d' acqua bollente, e tutto si sfarinò esposto all' aria, come fa la magnesia vitriolata.

XXII.

Sull' altra porzione di estratto animale secco versai dell' acido marino, e compiuta la combinazione, feci seccare e disciorre nell' acqua successivamente il sale, filtrare e svaporare a certo segno la liscivia salina, e nelle tre separate dissoluzioni alcaline, qui innanzi preparate, versai, come nell' esperi-

mento precedente, di questa lisciva. N' ebbi abbondanti precipitazioni terrose. Ma prescelto il precipitato per l' alcali volatile, da porzione di lui combinata coll' acido vitriuolico ottenni un sale amariccio in tutto simile al precedente, e co' medesimi caratteri della magnesia vitriolata avuta qui sopra.

XXIII.

Serbata la terra sopravanzatami, e le altre pure precipitate colla calce, e coll' alcali vegetale, come termini di comparazione, precipitai da una libbra d' acqua-madre di sal comune coll' alcali volatile mezz' oncia di magnesia. Ne combinai quindi parte coll' acido vitriuolico, conservando il restante per altri confronti. La magnesia vitriolata, che n' ebbi, fu messa a paragone dell' altra ottenuta dalle operazioni de' §. §. XXI. XXII., e le trovai tutte per ogni conto della stessa indole, e co' medesimi caratteri a tutte le prove.

Mi sono in appresso fatto a confrontare le due terre in natura quella cioè tratta dagli animali per le precedenti precipitazioni, e questa dalla lisciva di sal marino. Per quanto mi sia adoperato nel farne i più accurati riscontri, non ho potuto discernervi differenze, per cui, se la terra precipitata dal sal marino è magnesia, non debba quella pure considerarsi magnesia, che ho ricavato nel modo predetto dalla sostanza animale. Pari finezza e bianchezza, pari leggerezza e insipidezza. Entrambe potentemente calcinate non avevano causticità, non si scioglievano nell'acqua, nè vi si riscaldavano, e si discioglievano negli acidi senza effervescenza. Elle del pari produssero nella soluzione di nitro lunare una precipitazione nericcia, e rossiccia in quella di sublimato corrosivo. Mescolate entrambe in separati crogiuoli in pari dose con terra vitrescibile, e sottoposte a gran fuoco non diedero segno di fusione. Non fecero entrambe parimenti, che indurarsi mescolate separatamente con la terra dell'allume. A queste prove, lasciando a parte alcuni altri cimenti, parvemi di potere fondatamente conchiudere, che le terre ricavate per la via sopra esposta dalla materia animale marina, erano le stesse, che precipitiamo dall' acque-madri del sal comune decisivamente.

XXIV.

Dietro a questi primi passi m' accinsi a fare qualche sperimento su la materia animale calcinata di cui aveva messo a parte più di sei oncie in vase ben chiuso, perchè non s' imbevessero di acido aereo. Disciolsi due oncie di queste ceneri in acqua bollente, e filtrata la dissoluzione, presi a far cimento su la terra indissolubile nell' acqua rimasa sul filtro. Questa terra non fece sensibile effervescenza coll' acido vitriuolico, ma sì bene coll' acido nitroso fumante, combinata col quale diventò gelatinosa, e destramente maneggiata si cristallizzò; ma ben tosto umettatosi il sale, cadde in deliquescenza. Mi limitai pertanto a far uso dell' acido vitriuolico solamente, e trovai, che era mestieri versarvelo sopra interrottamente, essendo assai lenta la combinazione, agitare con ispatola di vetro il mescuglio, e spogliarlo in fine dell' acido soprabbondante con ottimo spirito di vino ben caldo. Ciò fatto posi questa calce sopra un filtro, e vi andai versando a poco a poco dell' acqua caldissima, continuando così finchè cominciò a gocciolare l' acqua insipidissima. Messa a parte la prima, ch' era amariccia, la svaporai, e posta a cristallizzarsi, n' ebbi una magnesia perfettamente vitriolata, come le precedenti. Ma la materia rimasta sul filtro era insipida, nè si discioglieva nell' acqua, e però riposta in piattello di porcellana vi aggiunsi poche goccie d' acqua distillata, e abbandonandola alla cristallizzazione, dopo alquanto tempo trovai formata una selenite decisa. Presi di quella magnesia vitriolata, che era ormai convertita in farina, e la disciolsi in un po d' acqua bollente concentrando la dissoluzione. Infusi poscia in una porzione acqua di calce, e si fece un' abbondante precipitazione. E similmente versando nel restante un po d' alcali volatile, nacque pure copiosa precipitazione. La terra precipitata confrontata con la magnesia che si precipita dall' acqua-madre del sal marino, aveva tutti i caratteri di questa senza alcun dubbio.

XXV.

Ed ecco verificata nella sostanza degli animali marini la presenza di tre sostanze distinte, cioè del natro, della magnesia, e della terra calcarea: articolo importantissimo, e degno della considerazione de' Fisici. Al qual passo non è fuor di proposito l' aggiugnere, che prende sempre più forza il primo giudicio fatto dell' essere inerente, essenziale, e non avventiccio e straniero il natro nella sostanza animale. E così può dirsi ora della magnesia. Altramente sarà pure straniera la terra calcarea, e immaginando tolta via via una sostanza dopo l' altra dall' animale, se non gli sono essenziali, che sarà dell' animale? Sembra dunque che negli esseri animali viventi nel mare risieda la gran conserva sì del natro che della magnesia, non messa in conto la terra calcarea, di cui nessuno ha giammai dubitato.

XXVI.

Ma qui ci si prepara un altro fenomeno di sommo rilievo. Ho detto al §. XX., che i caratteri del natro, e della magnesia mostravano tanto stretta relazione, che sospettava differir quello da questa, più che nella sustanzia principio, nell' essere nell' uno più decisa la condizione salina, che nell' altra. Ecco come mi sono diretto per verificarlo.

I. Avendo preso quattro dramme di natro cristallizzato purissimo il combinai coll' acido vitriuolico, e ben lavato il sale di *Glauber* collo spirito di vino, onde torgli ogni stilla di acido ozioso e soprabbondante, il disciolsi nell' acqua; filtrai poscia e concentrai la dissoluzione. Vi affusi due dramme di alcali volatile, e non senza contento osservai farsi un' abbondante precipitazione; decantato il liquore, lavato, e rilavato con acqua purissima il precipitato, trovai ch' era egli una vera e decisa magnesia al peso di tre scrupoli e quindici grani, la quale accompagnava quel natro, e vitriolata potè poi decomporsi per un alcali, come vedeva. E' intanto verissimo, ciò che osservò il Sig. *Georgi* nel natro nativo della Russia, siccome notammo al §. XX. M' accinsi quindi all' es-

perimento di confronto. Tutti ſanno che per reiterate diſſoluzioni, ed eſſiccazioni gli alcali fiſſi ſi ſnaturano, e ſi terrificano in qualche modo. Mi propoſi pertanto di riconoſcere, che coſa accadeva dell' alcali marino trattato così; ſe s' accoſtava per queſta via più e più ad un certo ſtato terroſo; che coſa finalmente poteva egli eſſere in queſto ſtato di digradazione, e ſe la magneſia che ne avrei ottenuto foſſe in maggior copia, che nell' eſpoſto eſperimento.

II. Preſi altre quattro dramme del medeſimo natro criſtallizzato, e diſcioltolo nell' acqua il filtrai due volte per carta non collata, e feci ſvaporare la diſſoluzione a ſecchezza. Diſciolſi di nuovo il ſal ſecco, e tornai a farlo ſvaporare a ſecchezza. E così via via procedendo ho ripetuto l' operazione ſei volte. Dopo ciò il combinai, come precedentemente, coll' acido vitriuolico, lavai il ſale di *Glauber* collo ſpirito di vino, diſciolſi, filtrai, e concentrai la diſſoluzione. Verſando poi in queſta due nuove dramme del medeſimo alcali volatile, decantando, lavando, e rilavando il precipitato, e ſeccandolo finalmente, trovai che la terra avea il peſo di quaſi ſei ſcrupoli. Volli però accertarmi del ſuo carattere, e però la combinai coll' acido vitriuolico, e n' ebbi una vera, e manifeſta magneſia vitriolata, che ſcioglievaſi tutta in poca acqua bollente, e ſi ſfarinava all' aria.

III. Non contento di queſto accertamento volli replicare l' eſperienza per maggior ſicurezza. Pertanto meſſe altre quattro dramme del medeſimo natro a diſciorſi nell' acqua, filtrai due volte la diſſoluzione come prima, onde torvi ciò che vi poteſſe eſſere di terroſo, e ripigliai l' evaporazione nello ſteſſo vaſe, che fu ſempre di vetro. Seccata la materia vi affondeva nuova acqua, e così ſucceſſivamente replicando l' operazione giunſi all' ottava volta pazientemente. Era notabile coſa il vedere dopo la ſeſta la ſoſtanza alcalina diſcioglierſi a ſtento, e andar nuotando per l' acqua a fiocchi come fa la neve per l' aria. Dopo l' ottava eſſiccazione combinai la materia coll' acido vitriuolico, dilavando il ſale con lo ſpirito di vino, e ſciogliendolo poſcia in acqua diſtillata. Vi affuſi due dramme d' alcali volatile, come qui innanzi, ed ebbi prontiſſima precipitazione di terra, la quale lavata, e ſeccata peſava quaſi ſette ſcrupoli, leggiera, inſipida, e combinata coll'

acido

acido vitriuolico somministrò un sale amarognolo, un vero vitriuolo di magnesia, come poco avanti.

XXVII.

Per quanto esser dobbiamo riserbati nel trar conseguenze da particolari sperimenti, alcuni fatti sono di tal natura, che danno luogo a conseguenze d' ogni eccezione maggiori. Sembra dunque, che su la fede delle cose vedute e sperimentate fin qui possa essere permesso di riconoscere, al par del natro, propria della sustanza animale marina la magnesia: contenere molto ragionevolmente l' uno e l' altra una stessa terra-principio, e differire tra di sè nella condizione salino-alcalina: potersi entrambi ricavare direttamente dagli esseri organici animati che vivono nel mare senza alcuna azione del fuoco, cui volessero attribuirsi: e finalmente potersi non senza fondamento giudicare la magnesia costituita in uno stato medio tra la pura terra e l' alcali marino. Quindi le proprietà analoghe, di cui s' è fatto menzione al §. XX., e la spiegazione del bel fenomeno osservato dal Sig. *Bergman*, e riferito nel III. Vol. de' nuovi Atti della Società R. di Upsal alle pag. 128. 129. Trovò quest' illustre uomo, che la magnesia si combina col zolfo, e genera un fegato. Ed ecco come son di rado le magnesie disgiunte dal natro nativo; come può ella mescolarsi con tante materie nelle viscere della terra, ove il mare è stato co' suoi abitatori, come nelle argille, nelle steatiti, nell' asbesto, nello schisto, nello schorl, in alcuni spati, nelle ampeliti ecc.; come sia ella abbondantissima nelle fonti salmastre, ov' è combinata coll' acido marino; come risieda combinata e in tanta copia nel vasto Oceano, di cui rende l' acqua sì disgustosamente amara; come sia tenacemente aderente a' sali comuni; come si trovi disseminata in parti sottilissime nelle pietre calcaree state una volta coperte dall' acqua del mare; come finalmente l' efflorescenza delle materie piritose somministrando un acido vitriolico, nell' atto che con la terra calcarea si producono le seleniti, con la magnesia, che vi sta incorporata, si generino de' sali amari, delle magnesie vitriolate, le quali or ci vengono recate di sotterra da fonti amare, ed or trovansi fossili belle e formate, com' è quella anche tra noi scoperta di re-

cente nella Carnia Veneta dal Sig. *Tavelli*, di cui ho mandato ultimamente un ſaggio al celebre Sig. *Lavoiſier* a Parigi proccuratomi dall' illuſtre e dotto Naturaliſta Sig. *Arduini* di queſta Società. Non ſia però chi ſi affretti di conchiudere, dal che ſono lontaniſſimo, che tutta la magneſia proceda dagli animali marini diſorganizzati, o dal ſal marino magneſiano decompoſto, quaſi repugnaſſe l' avervene in natura, che non ſia entrata nell' economia animale, o nella compoſizione de' ſali marini: concluſione mal fondata e prematura.

Del ſal marino, e della ſalſedine del mare.

XXVIII.

Se queſto foſſe il ſecolo de' ſiſtemi, che non è, le verità luminoſe, onde ſiamo fortunatamente venuti in cognizione, potrebbero ſomminiſtrare baſe e principj a più di una teoria. Ma come non tutte le umane comentazioni ſervono realmente a promuovere la ſcienza, di cui anzi ritardano bene ſpeſſo gli avanzamenti, così al vantaggio unicamente della Fiſica provvedendo, non altro frutto mi ſon propoſto di ricavarne fuorchè quello di alcune immediate, e, per quanto a me ſembra, legittime conſeguenze. E ſe mi farò lecito di accompagnarvi qualche penſiero mio, non ad altro ſarà egli inteſo, ſuorchè ad aprire all' altrui viſta il nuovo orizzonte, che s' è affacciato alla mia, e ciò forſe darà motivo e campo a nuove indagini. E primamente è d' oſſervazione degno il fenomeno di quelle eterne traccie d' acido deciſivamente marino, cui abbiam detto *latente*, ravviſate in tutte le marine ſuſtanze, ove non è veſtigio di ſal marino: acido che ſi manifeſta dopo ſecoli e ſecoli, ch' elle ſon terrificate e impietrite. Onde mai queſt' acido? Se il ſi voleſſe proceduto da ſal marino decompoſto ſpontaneamente in tanta ſerie d' anni, decompoſizione che non ſaprei ammettere ſenza conoſcere gl' intermezzi che poſſono averla operata, ond' è poi che il troviamo nelle conchiglie di freſco tratte dal mare, ove pure non è indizio di ſal marino (§. §. VIII. XI.), nè apparenza, che autorizzi sì fatta decompoſizione? Nell' acqua del ma-

re certamente non abbiamo traccia d' acido muriatico libero, essendovi egli sempre combinato col natro, con la magnesia, e con la terra calcarea. E' egli dunque nativo e proprio delle conchiglie, o si trasfonde dall' animale quasi succo nutricante destinato a recarvi il principio del vivere, crescere, e configurarsi di loro? L' osservarvi arrestato il corso della vita al mancar dell' animale, il rimanersi la conchiglia dopo di lui pura massa figurata di terra calcarea senza moto, e il non trovarvi altro di straniero, che quest' acido intimamente unito, invitano a credere non solamente che vi sia egli dall' animale provenuto, ma che eziandio l' ufficio di lui fosse per avventura il portare, diffondere, e mantenervi il principio attivo e vivificante, durante la vita dell' animale. Dunque parrebbe l' acido marino aver sede nell' animale indubitatamente. Ma se non torniamo a ricorrere al sussidio della decomposizione de' sali tolti al mare dall' animale nel vivervi e nutricarsi, che vi fa continuamente, decomposizione sempre misteriosa, siamo costretti a mettere quest' acido originariamente nella classe degli acidi nativi di lui: soggetto bellissimo di ricerche totalmente nuove sugli acidi degli animali marini, il quale merita l' occupazione de' Fisici quant' altro mai. E' vero, che se nella vita di quegli esseri organici entrano i sali disciolti nell' acque in cui vivono, i sali marini terrosi, e magnesiani potrebbero cedere non difficilmente tutto o parte del loro acido decomponendosi in qualche modo, e lasciarvelo intruso. Ma la decomposizione del sale a base d' alcali fisso, ch' è il principale, non dee mettersi in campo sì leggermente da chi ben conosce l' indole di lui e l' intimo legame de' suoi principj.

XXIX.

E qui si faccia attenta considerazione su quell' acido osservato dal Sig. *Bergman*, indi dal Sig. *Morveau* (Opusc. Chim. T. 1. pag. 7.), e da altri illustri Fisici successivamente nelle terre calcaree, e sempre presente. Egli è quello stesso di cui parliamo, da me ne' viventi animali marini ravvisato direttamente. Si ha dunque tutto il fondamento di credere, che le crete, e in genere tutte le terre calcaree dotate di questo

ſpirito acido latente non ſieno che ſpoglie d' animali marini disfatti, e terrificati. Ma che s' avrebbe a penſare di una terra calcarea, che ſe ne trovaſſe ſprovveduta? O può eſſerne ſtata ſpogliata per l' azione di qualche potente intermezzo, come tra primi è il fuoco (§. XI.), o può ella non aver fatto giammai parte di ſimili animali; mentre non repugna per alcun conto, che v' abbia in natura una terra vergine per così dire, e primigenia, la quale non ſia entrata non ſolamente nella animalizzazione degli eſſeri marini, ma nè pure nell' economia di alcun altro eſſere organico della terra.

XXX.

Ma intanto laſciando a parte le quiſtioni e attenendoci a' fatti, un acido marino ravviſiamo diffuſo ne' corpi animati del mare, della cui preſenza non è permeſſo di dubitare, indipendentemente da quello che vi ſta combinato ne' ſali neutri, e medj che vi ſon diſciolti, e in piccola doſe pure diſſeminati in quelle ſteſſe organiche ſuſtanze (§. XIV.). Sappiamo in oltre, che nell' immenſa copia di que' viventi, e ſegnatamente nella ſuſtanza animale, riſiedono nativi il natro, e la magneſia in un con la terra calcarea, ch' è già la terra privilegiata e deſtinata per eccellenza dalla natura a meſcolarſi in tutto, e in tutti i ſuoi regni. Ed è poi certo, che, come è ſtabilito per ogni eſſere che vive il ceſſar di vivere, e dar luogo al rinaſcere e riprodurſi d' altri ſucceſſivamente, tutto pure quel ſiſtema d' innumerabili viventi nell'Oceano è in perpetua rivoluzione di naſcere, perire e riprodurſi continuamente. Dietro pertanto alla diſorganizzazione di que' corpi, reſtano in libertà neceſſariamente i principj, ond' erano compoſti, e tutto è in procinto di metterſi in nuova combinazione. Queſti fatti ormai innegabili ci accoſtano talmente al laboratorio della natura, che quaſi ci vien fatto di conoſcere dond' ella può trarre la produzione e perpetua riproduzione di tutti i ſali ond'è fecondo il mare, e che ci ha pur laſciati ſparſi e ſepolti nelle viſcere della terra abbandonandola, meſſi in libertà di unirſi i principj proſſimi di loro dietro al disfacimento degli animali marini. In fatti l' analiſi iſtituita dal fu illuſtre Sig. *Bergman* ſull' acqua del mare at-

tinta a 60 braccia di profondità nell' Oceano all' altezza dell' isole Canarie in distanza insigne dalle coste, ratifica mirabilmente questa conseguenza, e fa vedere, che il mare ha un certo fondo proprio di sali distinti da quelli che possono essere nel di lui seno apportati d' altronde, cioè i sali propriamente marini aventi per principio acido l' acido marino. Trovò quest' accuratissimo Fisico, che ogni Canna Svezzese d' acqua corrispondente un po più che a 131 pollici cubici parigini, contiene (opusc. T. 1. pag. 194.)

	Oncie	Grani
Sal marino a base di natro . . .	2	. . . 433
Sal marino a base di magnesia . .	,,	. . . 380
Selenite	,,	. . . 45

I principali sali pertanto del mare, e più abbondanti, che suoi proprj possono dirsi, sono i due sali marini a base di natro, e di magnesia, cioè una combinazione di quell' acido muriatico con quelle precise sustanze alcaline, che il fatto dimostra risiedere nella sostanza degli animali marini.

XXXI

Se dunque il mare può avere in sè, e ne' suoi stessi innumerabili viventi il fondo inesausto, i principj de' sali proprj, cessa d' essere un mistero la perpetua e costante salsedine del mare da essi procedente. Questa caratteristica proprietà dell' acque marine ha sempre dato che dire a' Fisici, e v' ebbe chi, tenendo opinione che vada ella crescendo continuamente, pensò che da' saggi fatti in diversi tempi se ne potesse ricavare l' età del mondo (*Halley* Transaz. angl. an. 1715). Parte degli uomini ravvisa nel fondo del mare miniere di sale, da cui si distribuisce la salsedine uniformemente, e si rinnova; parte ve la fa mantenere dalle sorgenti d' acque salse, che vi metton capo dalla terra; ed altri altrimenti si fa a rendere ragione di quest' ammirabile magistero. Che che però siasi di queste opinioni sarebbe abuso del tempo il combatterle or poi che co' fatti alla mano siamo venuti a capo di conoscere, che l' Oceano racchiude nel suo stesso seno le sustanze precise, ch' entrano nella composizione de' sali marini, e che quivi possono questi sali perpetuamente rigenerarsi, senza stra-

nieri sussidj, mantenendo del proprio la salsedine dell' acque. Gratuita pertanto è l' asserzione d' una salsedine uniforme in tutta la massa di loro col solo divario d' una maggiore intensità nelle parti meridionali, che non è nelle settentrionali, e del tutto arbitrario il supporvi un aumento regolare, da cui l'età del mondo possa legittimamente inferirsi. Imperciocchè in ragione non può avervi primamente uniformità, stante che, le osservazioni di fatto mostrando che in cento libbre d'acqua marina non si trovano disciolte quasi mai quattro libbre di sale, e potendone elle contenere fino a venticinque libbre, è cosa evidente, che non manca luogo all' intrusione d' altro sale moltissimo, e ad una varietà di proporzioni senza confine. E messi anche a parte i sali proprj, la quantità de' quali non può mai essere costante, fan capo nel mare tante acque non ispoglie di sali che dilavano l' esterno, e l' interno della terra nostra, e tante sustanze e sì varie ingoja egli nel vasto bacino terrestre che il contiene, che non può mai presumersi una diffusione uniforme di sali da per tutto. Ma se la ragione esclude una tale uniformità, l'esclude eziandio il fatto. Veggiamo l' analisi fatta dall' illustre Sig. *Lavoisier* (Mem. dell' accad. Reale del 1772.) di 40 libbre d' acqua marina attinta su la costa di Dieppe quattro leghe in mare. Egli vi trovò

	Oncie	Dramme	Grani
Terra Calcarea	„	4	56
Sal marino a base di natro . . .	8	6	32
Sal di Glauber, e sal d' epsom .	„	4	26
Sal marino magnesiano	1	„	„
Sal marino calcare misto col magnesiano	1	5	10

Qual differenza tra questi, e i risultamenti dell' analisi antecedente in differenti tratti di mare! Se ne' mari chiusi ed aperti, in diverse situazioni, a diverse profondità s' istituissero analisi egualmente accurate, sempre per mio avviso si troverebbe diversità di prodotti, e in diversa proporzione distribuiti. E' possibile dunque, che vada in qualche parte aumentandosi la salsedine, secondo l' opinione del Sig. *Halley*, e non è impossibile nè pure che il faccia regolarmente. Ma la possibilità istessa vale anche per una regolare diminuzione

in altra parte. Sarà però sempre vero, che mancherà in tutti i casi il principio della graduazione, e che l' incremento o il decremento, e la conceduta regolarità sarà sempre accidentale, parziale, e dipendente da singolari circostanze, non mai da legarsi col tutto, e molto meno col naturale, e sempre uniforme corso dell' età del mondo.

XXXII.

E qui basti l' essersi messi in via onde ravvisar da vicino nel mare medesimo una dimestica sorgente e intestina della salsedine indipendente da ogni esterno concorso di sali, quanto però atta a conservare il fondo stabile de' sali marini nativi, altrettanto pur essa suscettibile di variazione ne' varj tratti dell' Oceano. Imperciocchè la massa degli animali che vi nascono, periscono, e si rinnovano continuamente, è e deve essere variabile in diversi climi quant' altra produzione mai di natura, dietro a tante rivoluzioni che accadono tutto dì in quella smisurata conserva d' acque, la quale tanta parte occupa del globo che abitiamo. Qual meraviglia, se, come nella decomposizione degli esseri organici su la superficie della terra si genera il nitro, di cui i principj prossimi, cioè l' acido nitroso e la base alcalina, si sono preparati ed elaborati gradatamente in quell' operazione fermentativa da' materiali in quegli esseri preesistenti, del che non è ad uom sano conceduto ormai di dubitare, così dietro alla disorganizzazione de' viventi marini si formi nel mare il sal marino, i di cui principj prossimi, che abbiamo trovato risiedere nelle sostanze di loro in proprietà, e qualità di principj materiali, si preparino del pari, e si elaborino nella decomposizione, come de' principj accade del nitro nelle fermentazioni putride su la terra? Ma molto ancora resta da farsi prima di stabilire tra' fatti certi della natura un magistero non mai finora, ch' io sappia, nè pur sospettato, e di cui non facciamo che vedere un primo barlume.

Della Luce notturna del mare

XXXIII.

Ma donde è mai, che nelle analisi dell' acqua marina esposte qui innanzi non apparisca segno di alcuna sostanza bituminosa? Credevasi ne' tempi andati, che quest' acqua ne contenesse in copia, da cui e l' amaro, e il disgustoso traesse ella necessariamente e inseparabilmente. L' esperienza dimostra il contrario. Per l' esame che ne fece particolarmente l' illustre Sig. *Macquer* non se ne manifesta indizio alcuno. La stessa acqua salsa del Lago asfaltico, o Mar morto, che pur avrebbe dovuto più dell' altre per avventura trovarsi bituminosa, non ha vestigio di bitume, come il comprova l' analisi fattane espressamente da' Signori *Lavoisier*, *Sage*, e *Macquer*. Non ha dubbio, che indipendentemente da' sali di *Glauber* e dalle magnesie vitriolate, che possono introdursi nel mare per trasporto dalla terra, le acque marine ridotte a contenere anche i soli sali proprj nativi non possono non riuscire sempre disgustosamente amare, atteso il sal marino di magnesia che contengono, il quale è amarissimo per natura, senza necessità di ricorrere per questo ad alcun principio bituminoso. Ma oltre l' amarezza ha l' acqua marina un sapor nauseoso di mucido, il quale forse unito all' apparenza fosca, e ad una certa untuosità, che accompagnano quest' acqua, ha dato luogo all' illusione, e all' attribuirle un carattere bituminoso. Non è difficile il conoscere che questo sapore procede dalle materie estrattive degli animali, che vi periscono continuamente, e da queste propriamente si è, che mi sembra dipendere l' apparenza, che s' è detto. In fatti se i sali medesimi, tutti quanti sono, che avvenga di estrarre per un' accuratissima analisi da cento libbre d' acqua marina, si tornino ad infondere in cento libbre d' acqua distillata, onde rifare per sintesi l' acqua marina, non si otterrà mai di riaverla col sapore, colore, ed untuoso di prima. Al che facendo seria attenzione, e considerando, che questi caratteri sono inseparabili dall' acqua marina, col solo divario dal più al meno, e non unicamente proprj della superficie, una prima conseguenza

ſeguenza io ne traggo, che queſte materie animali ſono neceſſariamente diffuſe per tutta la maſſa dell' acqua, non già alla ſola ſuperficie coſtituite. Ma come vi ſon elle diſſeminate? Come ſatte miſcibili coll' acqua e nell' acqua diſſolubili? Queſta quiſtione diſcuſſa, e riſoluta a dovere ci apre un bell' adito, onde intendere e ſpiegare moltiſſimi fenomeni di grande importanza. Mi vi fo ſtrada con un appoſito eſperimento. Nel meſe di Maggio del 1784 avendo fatto peſtare una certa quantità di animali teſtacei freſchi, e tratti dalle conchiglie, ne poſi parte a putrefarſi all' aria libera, per un' oſſervazione di cui parlerò a luogo, e parte in un gran vaſe di vetro nell' acqua dolce, cui aveva attenzione di rimettere alla ſteſſa altezza a miſura che andava ſvaporando. Laſciando a parte la putrefazione a ſecco, di queſta nell' acqua dirò, che dopo alquanto tempo ſi formò una croſta bianca alla ſuperficie, da cui poco appreſſo uſcì una gran quantità di vermi. Indi tutto ſi disfece, e a poco a poco calò la materia al fondo. L' acqua reſtò ſempre giallaſtra, e mucilagginoſa, e poco dopo che ve ne aggiugneva di nuova per rimettere l' acqua ſvaporata, e agitava la materia, tornava la ſoſtanza gelatinoſa a diffonderſi, e ne reſtava coſtantemente carica tutta l' acqua del vaſe. Dopo undici meſi decantai al peſo di una dramma di queſt' eſtratto in un bicchiere, e allungatolo con due libbre d' acqua diſtillata, v' infuſi un' oncia di ſal comune brutto come appunto proviene dall' evaporazione ſpontanea dell' acqua marina nelle ſaline d' Iſtria. Coperto il vaſe laſciai queſto meſcuglio ſei giorni in ripoſo, dopo i quali dilicatamente decantato il liquore, lo filtrai due volte, e ripoſtolo in una boccetta il conſervo tuttora, ch' è il meſe di Settembre del 1785, ſenza che vi ſia fatta alcuna precipitazione. Il color foſco, il ſapore ſalſo ed amaro, il mucido inſeparabile, tutto avvicina talmente queſt' acqua marina artificiale alla naturale che mi ſon proccurato da Venezia, che può l' una per l' altra prenderſi indubitatamente. All' oppoſito avendo in que' dì medeſimi in due libbre d' acqua diſtillata meſſo un' oncia creſcente di quel ſal comune d' Iſtria, il che è un po più di quel che contengono ordinariamente due libbre d' acqua marina naturale, e avendo filtrata la diſſoluzione, queſt' acqua ſalſa artificiale nè all' apparenza, nè al ſapore

s' accostava per alcun modo a quella del mare, ed era pur dall' altra diversa in cui non altro aveavi oltre alla stessa quantità di sale, fuorchè la detta piccola dose di estratto animale, che ho detto. Non è dunque senza fondamento il credere che delle gelatinose sostanze degli animali che tutto dì periscono nel mare le parti crasse ed oleose possano e debbano coll' agitazione continua dell' acque marine combinarsi co' sali proprj e con quei che sono nel mare disseminati, tanto intimamente quanto basta per rendere il composto miscibile coll' acqua, siccome dimostra il fatto, prendendo un certo carattere saponoso tanto più deciso, e meglio dissolubile nell' acqua, quanto più a lungo vengano agitate e incorporate colle saline le sustanze animali. Al che sembrano già per sè disposti i sali essenziali degli animali in particolare, siccome quelli, nella composizione de' quali in istato naturale entrar debbono, se può dirsi, necessariamente parti oleose intimamente unite alle saline; di modo che possono riguardarsi come saponi naturali originarj, e perciò, indipendentemente eziandio da qualunque agitazione straniera, dissolubili nell' acque del mare naturalmente. Come però aveva conservato in vase di vetro la materia animale rimasta dietro alla prima decantazione, ho fatto un altro esperimento col versarvi sopra dell' acqua distillata, e per più giorni andar agitando e mescolando insieme il liquore con quel resto di gelatina cinque sei volte al giorno. Questa lunga agitazione non mancò di combinare nuova materia crassa colle saline, sì che potei prepararne un nuovo liquore saponoso per la fabbrica d' altra acqua marina artificiale. Il che valse pienamente a convincermi, che posta l' agitazione continua dell' acque del mare, almeno pel continuo e periodico fluire e refluire di loro, indipendentemente da ogni fluttuar più violento, poco assai della sustanza gelatinosa degli animali, che si disfanno nel mare, potea avervi, che in tal modo non si rendesse dissolubile nell' acqua, e coll' acqua miscibile in istato saponoso.

XXXIV

Ma per illuminarmi più e più intorno alla diffusione per questa via delle parti crasse degli animali per tutta la massa dell' acqua ho fatto questo esperimento. Trovandomi in Venezia presi un po' d' acqua marina da uno de' suoi canali, e in una pignatta vernicata la posi a riscaldarsi al fuoco, finchè per evaporazione, si riducesse alla quarta parte circa di quel ch' era da principio. Presi quindi a infondervi a poco a poco dell' alcali marino fatto prima caustico con un po' di calce. Agitava la dissoluzione con ispatola continuamente finchè svaporò la maggior parte dell' acqua, e prese il miscuglio consistenza di balsamo, di cui il colore era brunastro. Non ebbi difficoltà di accertarmi con sommo contento, che me n' era risultato un composto untuoso, avente qualità saponacea, e perfettamente dissolubile nell' acqua; il che certamente non poteva avvenire, se in quell' acqua marina non avesse trovato l' alcali materia oleosa disciolta con cui unirsi, la quale poi non poteva d' altronde per natura essere coll' acqua fatta miscibile, se in contatto ed unione con qualche sale non avesse di già preso antecedentemente un certo carattere, imperfetto come si vuole, di sapone. Non è però da tacersi essere assai difficile cosa, che il mare possa generalmente tanta materia animale contenere disciolta quanta ne contiene in particolare l' acqua de' canali in Venezia, procedente dalle abitazioni d' una grande e popolatissima città. Ma il risultamento non può andare che dal più al meno, salvo sempre l' effetto e la realtà di lui, che non può aver dubbio. Ed ecco anche per questa via ricavato un indizio non equivoco del trovarsi, dietro alla decomposizione giornaliera e perpetua degli esseri animali marini, disciolto per l' acqua del mare un composto animale, che l' acqua di lui distingue da un' acqua semplice in cui non altro che sali neutri e medj fossero disciolti, composto indubitatamente saponoso.

XXXV.

Ma così essendo, non è più sì malagevole l' aprirsi una via, onde assegnare origine e ragione d' uno de' più ammirabili fenomeni di natura, dell' infiammazione notturna del mare. Intorno alla causa di lui non tutti i Fisici convengono in opinione, altri a materia fosforica attribuendolo contenuta nel mare, altri a materia elettrica, ed altri moltissimi ancora da animalucci marini fosforici ripetendola concordemente. In vece di farne trattato, come la materia il potrebbe meritamente richiedere, esaminando e discutendo tutte queste sentenze d' uomini per ogni conto rispettabili, vo' piuttosto di primo lancio esporre i miei divisamenti su la fede delle sperienze qui innanzi descritte, lasciandomi guidare dalle osservazioni, e dalla ragione, persuaso che le cure spese in distruggere sieno meglio impiegate nel fabbricar di nuovo su buoni fondamenti. Accade di molti fenomeni naturali, che sieno dall' umana impazienza spiegati prima di essere per ogni verso conosciuti. Prima che fossero ben distinte le circostanze di questo fosforeggiamento, e prima che sull' intensità e indole di questa luce varia in varie parti de' mari conosciuti, e varia nello stesso mare alla superfizie, e sotto insigne profondità, il più degli uomini s' era acchetato del sistema de' nottiluci animaletti marini. E in fatti dopo di essere stati scoperti la prima volta, che io sappia, dal Sig. *Vianelli* nelle Venete lagune, ed osservati diligentemente, furono essi anche da altri rinvenuti, e in altri mari eziandio, come può vedersi nella Relazione del Sig. *Forster* in occasione del secondo viaggio fatto dal Sig. *Cook* in compagnia di lui; anzi di molte specie totalmente nuove ne ha fatto scoperta ultimamente nel mar Ligustico il sagacissimo Naturalista Sig. *Spallanzani* (Mem. della Società Italiana Tomo II. Parte II.), sì che non può più dubitarsi nè dell' esistenza di loro, nè della proprietà di fosforeggiar sul mare. Ma non è questa la sola luce fosforica che sul mare abbia luogo, come non è sola su la terra quella delle lucciole notturne, e non va confusa con la viva luce e scintillante che tramanda bene spesso il mare nottetempo in varie circostanze, di cui non mancano

esatte descrizioni presso moltissimi autori, e recentissime eziandio, tra le quali è quella dell' illustre Sig. Co. *Razoumovski* (Rozier Journ. de Phys. Janvier 1784 pag. 56) dottamente e giudiciosamente fatta del 1781 sul fiammeggiare del mar Baltico. Il Sig. *Canton*, Inglese osservatore, avendo posto alcuni pesci nell' acqua marina, osservò che allorchè cominciarono a infracidarsi prese la superficie dell' acqua una certa lucentezza, che prima non aveva. A questa osservazione appoggiandosi, e forse anche al sapere, ch' è proprio di moltissime sustanze organiche il fosforeggiare nell' infracidirsi, non esitò di attribuire la luce fosforica del mare a quella che v' induce nel putrefarsi il prodigioso numero di animali, che vi periscono. E questa pure è sentenza dall' altre distinta, com' è quella eziandio del Sig. *Forster*, il quale all' acido fosforico de' medesimi animali putrefatti un tal fosforeggiar del mare in certi casi attribuisce, delle quali ho creduto d' uopo il fare particolar menzione e parola, perchè non vengano confuse con quella che siamo qui appresso per esporre. Non ha dubbio, che da principio gli animali, che periscono nel mare, si gonfiano, e s' alzano alla superficie. Questo è il caso del fosforeggiare di quelle sustanze, come d' altre s' è da gran tempo osservato, ne' primi movimenti intestini di fermentazione che vi si eccitano, prima di giugnere all' ultimo grado della putrefazione, dietro a' quali le loro parti si rammollíscono, e perdendo a poco a poco la coesione si disuniscono finalmente. Il fosforeggiamento dunque del mare attribuito alla lucentezza degli animali in questa circostanza del Sig. *Canton* si riduce alla superficie dell' acqua, ed è attaccato a' primi gradi della putrida fermentazione che può alla superficie di lei operarsi. Ciò ben inteso, tutt' altra sentenza certamente da questa del Sig. *Canton* verrà giudicata quella, in cui si ricorra ad una diffusione della sostanza animale in perfetta dissoluzione per l' acque del mare, e in tutta la loro massa dalla superficie al fondo; il che totalmente decomposti suppone gli animali, e in altre combinazioni assortiti i loro principj prossimi per essere dissolubili nell' acqua, come a' Fisici è ben noto.

XXXVI.

Io dunque credo, che come diversi sono i gradi di questo fosforeggiare, diversa l' indole della luce che si manifesta agli occhi sul mare in diverse circostanze, e diversi i caratteri che l' accompagnano, così essenzialmente distinte possano essere l' una dall' altra le varie luci fosforiche, che appariscono sul mare nottetempo. Per la qual cosa e quello degli animalucci, e quello del Sig. *Canton*, ed altri tali fosforeggiamenti possono aver luogo in diversi casi, repugnando il fatto all' assegnare a tutti una medesima origine. Ed è possibile eziandio che se ne generi in qualche circostanza per abbondantissimo concorso di molusche, o di altre produzioni marine, che cuoprono talvolta a tratti il mare di sustanze mucellagginose piene zeppe di viventi; di che si fa menzione nel terzo viaggio di *Cook* al mar Pacifico Vol. 5 Lib. 3 Cap. 13 dell' edizione francese, e nel secondo eziandio del Sig. *Forster* soprannominato. Ma conviene ben distinguere il tranquillo luccicar del mare in qualche momento dal suo fiammeggiare in tempo di forte agitazione e scuotimento, come l' osservò il predetto Sig. *Forster*, il primo de' quali non mostra certamente di avere sempre comune l' origine col secondo; ed è pur essenziale il far attenzione a' tratti di mare, ove questo accade, alla profonda diffusione di lui, all' intensità della luce, che tramanda per non confonderlo col primo, e soprattutto vuol essere atteso distintamente il fenomeno capitale che lo accompagna del mostrarsi inerente in tutta la massa dell' acque marine, non alla sola superficie, o poco sotto, una materia, la quale bruscamente e fortemente scossa mandi dall' acqua non una debole luce, ma quasi fiamma, e sprizzo di fuoco messo in libertà. Quest' infuocamento si manifesta particolarmente di notte nelle grandi ondulazioni dell' acque del mare, quando si spezzano le onde, e più sovente ne' profondi solchi fatti da' vascelli in corso, ove le falde s' infiammano e gettano fuoco, e più nel ripercuotersi che fanno insieme al riempiersi del solco. Talvolta si osservano nelle grandi burrasche uscir nelle collisioni de' flutti come ruscelli di fuoco, e sopra tutto le spume abbon-

dantissime, che si generano in queste occasioni, sembrano tutte infiammate. E di questo fiammeggiare parlando il Sig. *Spallanzani* si è, che il crede proprio inseparabilmente dell' acque marine; nel che vedremo apporsi egli al vero qui appresso ancorchè ingenuamente confessi di non aver presentemente alla mano fuorchè conghietture intorno all' origine di un tanto fenomeno. Desidero che le sperienze, ch' ei si propone di fare, ratifichino quello che qui son per dire su questo argomento.

XXXVII.

Lasciando intanto da parte gli altri particolari ed accidentali fosforeggiamenti, che or da congerie di animaletti nottiluci, come s' è detto, or da molusche, ed or dall' una or dall' altra delle cagioni addotte da' Fisici possono essere originati, a questo singolarmente, che da magistero più recondito deriva, volgiamo il pensiero. Fatto innegabile si è, che tutto ciò che ha vita nel mare, perisce pur nel mare, generalmente parlando, e nel mar si decompone. Dunque della prodigiosa quantità di esseri organici, che vi si producono, e disfanno continuamente, e si riproducono per perirvi di nuovo con quella stessa perpetua circolazione, che ammiriamo in tutte le altre classi di esseri vegetabili e animali del nostro sistema terrestre, parte deposita morendo nell' Oceano e restituisce separati i principj, ond' era organizzata, e parte a vicenda ne riassume di nuovi, e prende a vivere. Altro fatto pertanto da non potersi negare sarà, essere l' Oceano un vasto deposito di simili principj, altri in ufficio, operosi, e combinati nell' organizzazione degli esseri viventi, ed altri inoperosi, come accade su la terra, e nell' atmosfera, che ci circonda, per poco che vi si rifletta. E appunto le sperienze, che abbiamo esposto ne' §. §. XXXIII. e XXXIV. nel dimostrare ad evidenza, che i principj gelatinosi degli animali marini diventano col tempo nell' acqua un composto saponoso, palesano chiaramente il carattere che prendono questi principj che ho detto inoperosi nell' Oceano, che però non lo sono, come vedremo. Disgregate le parti costituenti, le terrose puramente, non combinate con alcun principio, precipitano

necessariamente al fondo ; ma dell' altre, oltre i sali , tutte quelle, che contengono olio , rientrano in dissoluzione nell' acque del mare, e vi si mantengono non per via meccanica puramente, ma sì bene per l' intermezzo de' principj salini, che le rendono miscibili coll'acqua. Imperciocchè e gli olj, che sotto forme di grassi non sono propriamente combinati con altri principj animali, e quelli che generalmente sono involti nelle sustanze gelatinose, tutti quanti sono, trovano presenti da ogni canto de' principj salini, che hanno azione sopra di loro, sì che presto o tardi con essi si combinano formando de' composti saponosi, i quali si rendono per questo mezzo perfettamente dissolubili nell' acqua. Ammessa pertanto, che non può non ammettersi, la formazione necessaria nel mare di queste sustanze saponose, dietro al disfacimento de' corpi organici, che vi periscono, e vi si decompongono tutto dì, concepiamo immediatamente il facile e sì copioso generarsi delle spume nell'acque marine agitate, e donde abbia origine non alla sola superficie, ma in tutta la massa dell' acque il mucido, che le accompagna, il nauseoso. Sfugge tutto ciò nelle analisi, e non restano per prodotto che i sali; ma non è per questo men vero, essere un tal carattere saponaceo distintivo e proprio dell' acque del mare. Di qua per avventura viene quell' apparenza bituminosa, che non pel solo amaro s' è a quest' acque attribuito. Che cosa sono i bitumi? Composti di sustanze oleose e di materie saline. La proprietà caratteristica de' bitumi è di cominciar dall' essere materie saponose, e non è che col tempo che di saponi diventano elle bitumi. I bitumi per mio avviso non sono che vecchj saponi. Questo principio, questo germe, se così può dirsi, esiste in tutte l' acque marine, ove vivono animali, dal che contraggon esse a lungo andare un certo che di preparazione bituminosa, per così esprimermi, abbozzata. Anzi non sono lontano dal credere che molta parte de' bitumi fossili tragga particolarmente la sua origine da' depositi di sustanze organiche fattivi dal mare, e per vetustà divenuti bituminosi. Ciò si potrebbe provare con molti fatti, se qui cadesse in acconcio l' argomento.

XXXVIII.

XXXVIII.

Ma se deve essere incontrastabilmente inerente in tutta la massa dell'acque marine questa sostanza saponosa animale, del che non può dubitarsi, se tanta parte de' viventi nell'Oceano si risolve finalmente, e termina coll' aumentarne tutto dì la massa in dissoluzione, come in tanti secoli e dietro alla disorganizzazione di tanta immensità di animali, che vi sono periti necessariamente, non se n' è saziato, per così dire, l' Oceano, ed è sì lontano dall' esserlo? Quistione che può farsi ragionevolmente gravissima, e di non facile risoluzione, se non venga alla mente di ricorrere a quell' ammirabile economia con cui natura provvede alla sussistenza di tutti gli esseri, che di continuo nutrimento e risacimento abbisognano. Raccogliamoci pertanto a considerare profondamente ciò che accade sotto gli occhi nostri. Al perire e disfarsi continuo di tanti vegetabili, di tanti animali su la terra che abitiamo, è contemporaneo pure il nutricarsi, e il ricrescere d' altri successivi esseri, che sottentrano a goder della vita. Le spoglie, i principj disgregati degli estinti riformano le spoglie, i principj aggregati, e costitutivi de' viventi con un' ammirabile circolazione, la quale assolve da nuove creazioni, e concilia la sussistenza e conservazione di tutto col rimpastare, e adoperar sotto varie forme la quantità determinata di materia, che costituisce il sistema terrestre.

Ed ecco con qual segreto magistero un certo equilibrio pure si mantiene nell' Oceano, servendo gli estinti per pascolo della vita, per incremento degli esseri rinascenti, sì che la sostanza di quelli non è altramente inoperosa, nè può crescere a dismisura, rientrando di mano in mano nel circolo delle sostanze in opera, necessarie alla vitale costituzione di questi. E così la quistione è risoluta, e può molto bene intendersi perchè sia tanto lontano il mare dall' essere satollo di spoglie de' suoi morti abitatori, e limitate, non a ribocco, vi sieno in dissoluzione le sustanze oleose combinate, che dicemmo.

XXXIX.

E qui siamo pervenuti al segno, onde muovere per la spie-

gazione, secondo che a me pare, chiarissima dell' infiammarsi dell' acque marine in certe circostanze. Tosto che siamo convinti dalla ragione e dal fatto della presenza di quelle sustanze disciolte per l' acqua, inerenti e diffuse in ogni parte, e non possiamo dubitare, che in quelle non risieda copiosissimo il fuoco, anzi nella più grande abbondanza, e direi quasi come in luogo nativo, la luce, che sprizza dal mare violentemente scosso, viene indubitatamente dalla libertà ed azione in cui è messo quel fuoco combinato. Imperciocchè è certo che il suo più vivo manifestarsi accade allorchè le parti, ov' egli risiede in istato oleoso, sono fortemente percosse, e messe in potentissimo fregamento. In questo stato risulta senza dubbio nella massa dell' acqua un moto intestino di oscillazioni o vibrazioni di tutte le sue parti, tanto più forte quant' è più gagliardo lo scuotimento. Quindi un riscaldamento dee succedere necessariamente, e aver luogo nell' acqua, come l' avrebbe in ogni altro corpo solido le di cui parti fossero in simili circostanze costituite. In fatti il Sig. *Phips* trovò, che il mercurio di un termometro dal grado 50.° in cui era poco prima alla temperatura dell' acqua del mare non agitato, balzò al grado 62.° immerso nel mare scosso, e burrascoso. Ma non ha bisogno di essere verificato coll' esperienza ciò che dal fatto è tutto dì confermato pienamente. Pertanto in proporzione dell' intensità di questo riscaldamento, e della successiva dilatazione di quella sostanza saponosa, che si trova inerente nell' acqua marina, prende il fuoco contenuto a sloggiarsi, a rompere i suoi vincoli, e farsi più o men libero, attivo, e manifesto fuor d' acqua, avendovi, oltre all' aria deflogisticata somministrata dall' acqua medesima, presente quella che fa parte dell' atmosfera in contatto, e tutto in opera ciò che può sviluppare in un baleno il principio infiammabile da' corpi che il contengono. Voglia o no da' Fisici attribuirsi la luce di tutte le sustanze fosforiche ad una combustione lenta e debole quant' esser si voglia, d' una certa quantità di flogistico, ch' è in esse contenuto, il caso del mare luminoso va distinto da quello de' corpi fosforici, ne' quali il principio infiammabile può essere straniero. Imperciocchè le sostanze, onde ripetiamo il fuoco che si manifesta nel mare, son vere e reali materie

combuſtibili o infiammabili , ove la materia del fuoco entra come principio coſtituente . Quindi è , che portate elle per iſcuotimento, come dicemmo , a calore , e da queſto ad incandeſcenza , producono tutti i fenomeni del fuoco in azione , come fanno le ſuſtanze combuſtibili . E qui veggiamo appunto verificarſi ciò che accade per queſta parte di tutte le ſoſtanze vegetabili ed animali decompoſte, nelle ſpoglie di cui reſta appiattato il fuoco, e ſprizza libero in tante guiſe per ſin da' letamaj , da' cimiterj , dalle fogne , e continuamente poi con lievi ſcuotimenti ſotto forma d' aria infiammabile dalle paludi , dalle foſſe, dall' acque ſtagnanti, come l' ha sì bene eſpreſſo , e ricavato in tante guiſe il celebre Sig. *Aleſſandro Volta* , come a tutti è noto . Quello ch' eſce dal mare è della ſteſſa natura, dalle ſteſſe cauſe procede, ed ha l' origine anch' eſſo dalle ſoſtanze organiche decompoſte, che vi ſono inerenti e ſparſe dappertutto, e ſegnatamente da quelle che il fuoco racchiudono in iſtato oleoſo . In queſto modo la proprietà del mare di diventar ardente e luminoſo nottetempo , diſtinta da quella che accidentalmente può avere per altre cagioni recate in campo da' Fiſici, non è della ſuperficie di lui ſolamente , ma di tutte le profondità , e inſeparabile dall' acque marine . E s' intende poi come una tal luce , e in qual ſenſo debba dirſi foſforica , atteſo che proviene ella da vera combuſtione d' una certa quantità di flogiſtico contenuta in quelle organiche materie . Quindi è che come dipende la quantità di queſte ſoſtanze diſciolte dalla quantità de' corpi organici , che ſi decompongono , maggiore in una che in altra parte del mare , ſecondo che di quegli eſſeri è egli più in una che in altra parte popolato; così la quantità di fuoco in procinto di metterſi in libertà diverrà per queſto conto più in una , che in altra parte dell' Oceano abbondante . Ma l' azione di lui , e in conſeguenza il fiammeggiar del mare, dipenderà eziandio, in parità di copia , dall' eſſere la materia nel convenevole ſtato di attenuazione , dalla vibrazione e oſcillazione più o men forte, che le ſarà impreſſa, dal modo con cui verrà ella ſcoſſa ed agitata ; come pure il renderſi ſenſibile agli occhi più o meno in diverſe occaſioni dipenderà dalle ſtagioni per avventura, dalla temperatura, e dallo ſtato umido o ſecco dell'

atmosfera, dal soffiar de' venti, e da altre tali circostanze.

Quindi tutte le variazioni alle quali questo bel fenomeno va soggetto, il non darne alcun segno in moltissime occasioni, e in altre moltissime il rendersi cospicuo per grandi tratti di mare, e l' intensità di lui diversa in diversi mari, e ne' diversi tratti dell' istesso mare. E non è in oltre da tacersi la considerazione che so non inopportuna dell' essere indispensabile per la verificazione di queste accensioni, che le sustanze organiche disciolte per l' acque del mare contenenti il principio infiammabile sieno all' ultimo grado di putrefazione pervenute sì, che, come quelle delle paludi e degli altri ammassi putrefatti, si trovino in procinto di dar uscita ad un *gas* infiammabile, e al fuoco libero eziandio, dietro all' incandescenza indotta per collisione e agitazione più gagliarda. Ed è sì fatta condizione talmente necessaria, che sarebbe senza di essa inutile il concorso di tutte le altre circostanze favorevoli per la produzione di un tal fenomeno, come accade tutto dì ne' cimenti che si fanno su le materie animali e vegetali, dalle quali non esce il *gas* infiammabile, se naturalmente o per opera d' intermezzo straniero non son esse decomposte.

Della decomposizione del sal marino

XL.

Ma se qualche barlume abbiamo conseguito precedentemente intorno al sal marino, e a' principj prossimi di lui, che abbiamo veduto risiedere negli animali viventi dell' Oceano; e se dal trovarsi al natro libero congiunta la magnesia ne' medesimi animali, traluce pur chiaro non essere accidentale la costante unione nel mare de' sali marini a base di natro, e di magnesia, non s' è però aperto ancora alcun adito, onde comprendere di quai mezzi si serva la natura per decomporre questi sali, se mai il fa, e segnatamente il primo ch' è perfettamente neutro. Imperciocchè può sempre muoversi quistione, come l' abbiamo toccato altrove, se que' principj liberi negli animali vi sieno in quello stato di separazione primigenj, o provenuti da' sali marini decomposti. Ancorchè

dunque, come della terra calcarea s' è detto al §. XXIX. per rispetto agli esseri organizzati, possa del natro e della magnesia dirsi parimente non essere repugnante in natura l' esistenza di loro indipendente dal sal marino, non sarà fuor di proposito il fare qualche trattazione particolare della decomposizione di lui, sì perchè l' argomento è utilissimo in sè, e sì ancora perchè verremo a conoscere a quali potenti azioni sia d' uopo ricorrere per ottenerla.

XLI.

Non v' ha sale in natura il quale da sè possa decomporsi giammai, se un agente straniero non s' interponga, il quale esercitando un' affinità prevalente sopra uno de' due principj prossimi del sale, lasci isolato l' altro, e il metta in libertà. Si scorrano tutti i processi della Chimica sopra i sali, tutte le tramutazioni, tutte le precipitazioni, non si troverà giammai caso in cui siasi fatta una decomposizione che a questo principio non si riduca, e in cui non possa additarsi la presenza di tale o tal altro intermezzo, che l' abbia operata. Posto ciò la quistione del decomporre il sal marino si riduce a quella del trovare un agente il quale o prevalendo all' alcali fisso in affinità coll' acido marino, metta l' alcali in libertà, o prevalendo all' acido marino in affinità coll' alcali, lasci libero e isolato l' acido marino. E come in tutti e due i casi un solo de' principj è libero, e ricombinato l' altro, è bensì fatta la decomposizione del sale, ma per avere anche l' altro principio di lui libero totalmente è necessario di nuovo, che la ricombinazione accaduta si disfaccia sì, che quel principio resti anch' esso sciolto ed isolato, come l' altro. Ed eccoci in via onde cercare la libertà di entrambi i principj costitutivi del sal marino. Ma lasciando a parte i processi per rispetto all' acido marino, triti e notissimi, rivoltiamoci a quello che più importa, ch' è di ottenere l' alcali fisso, il natro disimpegnato e libero, qualunque sia il nuovo stato della parte acida discacciata. Due strade ci si offeriscono da considerare per quest' oggetto, immediata l' una, e l' altra mediata, di cui si fe cenno qui innanzi, cioè quella di far invadere l' acido a qualche sustanza, perchè resti

libero l' alcali, e l' altra di rapir l' alcali all' acido marino con un intermezzo il quale ſia in appreſſo molto più agevole da ſloggiarſi, che non era di primo lancio l' acido marino. E quanto alla prima, è certo, che vuol eſſere fiſſa quella ſuſtanza, e più che non è il natro affine all' acido muriatico, perchè poſſa impadronirſi di queſt' acido, e mettere il natro in libertà. Ma per tutte le ſperienze, e i tentativi fatti ſino al dì d' oggi non ſe n' è conoſciuta alcuna ne' regni della natura, la quale compiutamente abbia precipitato l' alcali fiſſo totalmente libero e puro dal ſal marino. E qui non ſia chi equivochi buonamente intorno al decomporſi di queſto ſale che ſi fa per arte tutto dì, che non va confuſo con quello in cui ſia l' alcali compiutamente liberato dall' acido marino, e fatto libero per opera di affinità ſemplice. Il caſo del Sig. *Bergman*, di cui farò menzione in fine di queſta Memoria, ſe riceveſſe quell' univerſale ſanzione, che richiedono i fatti capitali nella Fiſica, ſarebbe per grande avventura la vera decompoſizione, di cui qui ſi fa parola, e il ſarebbe pure l' altro proceſſo col litargirio già noto, ſe la decompoſizione rieſciſſe compiuta e totale, e aveſſe egli i caratteri che ſi dimandano per eſſere uſato in grande, prontamente, ed economicamente. Intanto è certo, che nè pure il fuoco, quell' agente potentiſſimo di natura, cui par che non reſiſta alcuna coſa, il più fiſſo per avventura di tutti, è ſtato valevole a compier l' opera per quanti ſaggi n' abbiano fatto, e ripetuto i più valenti Fiſici. S' è dovuto conchiudere ſempre, che l' acido marino non ha diſpoſizione a combinarſi con lui, e che non è egli l' agente proprio per la decompoſizione del ſal marino, il che fa intanto comprendere, che il liberar l' alcali dal legame coll' acido marino direttamente, immediatamente, e compiutamente, non è operazione comune, e da appropriarſi leggermente o all' attenuarſi ſenza confine del ſale nel far parte ſoſtanziale degli eſſeri organici (che non è poi che una meccanica diviſione, non mai una vera decompoſizione), o alla combuſtione anche la più violenta, che non fa che renderlo volatile, e ſublimarlo eziandio, non mai decomporlo veramente. Sinchè dunque per un tal verſo ſtanno entro sì ſtretti limiti coſtituite le noſtre cognizioni, e ſinchè qualche nuova

affinità prepotente di sustanza tuttora non cimentata non si discuopra che disimpegni l' alcali perfettamente , e in tutta la sua purità , non è tempo perduto l' appigliarsi all' altro partito, onde s' è fatto parola, in cui non sono certamente tutti messi in opera i mezzi più acconci, onde ottenere l'alcali puro che ricerchiamo con due operazioni successive.

XLII.

Avendo in mira un profitto in grande, e non ristretto a' puri saggi di laboratorio, due soli possono dirsi gli acidi familiari e abbondanti , onde possiamo con la prima delle due operazioni scacciare l' acido muriatico dal sal marino, e prepararsi alla seconda col facile , comune , e notissimo mezzo della combustione, cioè l' acido nitroso e il vitriuolico. Ma di nuovo nè l' abbondanza dell' acido nitroso libero , nè il prezzo di lui, e nè meno la copia de' nitri nativi, non possono forse giammai prometterci riuscimento in grande da preferirsi a quello che può venirne coll' uso de' sali medj vitriuolici di cui riboccano le viscere della terra . E quand' anche, com' è avvenuto di scorgere all' illustre Naturalista Sig. *Fortis* a Molfeta nel Regno di Napoli con insigne profitto del Governo, e non senza laude ed onore di lui per la singolarità del caso, e per la ricchezza del prodotto, si trovasse in gran copia qua e là ammassato il nitro spontaneo, o il si potesse abbondantemente procacciare coll' arte, è egli un sale per sè troppo prezioso alle arti , perchè debba cedere ad altri usi , e a' bisogni dell' alcali marino che possono in altro modo soddisfarsi . Per esclusione adunque , senza che mi fatichi a dimostrarlo più minutamente, siamo pervenuti a trovare più acconcio l' uso dell' acido vitriuolico per la prima decomposizione del sal marino, parlando sempre di operazioni in grande , giacchè , come s' è detto , n' è sì grande la copia, e a sì vil prezzo, combinato con basi metalliche e terrose sotterra. E' noto, che mescolando il sal marino con qualcuno di questi sali vitriuolici metallici o terrosi, e sottomettendo il mescuglio a gagliardo fuoco , si ottiene di sloggiare dall' alcali fisso del sal comune l' acido marino, di sostituirvi il vitriuolico , e di formare il sal di Glauber , il natro

vitriolato. E si sa pure che col flogistico si torna poi, ch'è la seconda operazione, a sloggiar l' acido vitriuolico, mettendo in piena libertà l' alcali marino. Astenendomi pertanto dal rimembrare qui altri processi comuni, conosciuti dagl' intendenti, e praticati in varie fabbriche, mi contenterò di esporre ciò che m' è riuscito di scuoprire di nuovo intorno alla prima operazione, cioè intorno al fare il sal di *Glauber*. Dirò poi quello che ho sperimentato intorno alla seconda.

XLIII.

Qualora vogliamo fare attento esame sopra un' infinità di fenomeni, che intravengono ne' regni di natura tutto dì per ispontanee operazioni, non havvi per avventura momento in cui non siamo in grado di sorprendere nell' atto del farsi e conversioni, e tramutazioni maravigliose. Elle non sono ordinariamente che opere di affinità esercitate, ed effettuatesi in silenzio gradatamente per contatto di sostanze tendenti ad unirsi, e coll' ajuto d' altri intermezzi sussidiarj, come sono il calore, l' aria, l' acqua, ed altri tali agenti, alcuni de' quali entrano pure a far parte integrante delle nuove produzioni, ed altri non sono che veicoli delle traslazioni e permutazioni di principj, che succedono tacitamente. La sola produzione del vitriuolo e dell' allume per ispontanea decomposizione delle piriti marziali ne sia d' esempio, quant' altro mai, luminoso e familiare. Non manca agli uomini, che la pazienza, frettolosi di veder tutto sul momento, e non riflettendo, che moltissime operazioni non si fan dalla natura che con lentore, avuta anche l' attenzione di prepararle il laboratorio, e di mettere le sostanze operaje nelle convenevoli circostanze. Si crederebbe, che mescolando poco più di due parti di vitriuolo marziale, ed una di sal marino, mantenendovi un po d' umido, agitando di tempo in tempo il mescuglio, a capo di quaranta o cinquanta giorni non si trova più vestigio di sal marino, nè di vitriuolo, e un perfetto sal di *Glauber* vi si genera, e prende il luogo di tutti e due? Questo bel fenomeno è il prodotto di doppia decomposizione operata dalla natura in silenzio. Io ho ripetuto l' esperienza più volte, e l' ha pur ripetuta qualche mio amico, senz' altro umido,

umido, che il naturale dell' acqua di criſtallizzazione de' due ſali meſcolati, e ſi è ſempre conſeguito il ſal di *Glauber* ben caratterizzato. Compariſce egli peraltro talmente legato con la terra marziale, che le filtrazioni non poſſono altramente ſepararli. L' eſpediente prontiſſimo che ho trovato per una compiuta ſeparazione è quello di una forte calcinazione per alcuni minuti di tempo; sì che non dubitai di conchiudere, che non era pura ocra marziale quella ſuſtanza sì aderente al ſale di *Glauber*, che andava con eſſo in diſſoluzione nell' acqua, e paſſava pel filtro, ma in gran parte ſale marino a baſe di ferro, ſattaſi non la ſola combinazione dell' acido vitriuolico col natro, ma quella eziandio dell' acido marino sloggiato dal vitriuolico col ferro da queſto abbandonato; e quella calcinazione era poi baſtevole a decomporlo. Ed ecco per queſta via intanto fatta la prima decompoſizione, e ottenuto il ſale prezioſo di *Glauber* non con altra ſpeſa, che con quella del ſal marino e del vitriuolo, la quale può eſſere tenuiſſima in grande, trattandoſi di prodotti comuni, e del ſal marino particolarmente, il quale nelle regioni marittime può ridurſi a viliſſimo prezzo, e non con altro proceſſo che di meſcolare i due ſali vitriuolico e marino nella doſe detta qui ſopra, e abbandonar a natura l' operazione. L' avere altra volta trovato, e confermato con incontraſtabili ſperienze, che il ſal marino vien decompoſto dal nitro terroſo, col ſolo tenere meſcolati e un po umidi i due ſali, ſenz' altre operazioni ſuſſidiarie, m' induſſe a tentare la ſteſſa decompoſizione mettendo col marino in contatto un vitriuolo di marte, e vi ſono riuſcito perfettamente; il che certamente prima d' ora non era noto, come me ne ſono accertato col riandare i migliori e più applauditi trattati di Chimica, diſpoſto com' era a darne laude a chi m' aveſſe in queſto utiliſſimo e facile proceſſo prevenuto. Del che può anche indirettamente far fede il prezzo officinale del ſal mirabile che tuttavia ſuſſiſte in Europa, e del non eſſerſi, come troppo diſpendioſo, ſoſtituito giammai a' ſali d' Epſom, e a' ſali analoghi, il ſal mirabile da preferirſi per ogni conto a tutti i ſali cattartici conoſciuti. Mentre ſe la compoſizione n' è sì facile, e sì lieve il prezzo che può avere, in qualche parte avrebbe preſo piede, ſe il proceſſo foſſe ſtato diſcoperto da qualcuno. Se ſi conſideri

che 100 libbre di ſal di *Glauber* criſtallizzato ne contengono ſecondo il *Bergman* 15 di natro, 27 d' acido vitriuolico, e 58 d' acqua di criſtallizzazione, e che 100 libbre di ſal marino criſtallizzato ne contengono 42 di natro, 52 d' acido marino, e 6 di acqua, e che finalmente 100 libbre di vitriuolo marziale criſtallizzato ne contengono 23 di ferro, 39 d' acido vitriuolico, e 38 di acqua, con un facile calcolo ſi troverà che meſcolando parti $2\frac{6}{21}$ di ſal marino con parti $4\frac{24}{19}$ di vetriuolo marziale, ſi può ottenere parti $6\frac{2}{3}$ di ſal mirabile di *Glauber* criſtallizzato. E qui appariſce il grande utile di queſto trovato, avuto rifleſſo al lieve prezzo de' ſali ingredienti, e alla quantità del ſale glauberiano che ne riſulta, non eſſendo da farſi alcun caſo della calcinazione neceſſaria per la decompoſizione finale, che s' è detto, del ſal marino a baſe di ferro, e ſeparazione ſucceſſiva dell' ocra marziale. Il tempo preſcritto de' 50 giorni in circa di ripoſo per la decompoſizione mutua de' ſali vitriuolico e marino ſi accorcia moltiſſimo, ſe i ſali non ſieno tanto impuri, sì che il contatto loro non ſia turbato da ſtraniere materie. S' è pertanto ottenuto di rapire l' alcali all' acido marino con un mezzo aſſai ſemplice, e di averlo in combinazione nel ſal di *Glauber* con un acido ſu cui il fuoco ha azione, come a tutti è noto, più che non ha l' alcali fiſſo con cui è combinato.

XLIV.

Quanto dunque alla ſeconda operazione inteſa a diſciorre col fuoco queſto nuovo legame, e a sloggiare dall' alcali l' acido vetriuolico, onde conſeguir libero e puro il natro che cerchiamo, eſſendo ella notiſſima e familiare agl' intendenti, m' avviſai di far coſa non ancor fatta, ch' io ſappia, cioè di condurre a termine una vetrificazione compiutamente meſcolando ſu le prime ſal di *Glauber* con rena (Macquer Dict. de Chim. ſec. edit. Tom. III. pag, 463.). Si doveva in queſto proceſſo vedere gradatamente, per l' affinità grandiſſima e primaria che ha l' acido vitriuolico col flogiſtico, generarſi da principio un vero zolfo, e queſto poi bruciarſi; fatto poi libero l' alcali, diventar egli fondente immediato della rena, e compierſi indi a poco la vetrificazione. A queſt' oggetto per eſſere ſpettatore di tutto volli far l' operazione ſu' car-

boni accesi colla lampana, e col soffietto a bocca coll' ajuto di pratica persona, e avvezza a far uso di simili ordigni. Prese pertanto dodici parti di sal di *Glauber* sfarinato, e otto di quella rena finissima, che si adopera nelle fabbriche di Murano, e mescolate insieme, si sottopose il mescuglio alla fusione sopra un grossissimo pezzo di carbone, ove s' era scavato e preparato con altri carboni sussidiarj un fornello a riverbero. Da principio si liquefece il sale, indi si rapprese, e s' indurò la massa. Poco dopo cominciò ella a diventar pastosa, e a bollire a scroscio; poi apparvero alcune macchie alla superficie, le quali allargandosi mandavano una fiamma giallognola, e più e più carica successivamente. L' odore che n' usciva era di zolfo. Ma poco appresso si vide per ogni parte fiammeggiare il zolfo patentissimo, il quale andava formandosi e dissipandosi di mano in mano per combustione, e singolarmente di sotto nell' alzare che facevasi con un ferro la massa in fusione. Si sospese il lavoro, e lasciata raffreddare la materia, aveva ella un color rosso oscuro, e un odore insoffribile, e fetente. Vi riconobbi manifestamente il fegato di zolfo, il che dimostrava che già aveavi dell' alcali libero combinato col zolfo non ancora combusto. Ripresi pochi dì dopo l' operazione sul fegato, e cominciò a scemare sotto l' azione del fuoco la materia, e cessò finalmente di comparire fiamma di zolfo. La massa prese indi a filare, come vetro fuso, e poco dopo cessato il lavoro, e raffreddata la materia, n' ebbi un vetro deciso trasparente. Il tutto insieme si fece in poco più di 50 minuti.

XLV.

Se vogliamo pertanto dar fede a' fatti, non ha dubbio, che parecchi vantaggi possiamo da queste sperienze ricavare. E primamente è certo che col più facile e men dispendioso processo che possa immaginarsi potremo proccurarci in avvenire il sal mirabile; sale prezioso in sè quant' altri mai, quand' anche il si consideri dal canto solamente della medicina in qualità di sal cattartico, più acconcio incomparabilmente de' terrosi che sono in uso d' Epsom, di Sedlitz, di Modena, e di altri simili a base di magnesia, sbandendo dalle officine il

pretefo fale d' Inghilterra, che dalle acque-madri delle faline Lorenefi proviene, e di cui il baffo prezzo rende tollerabile il naufeofo, l' irritante del fal marino terrofo che vi predomina. Secondariamente apprendiamo non occorrere altri intermezzi per trar l' alcali dal fegato di zolfo, fuorchè la continuazione del fuoco, sì che poffiamo prometterci di ottenere con la fola combuftione del zolfo foftenuta il natro in tutta la più defiderabile purità; e fi conofce in oltre, che per l' arte vetraria non è d' uopo fare anticipatamente feparata decompofizione del fal mirabile, compiendo il fuoco da sè tutti i paffaggi, e tutte le operazioni fucceffivamente sì del decomporre quel fale, che del diffipare il zolfo, e del convertire per fine in fondente l' alcali meffo in totale libertà.

Del promuovere la raccolta dell' alcali-bafe del fal marino

XLVI.

E qui cogliendo il frutto di tutte le difamine precedenti ci faremo a riandare, e mettere a profitto i mezzi più acconcj, onde promuovere vie più a pro delle arti la produzione dell' alcali marino, della cui natura è or fatta più intima cognizione, che non era per l' addietro. Lafciamo pertanto a parte quello di cui s' è fatto qui innanzi trattazione particolare, confiftente nel ricavare queft' alcali per decompofizione del fal marino direttamente, mezzo ch' è pur praticabile in grande con moderatiffima fpefa, e non fenza vantaggio dell' arte vetraria fingolarmente ficcome abbiamo veduto, attefa la facilità che abbiamo fcoperto di confeguire il natro vitriolato, o il fale di *Glauber*. E prima di tutto parliamo della foda. E' quefta, come tutti fanno, e come s' è detto nel §. I, la cenere femifufa del Kali, pianta volgarmente detta rifcolo, o rofcano tra noi, dalla cui lifciva fi trae quel medefimo fal fiffo, bafe del fal marino, che abbiamo comunemente detto natro. E' quiftione, fe queft' alcali trovato così nel regno vegetabile, vi fia originario e proprio, oppure ftraniero, e fe vi fia preefiftente alla combuftione. Le moltiffime fpe-

rienze, ch' ebbi a fare negli anni ſcorſi ſu le piante e marine, e marittime, e ſu le terre de' fondi ſteſſi, ov' elle allignano, cui eſpoſi nel 1781 in uno ſcritto particolare citato dal celebre Sig. *Scopoli* in una nota alla voce Soda del Dizionario di Chimica del Sig. *Macquer* da sè volgarizzato, e ch' è nelle mani di molti, m' hanno ſomminiſtrato occaſione di avvicinarmi al ſuggetto, e di prender non pochi lumi ſu queſta quiſtione, sì che ebbi fondamento di conchiudere, che queſt' alcali è ſtraniero alle piante, e accidentale. Imperciocchè ſenza riportar qui per minuto, che andrebbe in lungo, tutte le particolarità di quello ſcritto, dirò ſolamente, che avendo fatto eſpreſſa raccolta nelle Lagune Venete di grande quantità di alghe, e di altre piante moltiſſime del genere de' fuchi, ma tutte creſciute e viventi ſott' acqua, e avendole ſeccate e combuſte diligentemente in vaſi di ferro all' aria libera, non ſenza grandiſſima pazienza e a grande ſtento ho potuto ſcuoprirvi traccie d' alcali marino libero, piene, come holle trovate, di pretto ſal marino. Così accade, come l' abbiamo dal Sig. *Macquer*, delle ceneri del Varec di Normandia, detto altrimenti *Goemon* e *Sar* in Brettagna. All' oppoſito toſto che non di piante viventi ſott' acqua o marine propriamente, ma di quelle ſi tratti, che creſcono ſu' fondi marittimi ſcoperti, il prodotto è tutt' altro, e vi ſi trova nelle ceneri con altri ſali meſcolato pure in copia l' alcali marino libero. E non è da tacerſi, che non già nel ſolo Kali, ma in cent' altre piante, che ſarebbe inopportuno il nominare, nodrite in que' fondi, ho ſempre trovato annidarſi quell' alcali; e particolarmente nella claſſe de' cardi il carcioffo (di cui abbruciava il fuſto con tutte le foglie) coltivato ne' fondi ſalmaſtri non cede per avventura in ricchezza di queſto ſale al Kali medeſimo, che ſembra eſſere la pianta privilegiata, come me ne ſono aſſicurato più e più volte. Ho coſtantemente oſſervato, che volevano le piante eſſere creſciute in terreni abbandonati dal mare, e non più ſuggetti alle maree. La quantità del ſal marino più e più creſceva, e diminuivaſi la quantità dell' alcali nelle liſcive delle ceneri, a miſura che la pianta era ſottopoſta ad eſſere più di frequente bagnata dall' acqua del mare, ſinchè gradatamente ſvaniva quaſi ogni veſtigio d' alcali, allorchè era ella di quelle, che vivono per-

petuamente sommerse; osservazione importantissima. Tosto però che i fondi marittimi o s' allontanavano troppo dal mare, o appartenevano a letti troppo antichi di mare, o pur anche avevano servito all' agricoltura, le piante rientravano nella classe delle terrestri, e non davano che un alcali puramente e decisivamente vegetale: quelle stesse piante che allignando in suolo salsugginoso non mancavano giammai di somministrare l' alcali marino. Per assicurarmene in un modo semplice e facilissimo combinava la parte salina estratta dalle ceneri sempre coll' aceto distillato, perchè si caricasse egli di tutto l' alcali libero, che poteva esservi mescolato, e così dalla notabile differenza tra la terra fogliata e il natro acetoso, e dalla figura de' nitri, che ne ricavava, decomponendo i sali acetosi coll' acido nitroso libero, poteva accertarmi di tutto. Ciò conferma mirabilmente quello ch' era stato prima di me osservato da' Signori *du Hamel* e *Cadet* (Mem. dell' Accad. Reale 1767, 1774) intorno al Kali. Trapiantato questo vegetabile dal suolo marittimo in paese mediterraneo, dopo un certo tempo divenne ortense, e perdette a poco a poco la facoltà di somministrare l' alcali marino col mezzo della combustione. Intanto il non trovarsi di quest' alcali nelle piante marine viventi sott' acqua, mentre contengono sal marino a ribocco, è prova di gran forza, che quello non è altramente un prodotto della decomposizione di questo, come abbiamo sostenuto in altro luogo. L' essere poi or ricca, ora spoglia d' alcali una medesima pianta dall' allignare in terreni salmastri, e dal crescere in fondi non salmastri, dimostra evidentemente, che non è egli essenziale, e proprio di quella pianta. Ed or poi che sappiamo risieder egli libero e proprio nella sostanza degli animali marini, il trovarsene di libero in tutti i fondi salmastri, il prodursene spontaneamente dietro al disfacimento di quegli animali, tutto insieme ci porta a conchiudere esser egli straniero al regno vegetale, ed entrare nell' economia delle piante succhiato dal suolo, ov' esse allignano, tosto che ivi si trovino involti nella terra avanzi, e spoglie di animali marini decomposti. E quanto all' altra quistione del preesistere di lui, o no nelle piante alla combustione, ancorchè risulti dal detto, che vi sia egli assorto ne' succhi nutritivi, ed abbiano gravissimi

Autori asserito di averne trovato di libero prima dell' abbruciamento, giova che rimembri qui qualche sperimento, che ho fatto per prendere lumi da me stesso sopra un oggetto sì importante.

I. Ho preso un grosso fastello di Kali maggiore fresco, tratto da marittimo terreno, ov' era spontaneamente cresciuto. Pestatane una metà la misi a macerare nell' acqua, e ve la ritenni più giorni; dopo di che filtrato il liquore, il feci svaporare a siccità. Versai poscia su la materia secca dell' aceto distillato, ajutandone l' azione con un dolce calore. Seccato il sale, lo disciolsi in uno spirito di vino concentratissimo. Decantato lo spirito il feci svaporare a secchezza, indi a moderato fuoco decomposi il sale acetoso sloggiando l' acido vegetale, ed ebbi 473 grani di sal alcali marino ottimamente caratterizzato. Feci seccare al sole l' altra metà del Kali, e la feci in cenere all' aria libera in vase di ferro, calcinando la cenere a fuoco lento, la quale trovossi essere 21 dramma. Col processo altre volte descritto dell' aceto distillato, e dello spirito di vino giunsi a trarre da queste ceneri 436 grani d' alcali libero. M' accertai dunque in modo non equivoco, che l' alcali marino preesiste libero nel Kali alla combustione. E qui fu, che mi prese voglia di verificare una tale preesistenza anche dell' alcali vegetale nelle piante comuni. E però scelsi una pianta di collina, e segnatamente il tamarisco, dalle cui ceneri si pretende essersi ricavato appena vestigio di alcali vegetale.

II. Avendomene proccurato da Monselice un fastello, il feci pestare, macerare lungamente nell' acqua, e bollire in essa alcuni minuti. Raffreddato il liquore, il filtrai e svaporai a secchezza, come precedentemente. Combinata la materia coll' aceto distillato, e fatto cristallizzare il sale, qual fu la mia sorpresa nel ravvisare sul piattello la vera terra fogliata! Trattala fuori col mezzo dello spirito di vino, e seccata di bel nuovo v' affusi dello spirito di nitro per decomporre il sale acetoso. Ne ottenni un nitro perfettissimo in aghi prismatici cristallizzato.

XLVII.

Poteva per avventura sembrare puramente speculativa la quistione di cui s' è trattato, che non è. V' abbiamo guadagnato molte istruzioni utilissime. E prima abbiamo imparato a ben conoscere la natura de' fondi su' quali possiamo mettere a coltura il Kali, e le altre piante più avide di questo sal fisso, di cui si è parlato, con profitto maggiore che non si sarebbe per una spontanea vegetazione, non promettendoci raccolta d' alcali marino giammai da terreni dolci sprovveduti di spoglie marine. Siamo certi in secondo luogo, che giova fendere que' terreni, e smuoverli in molta profondità, onde accelerare la decomposizione, che non fosse tuttavia completa, delle sustanze animali marine per mancanza d' aria, d' umido, di calore, e di simili sussidj necessarj alla putrefazione. Essendomi proccurato da varie parti delle nostre marittime lagune, e da diversi fondi ritratti dal mare, sì della terra tolta in superficie, che di quella più sotto, ho voluto farne liscivia, onde riconoscere la natura del sale, che poteva esservi contenuto. Ho osservato pertanto, che queste terre salmastre contengono una 150.^{ma} parte di un sale rossiccio, in cui prevale il sal marino, com' è naturale; ma avendone fatto cimento nelle nostre vetraje ho conosciuto a prova, che ne proviene un vetro indubitatamente, di que' dozzinali però, che si traggono dalle sode di Normandia. Il che può diventare oggetto non dispregevole a chi ben l' estima. In fatti qual meraviglia, che sì fatte terre salmastre contengano avanzi d' esseri marini disorganizzati, e del natro in conseguenza, se quello, che in tante parti dell' Europa e dell' Asia troviamo in efflorescenza, e di cui s' è parlato altrove, proviene mai sempre da somiglianti fondi, letti un tempo di acque marine!

XLVIII.

Ma facendo attenzione al primo sperimento del §. XLVI. riconobbi, che la combustione era, più che mai non si crede, dannosa alla raccolta dell' alcali dalle sode, volatilizzandosi

dosi in parte questo sale, in parte terrificandosi, e in parte eziandio fondendosi per la violenza del fuoco in un' imperfetta vetrificazione. In fatti un primo riscontro l' abbiamo in questo, che più di alcali si ottenne dalla materia estrattiva del roscano non tormentata dal fuoco, che non s' ebbe dalle ceneri di pari quantità combusta di quella pianta. Ma eccone un' altra. Siccome aveva fatto in cenere a moderato fuoco questo Kali, che non era altramente di cultura, ma sì bene spontaneo de' nostri liti, volli far confronto del suo prodotto con quello delle migliori ceneri sodate di Spagna. Prese pertanto dramme 21 di queste ceneri, e fattane diligentemente lisciva, la filtrai, e svaporai a secchezza, indi ne trassi l' alcali per mezzo dello spirito d' aceto col processo consueto. Ne ottenni appena 400 grani di ben deciso. Per la qual cosa senza abbandonare questo mezzo, che puo migliorarsi di molto, moderando la calcinazione, parvemi, avuto riflesso agli esseri organizzati, ove quest' alcali risiede, come in luogo nativo, e alle piante stesse che se ne caricano sì abbondantemente, da non tacersi il suggerimento pure di ricorrere direttamente alla naturale decomposizione di loro, onde aprirsi nuova via di ottenerlo senza combustione. Chi non conosce i grandi vantaggi, che si traggono dalle Nitraje artificiali, le quali si preparano mescolando con ogni sorta di materie putrescibili terre leggiere, e friabili, onde accelerare la decomposizione di quelle sostanze organiche, e la generazione del nitro in conseguenza? E' ben naturale cosa il pensare, che si può ora proccurarsi del pari la generazione del natro per questo mezzo con opportune Natraje artificiali. Ogni sorta di vivente nell' Oceano capace di putrefazione completa può essere l' ingrediente capitale, la materia essenziale di questi stabilimenti. E non sarebbe forse improprio consiglio quello di pestare gli animali marini, e di dividerli nel mescolarli con le terre, aggiugnendovi copia di vegetabili d' ogni specie, purchè fossero cresciuti su' fondi salmastri. Avendo, come nelle Nitraje, l' attenzione di mescolare di tempo in tempo i mescugli, esponendo successivamente al contatto dell' aria e dell' acqua, con cui sarebbe d' uopo spruzzarli frequentemente, tutte le parti di loro, si otterrebbe la produzione del natro

libero non difficilmente. Avendo io nell' Aprile del 1784, come l' accennai al §. XXXIII, messa a putrefarsi all' aria libera una certa quantità di animali crostacei freschi tratti dalle loro conchiglie, e pestati prima ben bene, ebbi cura di muovere la materia di tratto in tratto, e dopo ch' era fatta secca di tenerla pure bagnata di quando in quando. Nel mese di Agosto di quest' anno 1785 vedendola fatta terra senza odore sensibile, ne feci di una porzione esperimento, suggettandola a lisciva d' acqua distillata. Non saprei per qual ragione mi paresse non doversi da sì fatta putrefazione generare altrimenti un nitro. Ma oltre all' alcali manifesto che ne trassi, non lasciò di comparire nella cristallizzazione qualche vestigio di nitro quadrangolare perfettissimo, cioè a base d' alcali marino; il che per avventura merita attenzione. Ma non uscendo dall' istituto presente, di qua intanto possiamo argomentare, che la produzione dell' alcali libero col mezzo delle Natraje, che ho detto, è certissima, non potendo essere di alcuno svantaggio il poco nitro, che insieme potesse generarsi. Per altro se de' crostacei si facesse uso, l' adoperare gli animali schiacciati e bricciolati in un con le conchiglie, potrebbe tener luogo di terra calcarea in parte se non in tutto nella Natraja la sostanza terrosa di quelle, come facilmente si comprende. I fondi circonvicini a' laghi salsi così nelle meridionali regioni, come nelle settentrionali, di che s' è parlato, ne' quali si trova l' alcali marino in abbondanza, tutti manifestano di aver servito un tempo al mare di letto, come dicemmo, e possono considerarsi per le spoglie, che contengono, visibili e sparse in ogni parte di animali marini decomposti, quasi altrettante naturali Natraje. E questo operare appunto della natura si è, che abbiamo qui in mira d' imitare, ove sien da noi messe le organiche sustanze a putrefarsi, e l' impazienza nostra e i nostri bisogni secondando, non il lentissimo spontaneo processo di natura si attenda, ma i mezzi si adoperino, e i sussidj convenevoli onde promuovere, e sollecitare la fermentazione, e l' ultimo grado di putrefazione.

XLIX.

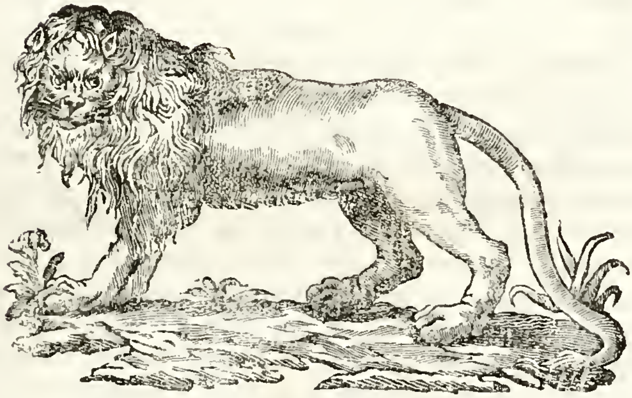
Ma non è per ultimo da tacersi in traccia dell'alcali marino un' indagine, che può essere di qualche utilità per avventura. Poichè il veggiamo fiorire su questo colle di Verona, che s' è detto da principio, e sbucare da' tritumi organici marini, cui vetustà dovrebbe avere totalmente snaturati, e consunti, non è senza fondamento il credere che non sia altramente questo colle il solo privilegiato per la produzione del natro nativo, come non è egli il solo deposito di simili spoglie organiche lasciate dal mare, di cui ne' monti, nelle pianure, e nelle più cupe viscere della terra veggiamo fatta conserva immensa, abbondantissima da ogni canto. E' probabilissimo, che nello stato in cui elle si trovano di aridità, senz' aria, senza il necessario calore, sia loro interdetto il moto intestino, e impedito in conseguenza all' alcali lo svilupparsi, il prodursi da quelle spoglie, che pur farebbesi, se fossero elle in più favorevoli circostanze costituite. Se i Fisici vorranno metter l' occhio su queste sustanze marine abbandonate con questo in mira nuovo ed importante oggetto, non ha dubbio, che il faranno con frutto. Costruendo muraglie, volte, e cumuli, come nelle Nitraje suol farsi artificiali in qualche parte di Europa, e facendovi operare l' alternativa dell' umido, e dell' aria opportunamente, e in altri tali modi trattando sì fatte materie, non è impossibile che quelle stesse fioriture, che sbucano qui spontanee d' alcali libero purissimo sul nostro colle da simili congerie, abbiano pur a comparire su le artificiali, con un esempio innanzi agli occhi, che non soffre eccezione.

L.

Ancorchè abbia dato a conoscere in varie parti di questa Memoria quanto poco io sia disposto ad attribuire facilmente l' alcali marino libero e puro che troviamo in tante sustanze annidato, e fin su la superficie della terra fiorente in tante parti, a decomposizione naturale di sal marino, sarebbe mal conoscere la natura, le sue forze, i suoi magisteri,

se il si volesse derivar tutto da' soli corpi organici marini decomposti, senza attribuirne alcuna parte all' immediata decomposizione del sale. Certo essendo da un canto essere quest' alcali parte sustanziale de' viventi nel mare, e non verificandosi effettivamente dall' altro quasi mai la presenza di lui in qualche copia libero e puro, ove non si verifichi a un tempo traccia di quegli esseri accoppiata e presente, prescindendo dagli accidentali trasporti che possono essere avvenuti nelle innumerabili rivoluzioni occorse, è bensì più ragionevole e naturale il ripeterlo, come abbiamo fatto, dalla decomposizione di loro, che non è il derivarlo da quella del sal marino, che di recondito magistero abbisogna per effettuarsi compiutamente: ma non è per questo da conchiudersi che tutto l' alcali marino che troviamo su la terra provenga immediatamente da' viventi marini. Come non repugna (§. XL.) l' esistenza di lui in istato libero indipendente dal sal marino, non repugna nè pure, che v' abbia natro su la terra non procedente immediatamente dagli animali del mare; siccome della terra calcarea può dirsi non repugnare, che ve n' abbia indipendentemente dagli esseri organizzati di cui la troviamo far parte essenziale e tanta, come tutti fanno. Non oserei però dire, che possa avervene di originario indipendente dagli animali marini, come non senza fondamento può credersi della terra calcarea. Intanto, se come asserisce il *Bergman*, può dal ferro nudo decomporsi il sal marino, comparendo in libertà l' alcali in forma di brina, ch' è però cosa assai singolare, e da non ammettersi senza il consenso di molte e molte sperienze (§. XLI.); se il litargirio può farlo in qualche modo, sia quant' esser si vuole imperfetta la decomposizione del sale; se le terre vitriolate, i metalli vitriolati possono, come dalle mie sperienze (§. XLIII.) è messo fuor di dubbio, senza opera di fuoco o d' altro intermezzo, per semplice contatto decomporre il sal marino; se non è impossibile che il sal di *Glauber* possa naturalmente decomporsi per l' azione sostenuta e continua di un grado di calore men forte de' nostri carboni accesi (§. XLIV.), col qual mezzo tante cose pur opera la natura in silenzio, non è il render libero l' alcali-base del sal marino, indipendentemente dalla disorganizzazione degli animali ma-

rini, un' operazione che ne' laboratorj di natura ascosi a' nostri occhi non possa in varie guise effettuarsi. Ma il detto fin qui basti su questo gravissimo argomento, e basti l' aver trovato essere egli proprio ed essenziale degli animali viventi nel mare, com' è riconosciuto da gran tempo originario e proprio delle piante il vegetale.



OSSERVAZIONI

ANATOMICHE E PATOLOGICHE SUGLI ORGANI UROPOIETICI.

Del Sig. VINCENZO MALACARNE Direttore delle R. Terme Acquesi, e Chirurgo Maggiore del Real Presidio di Torino.

All' Illustriss. e Celebratiss. Sig. Co. Don ALESSANDRO DE BRAMBILLA Cerusico della Persona di S. M. Imperiale, Proto-Cerusico delle Truppe Imperiali Austriache ecc.

LE ricerche a vostro suggerimento fatte dal Sig. *Guidone Scati*, Cerusico professore dell' arte ostetricia nell' Università di Gorizia, sui calcoli dei reni, e sulle operazioni, alle quali dalla presenza di simili corpi morbosi possono essere animati i cerusici, mi obbligarono mentre ch' egli soggiornò in Acqui sua patria, dov' io era incaricato e della direzione del Militare a quelle Reali Terme, e della Scuola cerusica, e della cura degl' infermi in quella città, a trascegliere quante osservazioni io ne avea dalla massa di quelle d' altri generi, che la pratica mi aveva fornito, e consegnarle a quel mio Collega. Io mi persuadetti di leggieri con quell' atto di fare cosa grata a voi, Illustrissimo Signore, ch' io stimava e venerava moltissimo come autore, e promotore indefesso d' opere insigni, ai progressi della Cirugia in particolar foggia dirette. E fin d' allora in me nacque il desiderio di separarne pure tutto ciò, che anche la Notomia svelato mi aveva intorno agli organi destinati alla separazione della urina dal sangue negli animali, ch' io nominerò con termine greco *Uropoietici* perchè abbrevia ed esprime, con l' idea d' indirizzarvene la serie. Posi la mano all' opera, e nuove dissecazioni avendomi arricchito di cognizioni novel-

le, io m' applaudiva già di potere fra pochi mesi mandare ad effetto quel mio proponimento, quando chiamato dalla Clemenza del mio Sovrano ad impiego più luminoso nella Dominante, ed in altre occupazioni distratto, mi fu impossibile dar compimento al mio lavoro infino a questi giorni, nei quali sendo stato onorato da voi con nuovi lumi, e con quegli amorevoli caratteri, che mi convinsero maggiormente e del generoso affetto onde siete inclinato a portare la facoltà nostra al più alto grado di perfezione, che sia possibile, e della vostra urbanità verso di me, vi ho fatto cenno del mio disegno, e voi di buon grado l' approvaste. Eccovi pertanto l' operetta mia (*a*), e con essa eccovi un pubblico pegno del profondo rispetto, che l' alto merito vostro scolpì nel mio cuore, e della vera gratitudine, che mi terranno all' Illustriss. Signoria Vostra per sempre indissolubilmente avvinto.

Nei primi volumi della grande opera, a cui v' applicate intorno alle scoperte fatte nella Medicina in generale dagl' Italiani, del continuo inculcate, che per dare più stabile fondamento alle opere mediche, tra le quali ben vede ognuno che si debbono pure comprendere le cerusiche, si batta indefessamente la via dell' osservazione: ed io ubbidiente al vostro cenno m' incamminerò alla sposizione d' alcune verità fisiologiche, e terapeutiche relative al meccanismo della separazione dell' urina, alla generazione dei calcoli, e ad altre malattie degli organi uropoietici, indipendenti da cagion esterna, ed alla cura delle medesime, con far precedere una scelta di quelle osservazioni, che mi vi hanno fatto pensare. E queste non mi contentai di farle su cadaveri umani supini come vulgarmente si usa, ma tanto questi, quanto quelli de' bruti, che vi sacrificai, posi bocconi, e ne rimossi con le dovute cautele la metà posteriore delle ossa innominate con l' osso sacro, e tutte le vertebre lumbari, senz' aprire al davanti l' abdomine: avvertenza onde non ho motivo di pentirmi.

(*a*) In questa l' autore non si propone di dare un esatto trattato di notomia relativo agli organi che si prefisse di esaminare: bensì di porre sotto gli occhi altrui le cose meno ordinarie tanto di notomia, quanto di patologia, e di terapeutica ch' egli vi osservò, prescindendo dalle trite, ed universalmente conosciute.

Le prime però furono fatte secondo il metodo ordinario, e vennero piuttosto dirette dal caso, che dalla riflessione: e d' esse appunto debbo principiare a darvi notizia posto che ho deliberato di procedere con l' ordine più naturale, ch' è altresì più instruttivo.

OSSERVAZIONE I.

La vescica urinaria d' un uomo piena di calcoli innocenti.

In cento scritti è già stato indicato i calcoli talvolta dimorare nella vescica, e non dar segno veruno dell' esistenza loro. In altrettanti s' è investigato donde proceda l' inspessamento, il condensamento, che i calcoli stessi proccurano alla tunica multiplice della vescica medesima, del quale *Ruischio* dà un bell' esempio nella oss. 89 (*a*), ch' egli avvalora con l' elegante figura 70, dopo d' avere accennato alla oss. 78, che ciò può derivare pur anco dalla scabbia interna di questo sacco, e disegnato il medesimo alla fig. 62 (*b*) con alcuni bernocoli glanduloso-carnei, che se ne eccettuiamo il sito, si accostano molto alla figura di quelli, che ho veduto nella vescica d' un vecchio di Centallo morto per flussione catarrale al petto nello Spedal Maggiore di S. Giovanni di Torino.

Avea costui dimorato parecchi anni fra gl' incurabili nello stesso Spedale, nè mai si era lagnato di verun dolore all' ipogastro, nè di peso al perinéo, nè ai reni, nè di bruciore d' orina, nè d' altro incomodo capace di somministrare verun sospetto delle varie affezioni morbose, che casualmente se ne scoprirono nel cadavero, eppure aveva egli esercitato per ben trent' anni la professione laboriosa di maestro di scherma per le truppe e le città del Piemonte; nè se n' era astenuto mentre che vivea nello Spedale, io stesso, ed alcuni allievi del R. Collegio delle Provincie miei compagni essendoci seco lui più volte esercitati.

Per

(*a*) *Friderici Ruyschii Anatomes, Chirurgiæ, & Botanices Professoris Observationum Anatomico-Chirurgic. Centuria* ecc. Amst. 1691. 4. pag. 114.

(*b*) pag. 100.

Per addeſtrarmi alla Ciſtotomía con il taglio laterale mi prevalſi di quel cadavero, e nell' introdurre lo ſciringone per l' uretra incontrai diverſi oſtacoli, ma finalmente penetrai nella veſcica. Tentai di volgerlo a mio talento per quel ſacco, ed iſtupirono meco gli aſtanti all' udire gli ſcroſci, che fece in ſulle prime, ed all' oſſervare, che impegnatoſi col becco fra i calcoli ſtatici manifeſtati dallo ſtrepito, non ci fu poſſibile di muoverlo più ai lati, nè di farlo più oltre penetrare. Il chiariſſimo Sig. *Carlo Spagnolini* Profeſſore ſtraſordinario di cirugia nella noſtra Univerſità, ſotto gli occhi del quale facevamo tali operazioni, mi ſuggerì di proſeguire ſenza fiſſarlo più a ſiniſtra, che a deſtra, ed io tagliati gl' integumenti, ed una porzione della proſtata di modo che ne ſprizzò fuori l' urina, inſinuai per la ferita il conduttore, che molto difficilmente s' inoltrò ſcroſciando, come ſtentarono aſſai più le tanaglie a penetrarvi, e a ſcoſtarſene i morſi a ſegno di ghermire qualche calcolo. Eſſendovene però caduto uno in mezzo, fu eſtratto; e così fu di due altri non più groſſi d' una mediocre avellana, cubici, liſci con le faccette qua concave, là qualche poco conveſſe; ma dopo non ſe n' ha più potuto prendere alcuno ſebbene le tanaglie ſcroſciaſſero incontrando la ſuperficie dura degli altri, ch' empievano il ſacco, e ne diſtaccaſſero alcuni frammenti.

Ciò moſſe la curioſità del mio Maeſtro, ugualmente che la mia, non potendoci rappreſentare all' immaginazione qual ſi foſſe l' interiore di quella veſcica, e la diſpoſizion e il numero di quei calcoli: mi accordò egli adunque la permiſſione di ſoſpendere le mie prove, e di ſeparare intiera dal corpo quella viſcera, il che venne più facilmente eſeguito da me non ſolo con la ſinfiſe-otomía, dopo d' avere ſgombra la pelvi dalle inteſtina, ma con maggior franchezza, ed integrità della veſcica medeſima e delle ſue appendici, ſegando il corpo d' amendue i pube, e il braccio degl' iſchi l' uno dopo l' altro.

Quella veſcica era lunga otto pollici, ed aveva ſei pollici di diametro dall' inteſtino retto alla ſinfiſe del pube: era dura, incompreſſibile, e difforme all' eſterno per molte dure ineguaglianze.

Ne ſpaccai la faccia anteriore, ch' era la più liſcia, dal collo ai due terzi della ſua lunghezza; e lo ſcalpello ſcroſcia-

va ſcindendo non ſolo perchè fregava col dorſo ſui calcoli, ma perchè il collo ſuddetto, ed una porzione vicina del corpo n' era quaſi ſimile in durezza e in ſoſtanza alle cartilagini intervertebrali. Col mezzo di tale ſpaccatura ponemmo a nudo buon numero di pietre cuboidée d' inegual volume, tutte coperte d' uno ſmalto bianco gialliccio (*a*); tutte nell' interno roſſigne, ſabbioniccie, friabili, le quali naturalmente articolate inſieme formano una ſpecie di muſaico. Ve n' erano alcune più elevate delle altre, che con la faccia prominente loro occupavano certi gozzi, o cellette formate dalla ſoſtanza ſteſſa della veſcica, o per meglio dire dalla membrana interna cacciataſi fra le ſmagliate fibre dei piani carnoſi, ond' è veſtito quel ſacco.

Nè le diſuguaglianze, che ſi vedevano all' eſteriore del medeſimo, erano tanto elevate quanto la prominenza di quei calcoli poteva eſigere, perchè una grande porzione veniane naſcoſta dalla ſtravagante ſpeſſezza della tunica muſculare, che ſervia loro con lo ſcoſtamento de' ſuoi piani interiori di nicchia, ed in queſto la noſtra veſcica non era da paragonarſi con quella onde l' immortal *Eiſtero* fregiò la ſua grande opera delle *Inſtituzioni ceruſiche* (*b*).

Trovammo inoltre un mucchio diſtinto di calcoli raccolto nella parte ſuperiore della veſcica dove ſi era formato un ſeno conoidéo, che ſembrava eſſerſi fatto a danno dell' uraco, il quale altrettanto perduto avea di lunghezza quanto in larghezza aveva acquiſtato.

Non ebbi cura di miſurare di tal ſeno la capacità prima d'eſtrarne i calcoli, per lo che fare dovetti ſpacciarne un tratto notabile prolugando il taglio ſu per la faccia anteriore

(*a*) Tali appunto dicea d' averle trovate al numero di 36. in un vecchio il celebre *Santorini* l. cit. cap. X. §. XX. pag. 205. Vedanſi pure le dilucidazioni dottiſſime delle famoſe XVII. Tavole dello ſteſſo Autore fatte dal chiariſſimo Sig. *Michele Girardi* prof. primario di Notomía e di Storia naturale nella R. Univ. di Parma ſtampate con maraviglioſa eleganza colà dall' inſigne Sig. *Bodoni* mio concittadino, ed amico l' anno 1775. in 4°. grandiſſimo Tav. XV. fig. III. pag. 274. S'io ne eccettuaſſi i quattro maggiori, ed i dieci minimi rappreſentati nella Tav. II. della Centuria delle oſſ. Anat. Ceruſiche del *Ruiſchio* pag. 3. ve ne potrei additare gli altri come raſſomiglianti ai calcoli nella veſcica del vecchierello (però più numeroſi) trovati.

(*b*) Ved. Tav. 32.

della vescica incominciato: ciò non ostante due o tre giorni dopo d' esserne stato votato, e d' essere stata questa immersa nell' aceto, era ancor alto più di tredici linee, largo dieci, diviso in molte cellette dalle colonne carnose del piano musculare interno smagliato irregolarmente qua e là dirette.

Esaminando attentamente questo seno (*a*), ed osservando che buon numero di tali fibre distaccatesi dalle esteriori formavano, insieme con la tunica interna dalle medesime non abbandonata, un tramezzo, che lo separava dal rimanente della cavità della vescica, a un di presso come la tenda del cervelletto divide in due la cavità del cranio; giudicai che da principio la vescica occupata dai calcoli non potendo più contenere molta orina, questa a poco a poco avesse dilatato in alto l' uraco, e che questo più debole della porzione del sacco, mediante la quale questi comunicato avevano forse un giorno, il primo siasi reso varicoso, e finalmente a forza d' ampliarsi, e di contenere con l' orina gli elementi dei calcoli vi se ne siano formati quelli, dei quali abbiamo favellato. Avvalorò le mie conghietture il vedere, che tale tramezzo orizzontale portava nel suo centro un foro di comunicazione fra 'l seno e la vescica appena capace di dare adito al mignolo.

Il collo della medesima vescica era sostenuto da una prostata, che spaccata per la metà del suo allungamento verso la parte anteriore presentava allo scalpello come abbiamo detto una durezza cartilaginosa, e separata dalle parti aggiacenti dell' intestino retto vedevasi posteriormente distinta in due lobi natiformi con i quali abbracciava tutto il principio dell' uretra, pieni al di dentro di tubercoli duri coloriti come l' avorio. La faccia diretana della prostata era larga venti linee, lunga quindici; ed aveva in basso ed al davanti una incavatura col margine anterior molto spesso, e ritondato.

Questa rotondità del margine appariva anche all' interno

(*a*) Questa vescica in simile foggia interiormente divisa era diversa dalla osservata dal celebre Sig. *Meckel* in questo soltanto, che l' angustia della divisione punto non appariva all' esterno, quantunque fosse così visibile nella bipartita cavità.

nel collo della vescica, ed era come divisa dal verumontano spaccato per la sua lunghezza da una fessura molto profonda, somigliantissima al meato urinario esterno eccetto in riguardo ai margini, che ne erano per la durezza loro quasi cartilaginosi, ed aveano quella faccia, per la quale si corrispondevano, anzi combaciavansi, tinta d' un rosso molto vivace, ugualmente che il fondo del picciolo seno che nascondevano.

La Fig. I della Tav. XV anatomica del *Santorini* fra le divulgate, e con tanta dottrina spiegate dal maestro degli Anatomici moderni *Girardi* (*a*) può dare un' idea della figura di quella prostata, che da me si descrive, ma non già del volume, ch' era nel vecchio di Centallo molto maggiore, e stendevasi diminuendo insensibilmente di spessezza in alto per fare un corpo medesimo con la vescica, di modo che spariti v' erano gl' intervalli, che nella figura *Santoriniana* si veggono con maestría e verità così lodevole fra la prostata e la vescica a destra ed a sinistra espressi.

Un' altra diversità pure vi passava, cioè in vece del ligamento nella figura *Santoriniana* segnato *L*, e dai *Girardi* con tale chiarezza dimostrato e spiegato (*b*) (l' esistenza del quale si manifesta senza difficultà in tutt' i cadaveri, la prostata e la vescica dei quali si prendono ad esaminare collocandoli bocconi, e dirigendo le osservazioni dal di dietro al davanti) la prostata prolungatasi anche anteriormente formava un cerchio perfetto, ch' io non saprei meglio paragonare, che alla cartilagine Cricoide umana.

Finalmente nella cavità della vescica dal concorso di quei risalti bianchicci, che si allungano in basso obbliquamente dal sito dove sboccano gli uretri, rappresentato così elegantemente prima di verun altro anatomico dal *Terraneo*, celebre professore di Medicina in questa nostra Università, sebbene male secondato dall' intagliatore, che troppo lontane le imboccature degli ureteri ci collocò dal triangolo *BF*, e dal veru-

---

(*a*) L. cit pag. 166. lett. *IKK*, dove si dice, che il *Santorini* osservata l'aveva nel cadavero di Gio: Battista *Brigonzo*, la vescica del quale più ampla delle ordinarie era occupata da un grosso calcolo.

(*b*) L. cit. pag. 167.

montano G (*a*); si era elevato un tumore sarcomatoso, appunto dalla sommità del verumontano, che piriforme, e quasi bifido s' inoltrava per lo collo della vescica fin nella cavità della medesima. Era perciò divisibile all' occhio in due lobi, il sinistro dei quali era molto più grosso, e conteneva sotto una liscia ed uniforme superficie biancastra varj bernoccoli duri, ligati insieme per mezzo d' un tessuto cellulare affatto simile alla parte più densa non cotennosa del lardo.

Voi sapete, o Signore, come il valoroso anatomico Francese Sig. *Lieutaud* industriato siasi d' appropriarsi la scoperta di quei risalti dell' angolo, ch' essi fanno in basso unendosi, con imporgli il nome d' *ugola della vescica*, (*b*) citando soltanto il *Santorini*, che assai meglio del *Terraneo* fu servito nell' intaglio della figura II (*c*), che va annessa alle preziose Osservazioni anatomiche stampate fin dall' anno 1724. quindici anni dopo la stampa dell' opera dell' Anatomico Piemontese; nè vi sarà ignoto, che prima il celebre *Morgagni* (*d*), e successivamente l' illustre *Girardi* (*e*) senza punto diminuire il vero pregio dei lavori del Sig. *Lieutaud* hanno esposto chiaramente il senso delle parole del *Santorini* a questo proposito; per conseguenza io posso prescindere dal favellare più a lungo intorno a questo, potendo chi più distinta notizia ne bramasse, agl' indicati fonti liberamente attignerla, le Osservazioni anatomiche, le magnifiche Tavole *Santorino-Girardiane*, e l' opera del *Terraneo* essendo per lo valore ed importanza loro in luogo distinto delle Librerie degli anatomici collocate.

(*a*) *Laurentii Terranei Ph. & Med. Doct. Collegiati Taurin. De Glandulis universim, & speciatim ad uretram virilem novis. Taur.* 1609 8°. fig 2. pag. 134, & 135.

(*b*) *Essais d' Anatomie* dove i risalti son nominati *Trigone* e l' unione prominente in alcuni cadaveri dei medesimi *Luette de la Vessie* Ved. anche *Memoires de l' Académie des Sciences an.* 1753. pag. 11., e 13. not. a

(*c*) Tab. III. litt. *KKI*, e cap. X. §. XXII. pag. 204, 205.

(*d*) *De sedibus, & causis morborum per anatomen indagatis: Venetiis* 1764. *Epist. Anat.* Med. 66. num. 12. & segg.

(*e*) Loc. cit. pag. 173, 174. Tab. 15. fig. III. *cdee*.

OSSERVAZIONE II.

La disposizione delle fibre carnose nella descritta vescica.

Ruischio nelle due vesciche di tonache tanto spesse, quanto erano quelle, che abbiamo citato poco addietro, si contentò di accennare, che la prima (*a*) venne a tale spessezza a cagione della scabbia ond' era interiormente offesa; e che la seconda (*b*), occupata da grossa pietra avea le tuniche spesse un dito, separabili in piani innumerabili, tra i quali osservò materia purulenta in più luoghi simile alla pinguedine liquefatta; nè si curò di darci qualche idea di tali piani, e indicarcene la direzione, le proprietà, la natura. Poco di più ce ne disse il celebre *Duvernei* (*c*), che ne aveva così destramente spogliata delle straniere sostanze la superficie esteriore. Il darcene però la più distinta esposizione fu riservato al laborioso ed avventurato *Santorini*, il quale non solo si valse di diversi mezzi per confermare intorno a questo sacco le sue scoperte, che si leggono nelle Osservazioni anatomiche (*d*), ma dopo la pubblicazione di queste continuò a lavorarvi dattorno, e ci lasciò oltre alle esattissime figure che occupano le Tavole XV, e XV, anche le ulteriori notizie, che il pubblico dee al virtuosissimo *Girardi* nella spiegazione delle medesime. (*e*) E mi sta ben fisso nell' animo il prudente avviso datoci dallo stesso *Girardi* sul poco vantaggio cavatosi finora dalle scrupolose ricerche intorno ai piani, alla direzione, ed agli attacchi delle fibre ond' è composta la tunica musculare della vescica (*f*) già molto esattamente descritta e dal *Santorini*, e da lui: ma se il caso mi ha offerto uno di quei sacchi disposto in maniera comodissima per isvelarne la struttura, ed esporla sotto gli occhi degli studiosi a più facile instruzione tanto di essi, quanto mia, ed a più chiara intelligenza del meccanismo con cui questo agisce sul liquido,

---

(*a*) pag. 100.
(*b*) Pag. 114.
(*c*) *Oevr. Anatomic. Vol. II. Tab. II.*
(*d*) Cap. X. §. XX, e segg. pag. 202. ecc.
(*e*) Loc. cit. pag. 165. ecc.
(*f*) Loc. cit. pag. 169.

che vi ſi raccoglie, mi s' imputerebbe a negligenza il non valermi d' occaſion sì propizia per rendermene in certa guiſa benemerito, ſul ſemplice timor di multiplicare le deſcrizioni d' una coſa già conoſciuta.

Spaccata dall' imo al ſommo già ſeparata com' era quella veſcica dal corpo, non mi fu più permeſſo di notare la quantità delle fibre all' origine loro tendinoſe, ed il ſito preciſo donde ſi allungano molte delle carnoſe dalla ſinfiſe del pube, ch' era ſtata da me tagliata, e dai ligamenti vicini per iſtenderſi ſulla faccia anteriore del ſacco: ignorai pur anco a quale altezza cominciaſſero a divenir carnoſe ecc. ecc.; perciò giuoco forza mi fu di contentarmi di ſpogliarlo dell' abbondante celluloſa, e della rete dei vaſi ond' era circondato per mettere a nudo quello, cui tendevano le mire mie, cioè tutto il carnoſo; e con qualche diligenza venni a capo di ripulire ciò, che ſotto gli occhi miei è ſtato copiato dall' induſtrioſo Sig. *Beraud* Piemonteſe anch' eſſo, e rappreſentato al naturale nella fig. II. qui anneſſa. La lettera *D* indica la ſommità della veſcica donde ſi allungava il rimanente dell' *uraco* molto groſſolano, e carnoſo: *aa* indica il *muſculo penniforme* ſtretto ma ſpeſſo e robuſto in baſſo elevandoſi tra la immerſione degli *ureteri* nella parte inferior diretana della veſcica, ed il concorſo dei *canali deferenti OO* diviſo dallo ſtrato delle fibre carnoſe, ſulle quali s' appoggia lo ſteſſo *muſculo penniforme* incollatovi per mezzo d' un teſſuto cellulare abbondante, a traverſo del quale paſſano ſerbando varie direzioni i vaſi arterioſi, e venoſi, ed i nervi deſtinati alle ſoſtanze più intimamente collocate.

In queſto muſculo nella maggior parte delle veſciche maſcoline umane ſi raccolgono varj faſci di fibre, che dai fianchi, e dalle parti laterali ſuperiori eſterne della *proſtata* vengono a coprire l' eſtremità inferiore degli *ureteri*, ai quali gettano coſtantemente alcune liſche carnoſe invece di prenderne queſta dagli *ureteri* come s' immaginò il lodato *Santorini* (*a*) vedendo la comunicazione che ve n' ha fra queſti e quella; ma avendo io ſempre oſſervato, che le ſuddette

(*a*) Obſ. Anat. cap. X. §. XXI.

lische grosse ed uniche di tronco sulla prostata giunte agli ureteri si assottigliano diramandovisi dattorno, e dopo breve corso spirale sempre più diminuendo svaniscono, ciò nell' accennata idea mi confermò.

Si eleva poi dilatandosi il m. *penniforme*, e le sue fibre a misura, che si accostano all' *uraco* diventano più sottili, divergenti, ed in molti luoghi della sommità della vescica s' intrecciano e si confondono con le simili del *penniforme* anteriore nascente dal ligamento della prostata segnato *L* nella Tav. XV (*a*) dell' opera non mai abbastanza encomiata *Santorino-Girardiana*; e dai ligamenti della faccia interna della sinfise del pube per alcuni forti, e bianchi tendinucci, i quali talvolta sono così prossimi gli uni agli altri, e così bene sul medesimo piano colligati, che ne risulta veramente una specie d' aponeurose sottile, ma larga (*b*). Altre fibre carnose poi dalle parti laterali del principio dell' uretra nascendo biancastre si allungano passando sulla prostata medesima, e lasciando luogo sufficiente per lo corso d' alcuni vasi sanguigni vengono a congiungersi con quelle che abbiamo descritte finora.

Nella vescica citata il m. *penniforme* posteriore alla parte superiore, che ai lati era di fibre molto rare, ne aveva gl' interstizi occupati dalla cellulosa assai consistente, ond' erano unite. Alcuni fasci poscia ne occupavano a foggia di cordone il centro verticale, e dalla prostata salivano rettamente fin su per l' uraco, e gettavano ad ambi i lati vari fascetti, o lische, le quali serviano di sostegno alla maggior parte delle fibre divergenti.

Rovesciato al basso il m. *penniforme* posteriore, appare il *piano carnoso longitudinale*, che nell' accennata vescica era molto spesso, cioè composto di molte spesse fibre robuste strettamente colligate insieme. Nasceva carnoso dall' orlo superiore, e dal corpo della *prostata* come ne nascevano i rimasugli dell' anteriore (alcuni dei quali però doveano aver tratta origine dai ligamenti della sinfise del pube posto che se ne

(*a*) Fig. I.

(*b*) Tale osservazione fu assai prima di me fatta dal Sig. *Girardi*, e nel cit. luogo esposta.

ne ſcorgeano liberi i tendinucci nella veſcica intieramente ſeparata dal corpo) e molte fibre veniano dal collo ſteſſo della veſcica affatto carnoſe. Faceano tra tutte là un piano continuo, facile a ſepararſi dal traverſale ſottopoſto con il cacciarvi tra mezzo deſtramente il piatto manico ſottile dello ſcalpello.

Nelle veſciche ordinarie però queſto piano è molto irregolare, di fibre capillari, molto diſtanti, rare, e talvolta confuſe con quelle dello ſtrato ſoggetto, appunto come dal *Santorini* e dal *Girardi* è ſtato delineato (*a*). E tale pur ſi ſcorgeva di tratto in tratto anche nell' accennata veſcica, dove lo ſtrato *longitudinale* ſuddetto gettava frequenti fibre, che ſi perdevano nel *traverſale*, e facevano che il primo più difficilmente ſi potea ſeparare dall' altro dalla metà dell' altezza della veſcica all' *uraco*.

In quel ſito, che dà adito agli *ureteri*, alcuni faſcetti dello *ſtrato longitudinale* ſi ſcoſtavano per ammettergli nella ſoſtanza del ſacco, ed alcune liſche gli avvolgevano ſpiralmente diramandoviſi per ogni verſo, e in tal guiſa concorrevano anch' eſſe a formare parte della tunica loro fibroſa, della quale non vidi mai più diſtintamente l' eſiſtenza e l' intreccio fino ai reni medeſimi come in queſto cadavero, ed in quello del figlio di Marchino (*b*) calzolaro in Aqui, ſtato da me pubblicamente ſparato in quella città nella ſala della Notomia, ſtatavi aperta mentre ch' io v' era Profeſſore. Degli *ureteri*, e delle malattie loro parleremo in breve. Dopo laſciato quello ſpazio per l' inſerzione degli accennati canali, ch' è per lo più ovale, i faſci carnoſi dello *ſtrato* medeſimo di nuovo ſi accoſtano, le fibre ſe ne avviticchiano inſieme, e le altre ſi allargano ſul corpo della veſcica; intanto che ſalgono prima paralleli, e poſcia convergenti, ſi aſſottigliano, e finalmente ſi radunano ſulla ſommità del ſacco in un faſcio dintorno all' *uraco*, e lo accompagnano fino

(*a*) Loc. cit. Fig. I.

(*b*) Avrete qui unita la ſerie de' guaſti, che ſi videro in quel giovinetto, prodotti da tre calcoli, il più groſſo de' quali non minore d' un uovo di gallina eraſi diſtaccato dal quarto ſuperiore dell' uretere deſtro.

all' umbilico. E qui nemmeno ſi accordano le mie oſſervazioni con quelle del *Santorini*, perciocchè non oſtante le diligenze ripetute, e l' uſo del metodo facile, e naturale indicato da lui (*a*), ho ſempre veduto le fibre longitudinali dello ſtrato, che deſcrivo, a continuare il corſo lungheſſo l' *uraco*; ed oſſervai, che gonfiata la veſcica, ed eſſiccateſi un poco le fibre alla ſommità, reſtano sì tenui, che molte volte sfuggono all' occhio, ma immollandole nuovamente nell' acqua o nell' aceto, ſi tornano a rendere apparenti. Eſponendo poi la veſcica umana gonfia e ſecca al vivo lume ſi vede bensì dov' eſſa è munita di fibre più denſe e craſſe; ma che (*b*) *immutatæ* (*fibræ*) *altero peragrato latere eædem per adverſum ad eundem remigrent locum rectarum ſingulæ* queſto non ho pututo vederlo giammai: o vanno all' *uraco*, o ſommamente attenuandoſi, appiattandoſi, dividendoſi in minutiſſime liſche ſi perdono nella ſoſtanza della celluloſa, o dei vicini ſtrati con le fibre de' quali s' intrecciano ſenza ordine.

In riſguardo al *piano traverſale* veramente l' indefeſſo *Santorini* ci ha data una deſcrizione molto eſatta per quello che ſpetta alle veſciche ordinarie e naturali. In fatti le fibre ne vanno obbliquamente in traverſo, poi ſi ripiegano o in alto o in baſſo; alcune ſeguono la direzione delle longitudinali nello ſtrato delle medeſime inneſtandoſi: altre prima di compire il giro del ſacco s' appiattiſcono, s' attenuano, s' affiggono alla tunica membranoſa, dove inſenſibilmente ſe ne ſmarriſce la traccia. Queſto piano da ſe ſolo avea maggiore ſpeſſezza che tutto il rimanente della tunica fibroſa preſo inſieme; ed era compoſto di faſci più minuti, per lo più paralleli, diretti in traverſo, diſpoſti a un di preſſo come la tunica fibroſa delle arterie (*c*), e molto più copioſi nel corpo della veſcica, che verſo la proſtata, dove queſta nella ſua parete interna ſembrava un denſiſſimo lardo, ed ove molte di queſte fibre confuſe, partendo dai lati della proſtata deſcriveano una curva in alto, dalla quale ſi elevavano rami e liſche più o meno lunghe, e per ogni canto dirette, indi

(*a*) Obſ. anatom. cap. X. §. XX. pag. 202.
(*b*) ibid.

(*c*) Ved. il mio Tratt. delle oſſ. in Cirurgia Briolo. Torino 1784. 8. vol. II. cap. 6. Sez. I. §. XVII, e ſegg.

nuovamente vi si immergevano. Alcune disposte in senso contrario aveano le corna in alto; altre servian di briglia alle superiori, nelle quali s' innestavano, ed altre vi s' intrecciavano fra di loro nella guisa, che vengono intrecciati i vimini all' orlo d' un canestro.

Verso l' *uraco* non erano più tanto copiose le fibre del *piano traversale*; avevano anche un corso molto irregolare, aderenti per molti freni carnosi ai due piani tra i quali si trovavano, ed alla tunica prossima della vescica. Lasciavano qua e là spazj voti e lacune, forse perchè ivi erano stati innicchiati i calcoli più prominenti, che crescendo ne avevano distrutte le scambievoli aderenze, ed i legami. I fasci mezzani più crassi, più copiosi si sostenevano a vicenda col mezzo di molti freni musculari, che gettavano, e ricevevano, e questi obbliquamente scorrevano quali in alto, e quali al basso per confondersi con i più vicini, o inestricabilmente perdersi tra le fibre, che gli componevano. Questo piano veramente avrei potuto dividerlo in tre o quattro lamine sul corpo della vescica, però solamente per l' estensione verticale di quattro dita in traverso.

Il *piano interno*, ch' è stato così chiaramente descritto dal *Santorini* (*a*), e dal *Girardi* (*b*), è veramente irregolare nella direzione delle colonne carnose, che nelle vesciche state da qualche malattia, e particolarmente dalla presenza di qualche calcolo travagliate, sono cagione di quelle tante disuguaglianze nel cavo della vescica, per le quali non senza ragione fu dal *Santorini* medesimo paragonato ai ventricoli del cuore; ed io non ho notizia di tavola veruna che lo rappresenti meglio, che quella del lodato Sig. *Lieutaud*. Nella vescica, della quale favelliamo, formava quasi una tunica distinta come quello, ch' era distinto dal *traversale* per una bianca e densa *tela cellulosa* (Fig. V. *ZX*, *ZX*) che ho separato con mirabile facilità dal piano precedente quasi per un terzo di tutto il diametro della vescica ad amendue i lati del taglio. Questa *tela cellulosa* era il sostegno di quelle bizzarramente dis-

(*a*) Obs. Anatomicar. cap. X. §. XX. pag. 22.

(*b*) Septendec. Tab. Explic. Tab. XV.

poſte colonne carnoſe, che formano i due ovali rappreſentati nelle Fig. I, e V (*a*), i quali nel centro della veſcica poſteriore ſi combaciano, ed hanno in sè ſcolpite quelle moltiplici foſſette profonde, otturate tanto dalla *tunica interiore* del ſacco, quanto dalla *tela celluloſa* mentovata.

V' erano poi alcune colonne pendenti dalla ſommità del cavo della veſcica, ed alcuni ſcommuzzoli del tramezzo, ch' io non ho fatti diſegnare perchè non avrebbero inſtruito di più, e ſe non gli aveſſi portati via con le forbici, avrebbero generato confuſione.

In altre veſciche benchè ſi oſſervino ora più, ed ora meno diſtinte le traccie dei quattro piani carnoſi, che nella foggia accennata diſpoſti mi vennero offerti dal caſo, non è però del pari agevole ſepararne gli uni dagli altri come qui mi è rieſcito. Sono avvezzo a poterne diſtaccare dagli ſtrati ſottopoſti i *muſculi penniformi* in tutte le veſciche degli adulti dall' uraco alla *proſtata*, al *ligamento Santoriniano* della medeſima; ed in tutte le veſciche umane, che notomizzai, gli ho trovati poco differenti eccetto nella ſpeſſezza delle fibre, e nell' apparenza del *cordone central-verticale*: ma ſe gli ſeparo intieri, il *piano longitudinale* ſoggetto ne ſoffre, e non reſiſte ordinariamente più alla ſeparazione, che mi propongo fare del traverſale.

Anche nelle veſciche femminili ſempre ſi trovano; la maggior quantità delle fibre però, che ne formano la radice del poſteriore, in eſſe viene dalla denſiſſima ſpugnoſità, che uniſce il fondo della veſcica alla porzione anterior aggiacente della vagina; quella dell' anteriore dai ligamenti della ſinfiſe del pube interni, e dalla vicina porzione dell' uretra.

Il *piano traverſale* non è quaſi mai ſenſibilmente compito nelle veſciche ordinarie; le fibre ne ſono piuttoſto diſpoſte a rete, che tanto vicine, e regolari da fare una tela, perchè le briglie carnoſe, che da ogni lato ſi allungano per ſoſtenerſi a vicenda, laſciano cert' interſtizi, per li quali ſovente ſi può toccare, anzi sbuccia fuori, e vi fa molti gozzi l' interna tunica quando gonfiaſi la veſcica.

(*a*) Lett. XXXX ZZZZ.

L' *interno* è per l' ordinario affatto confuso col *traversale*, eccetto in basso dove (se incontrasi la vescica d' un vecchio robusto) possiamo trarne costrutto, i fascetti del traversale separandosene anche agevolmente.

OSSERVAZIONE III.

Sulle altre tuniche di quella, e delle altre vesciche.

Il celebre *Winslow* dice, che le tuniche proprie della vescica sono tre una carnosa, una nervosa, ed una interna o villosa; e soggiunge (*a*), che la nervosa è di struttura quasi simile alla nervosa del ventricolo. Il Sig. *Lieutaud* (*b*) assicura, che quest' organo è composto apparentemente di tre tuniche, musculare la prima o esterna composta di due piani di fibre, uno longitudinale, ed uno traversale ovvero obbliquo, ch' è l'interno; la seconda nervosa, che sostiene le ultime divisioni dei nervi e dei vasi, che si distribuiscono alla vescica; la terza vellutata simile a quella del ventricolo, e delle intestina.... Quasi tutti gli Anatomici in somma a voi, prestantissimo Signore, ben noti, chi più, chi meno chiaro accennano che v' ha tunica nervosa nella vescica, e la distinguono dalla membranosa interna, ossia vellutata com' essi l' appellano per l' analogia, che suppongono tra questo sacco e 'l ventricolo, e le intestina; e vogliono che tutta la superficie interna della musculare ne sia tappezzata. Io bramoso di vederla, volendo trovarla ad ogni modo incollata su tutto il cavo, gettai sempre la fatica ed il tempo; perciocchè nel primo terzo, o inferiore (che pure ne dovrebb' essere il più sensitivo) non vi ho saputo scoprire niente più di tunica nervosa di quello ch' io men abbia trovato nelle arterie (*c*), se parliamo di tunica dalle altre separabile: che con tal nome volessimo indicare una sottilissima polpa bianca diafana, quasi affatto indivisibile dalla tunica membranosa, sulla qua-

(*a*) Tatt. del Basso ventre §. 452.

(*b*) Essais d' Anat. Artic. XVI. Sect. 4.

(*c*) Tratt. delle oss. in Cirugia già cit. loc. cit. §§. 42, e 43., pag. 116, e 117.

le, facendo con essa un solo e medesimo corpo, è incollata; non avrei difficultà ad ammetterla postochè l' ho sempre veduta, e fatta vedere a' miei allievi.

Sapete che gli antichi appellavan nervose le tuniche bianche, e perfino le aponeurosi, i ligamenti, le espansioni tendinose ecc., e vi sovviene, che il *Falloppia* volle descrivere la tunica interna con esprimersi nella seguente maniera *scias igitur vescicam tres habere tunicas... unam a peritonæo communem, & duas proprias. Alteram quidem, quæ tenuis admodum est, nerveam, lucidam, candidissimam... a natura institutam ad continendum lotium ne extra excolet &c.* ed è anche vero, che dicendola egli *omni fibrarum genere nervoso densissime textam* pare che di tale sua natura fosse pienamente persuaso; ma ciò, che poche linee sopra dissi, ed il metterla, che il *Falloppia* fa assolutamente nel cavo della vescica per contenervi immediatamente l' urina, ci assicura, che la sua nervosa è la vellutata dei moderni presso di me semplicemente membranosa, e non equivoca continuazione dell' epitélio della ghianda, che si prolunga fin colà dentro per lo canale dell' uretra.

Tutti i lodati autori credono averla troppo bene osservata per non ammetterne l' esistenza su tutta la periferia del cavo; e nelle desquamazioni, che succedono pur troppo sovente della vellutata, le sostanze furfuracee, e squamose con assai delle mucose pretendono dependere dalla nervosa medesima, che si macera si distacca a begli scommuzzoli, i quali si vengono poi ad evacuare insieme con le orine. Inoltre avvalorano il parer loro appoggiandolo ai dolori interni, che là sentono i malati allora, ed al troppo squisito senso, di cui ordinariamente quest' organo è dotato.

Io ho già detto il mio sentimento. Aggiungerò tuttavia, perchè mi piace essere sincero, che nella vescica del vecchio di Centallo da qualche linea superiormente alla foce degli *ureteri* nella vescica (fig. I. *EPa*, *FPb*) tutt' intorno vi ho trovato una sostanza, che d' ottimo grado avrei nominato espansione nervosa, qua più, là meno spessa, disposta a reticelle accumulate le une sulle altre, nelle aje delle quali stagnava una tenace mucosità. Tal espansione aveva il colore del lardo fresco; si portava sino al meato urinario interno,

e di là fino oltre al bulbo dell' uretra sempre più attenuandosi, e qui svaniva affatto confondendosi con la spugnosità di questo canale.

Altre vesciche state occupate e tormentate da calcoli mi hanno presentato la medesima apparenza; ma non si dee obbliare, che n' era stata separata ed abrasa la membranosa tunica.

I vasi sanguigni (*a*) poi notati dal Sig. *Lieutaud* (mi piace di ripetere questo nome degnamente celebrato, perchè dalle opere di quell' uomo grande mi glorio d'aver preso quell' abito d' osservare, e quel gusto per la Notomia, che vo secondando) e da molti altri come se occupassero lo stesso sito che vi suppongono occupato dalla tunica nervosa, non gli trovai neppure sempre apparenti in tutta la vescica fra le tuniche carnosa e membranosa: si vedono però eleganti diramazioni, ed intrecci dei medesimi verso il collo nei calcolosi, nei soggetti ad espulsione di sabbie, d'orine acrimoniose, negli attaccati da infiammazioni ai contorni dell' ano e del principio dell' uretera, a gonorrée virulente abituali. Maggiore poi se ne vede il numero, ed il color intensamente rosso in coloro, che hanno prima di morire dovuto permettere l' introduzione del catetere nella vescica più e più volte, anche per la semplice paralisia, o per quell' ostacolo che nei vecchi deboli suole opporre all' evacuazione dell' orina il gonfiamento grassoso del contorno interiore del collo della vescica, dal quale (nè debbonsene eccettuare gli uomini apparentemente più sani) viene a formarsi nell' interno della medesima un *risalto circolare* più o meno elevato e spesso (*b*), dintorno

(*a*) Nissun' altra cosa a mio credere si può con maggior apparenza di ragione appellare *tunica vascolare* della vescica, quanto il bell' intreccio di vasi sanguigni, che fra la cellulosa, ed il piano esterno della muscolare s' incontra, la più elegante, ed esatta espression della quale io credo, che si veda nella Tav. II del secondo Vol. dell' eccellenti opere anatomiche del celebre *Duvernei*. *Ruischio* nel *Tesoro Anatomico* X. n. 126. ce n' espresse pure la rete, ma con forse troppa affettazione, dalla quale non andavano esenti le Tavole di quel valoroso Notomista.

(*b*) Non si vede nelle vesciche de' giovani; ma negli avanzati in età l' ho frequentissime volte osservato superare la spessezza d' un dito, e l' altezza di mezzo pollice; e tra il medesimo, e la parete vicina della vescica ho trovati particolarmente ne' gottosi calcoletti e sabbie l' evacuazion delle quali riuscia difficilissima tuttochè eccitato avessero tenesmi e di ve-

a cui si adunano sabbie, mucosità, e quella certa quantità d' orina, che vediamo a tanti uscire poscia involontariamente qualche momento dopo d' avere terminata la principale evacuazione, ma non affatto sopito lo stimolo, che la proccura.

Non ho mai veduto questo *risalto* (che non è da confondersi punto con il *Trigono* del *Terraneo*, poichè occupa soltanto la parte posteriore del collo, e del fondo della vescica) nelle vesciche femminili, eccetto in una Donna stata soggetta ad incontinenza d' orina per ben lungo tempo, la vescica della quale avea qua e là nella tunica musculare certi condensamenti calcarei simili affatto a quelli, che difformano la tunica fibrosa delle arterie (*a*). Questa infelice venne da me notomizzata sul principio di Maggio ultimo scorso, e dal contorno del meato urinario interno si elevava quel risalto a guisa di cinque more immature, cioè vi si numeravano cinque acini cremisi granellosi, separati da profonde incavature non ulcerose (*b*), furono giudicati da alcune persone dell' arte, che si trovarono presenti all' apertura di questo cadavero, emorroidi della vescica; ma il tagliente dello scalpello dimostrò, ch' era la sostanza della vescica stessa così elevatasi, coperta d' una rete di finissimi vasellini sanguigni innumerabili pieni di cruore: rete che si continuava fino al livello della foce degli ureteri ugualmente colorita, e successivamente progredendo su per lo corpo della vescica svaniva, elevandosi pochissimo al davanti.

Non

---

scica e d' ano importunissimi seguiti da spasimi in quella, non palliabili eccetto dallo schizzettarvi la mucillagine de' semi di psillo allungata con l' acqua d' orzo, ed accompagnati da schifosa involontaria dejezione d' alvo.

(*a*) Ved. Trattato delle off. in Cir: Torino 1784. 8: Briolo. Parte II. cap. VI. Artic. X dove si leggono le *osserv. sui condensamenti di sostanze eterogenee, sulla litiasi delle arterie, e sull' influenza di questa a produrre aneurismi*, argomento nuovo, ma pur troppo fondato sui fatti.

(*b*) Oltre alla litiasi della tunica musculare di questo sacco avea pure alcuni veri calcoli nei reni; ed altri simili, ma assai più grossi, alcuni maturi ed altri formantisi nella sostanza della matrice, dei quali darò notizia a suo luogo, aggiungendovi le tavole a maggiore chiarezza ed evidenza, non essendo stata questa l' unica matrice, nei contorni della quale io abbia trovato calcoli di grossezza e di figura straordinaria.

Non posso prescindere dall' accennare, che dintorno al collo della vescica, e non mai altrove quando questa è sana, si vedono e si toccano molti corpicciuoli, che sollevano, e rendono granellosa la superficie interna di questo sacco in proporzione della grossezza, che contraggono per la pressione, e la fregagione, che soffrono dai calcoli, e l' irritazione ch' ivi accendono le renelle passando, o movendovisi sopra con le orine acrimoniose e mordaci. Questi dal diligentissimo *Santorini* furono considerati come altrettante glandulette preesistenti, numerose abbastanza per formare da sè tutta l' elevazione del *Trigono*, e come gli unici e veri fonti onde scaturisce quella mirabile quantità di muco, che lorda le orine della maggior parte dei calcolosi, e fa talvolta un genere di malattia particolare, stato in quest' anno medesimo osservato prima da me solo, e poi dal dottissimo Sig. *Verna* (*a*) (Medico osservatore attento quant' altri mai, e per la felicità della sua pratica giustamente ricercato in questa Metropoli) insieme con me, in un negoziante per nome *Arese* che tuttora vive, sebbene non ancora intieramente guarito, siasi sottratto alla direzione del medesimo, ed all' occhio mio. Il *Ruischio* fa derivare tali mucosità immediatamente dalle boccucce dei vasi medesimi continui con il sistema arteriosο; intorno alla qual opinione ben vi è noto ciò, che venne detto al celebratissimo Anatomico Torinese *Giovanni Fantoni* (*b*).

(*a*) Il carattere particolare di quella malattia, i sintomi, che la accompagnarono, ma soprattutto la prodigiosa quantità di muco tenacissimo, che ne usciva ogni giorno per l' uretra, meritano d' essere esposti agli occhi, ed alle riflessioni dei Medici, ed io mi lusingo, che il chiarissimo Sig. Dottor *Verna* si risolverà a farlo; intanto vi basti, o Signore, ch' io vi accenni tale muco di color bigio sudiccio ben sovente avere occupato all' altezza di quattro dita in traverso il fondo d' un ben ampio orinale; ed avere notato amendue, che inclinando il vaso dall' altezza di tre piedi, come per votarnelo, quello a falde si allungava fino a terra, ma tosto da sè, per una tenacità, ed elasticità maravigliosa tornava tutto a raccogliersi nel fondo dell' orinale, al quale il rimanente della massa rimasta n' era attaccata.

(*b*) *Dissertationes Anatomicæ septem priores renovatæ Taurini* 1745. 8. *ex Typogr. Regia. Diss. VII. De renib. ureterib. & vesica pag.* 334. *nota q.*

OSSERVAZIONE IV.

Intorno all' Uraco.

Separando dalla *membranosa* , o interna la *tunica musculare* della vescica , nella parte più alta s' incontra un cordocino biancastro , ch' è propriamente l' *uraco* . Non nasce già sempre dalla sommità centrale di questo sacco , ma ora a destra , or a sinistra , e talvolta molto più dalla faccia anteriore , di modo che gonfiandolo , la sommità si eleva un mezzo pollice più alto che non è l' origine dell' uraco stesso , il quale in ogni caso ha sì forte unione con la tunica membranosa suddetta , che si comprende chiaramente essere una vera continuazione della medesima .

E ciò tanto meglio si conosce esaminando il pariete interiore del sacco dirimpetto a quel luogo , perciocchè vi si scorge sempre un punto concavo più o meno profondo .

La maggior parte degli *urachi* rappresentano un cordoncino uguale in grossezza dalla sommità della vescica al bellico ; altre volte è picciolo nel suo principio , indi si allarga , si fa nodoso ed irregolare ; nè tanto di rado accade che si trovi veramente conico , cioè più grosso alla vescica ed insensibilmente più sottile divenire a misura , che all' anello umbilicale si avvicina .

In quei nodi , o gozzi , che pur qualche volta sono stati da me osservati negli *urachi* umani , anche in soggetti molto nell' età avanzati , s' incontrò quando una specie di gelatina , quando una materia gialla pultacea , molto vischiosa , ed alcuna volta una sostanza quasi cartilaginosa .

Una sola volta ho veduto l' uraco ad aprirsi e a gettar fuori l' urina per l' anello umbilicale , e fu in una povera Donna , cui la pressione dell' utero negli ultimi giorni della gravidanza avea totalmente impedito l' evacuazione della medesima per l' uretra , e non avea trovato Cerusico capace di conoscere la vera cagione di tale suppressione , nè abile a introdurre in quella vescica dilatatissima il catetere per sollevarla . Fu veduta da me con l' uraco aperto sei mesi dopo il suo puerperio , e venne da tale schifoso incomodo liberata col

mezzo della sciringa, che tenne sei giorni continui aperta nell' uretra, di varie cauterizzazioni con la pietra infernale sul margine dell' umbilico inferiore fistoloso, e con coscinetti graduati applicati su varj pezzi d' esca immollati in un miscuglio di farina volatica, e bianco d'uovo mantenuti con l' opportuna fasciatura nella dovuta situazione (*a*).

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE.

Fig. I.

AAA. Contorno della vescica umana spaccata anteriormente; spessezza delle tuniche ond' era formata.
BB. Metà dell' altezza di tale vescica.
ACD. Seno conoidéo - *bb.* sito dove tal seno incominciava.
D. L' uraco.
EPa. L' apertura preternaturale dell' uretere sinistro.
FPb. L' apertura nella vescica dell' uretere destro.
*GH*** Sarcoma bifido dependente dal Trigono della vescica stessa alterato.
G. Lobo destro del Sarcoma.
H. Lobo sinistro del medesimo.
bb. Il collo della vescica appoggiato sulla
I. Prostata morbosamente voluminosa spaccata al davanti.
** I picciuoli d' amendue i lobi suddetti, che si riducono ad un solo discendendo verso
K. Il seno del Verumontano, nel quale sboccano al davanti i condotti ejaculatori, attorniato dalle boccucce dei canaletti prostatici, e delle glandule del *Terraneo*.
L. Porzione dell' uretra spaccata superiormente.
MM. Le vescichette seminali, o spermatiche.
NN. L' origine dell' uretra fra la prostata, e 'l collo della vescica.

Q ij

(*a*) Se ne darà il rimanente nei seguenti Volumi.

OO. Porzione de' canali deferenti.

Pa. L' uretere ſiniſtro. - *Pb.* Il deſtro.

XXXX-ZZZZ. Alcune colonne dello ſtrato interiore della tunica muſculare, e le lacune fra le medeſime formate dalla diſpoſizione, e preternaturale accreſcimento de' faſci del mentovato ſtrato.

yy. Il ſito fino a cui ſi elevava la proſtata morboſa.

&&. Il ſito fino a cui ſi ſtendea in baſſo la medeſima.

Fig. II.

D. La ſommità della veſcica.

aa. Il muſculo penniforme.

bbb. Il tendine, oſſia cordone centrale del muſculo ſuddetto.

II. La proſtata morboſa, naturalmente diſtinta in due lobi.

L. La porzione membranoſa dell' uretra ſpaccata.

MM. Le veſcichette ſeminali, o ſpermatiche.

NN. Lo ſtrato verticale, o longitudinale della tunica muſculare.

OO. I canali deferenti.

PP. Gli ureteri.

Fig. III.

D. La ſommità della veſcica.

E. L'apertura morboſamente dilatata dell'uretere ſiniſtro.

F. Quella del deſtro.

GH. Il ſarcoma rivoltato in baſſo per far vedere la parte ſana del *Trigono* fino alla ſoce degli ureteri medeſimi, che nello ſtato naturale ſogliono aprirſi nella veſcica con due feſſurette convergenti in baſſo, appunto come le rappreſentò il *Terraneo* nella Fig. II.; alcune volte poi ancora come ſi veggono nella Tav. XV. Fig. III. delle *Santorino-Girardiane*, Lett. *ee*.

I. La proſtata ſpaccata.

K. Il ſeno del Verumontano. - *L.* L' uretra ſpaccata.

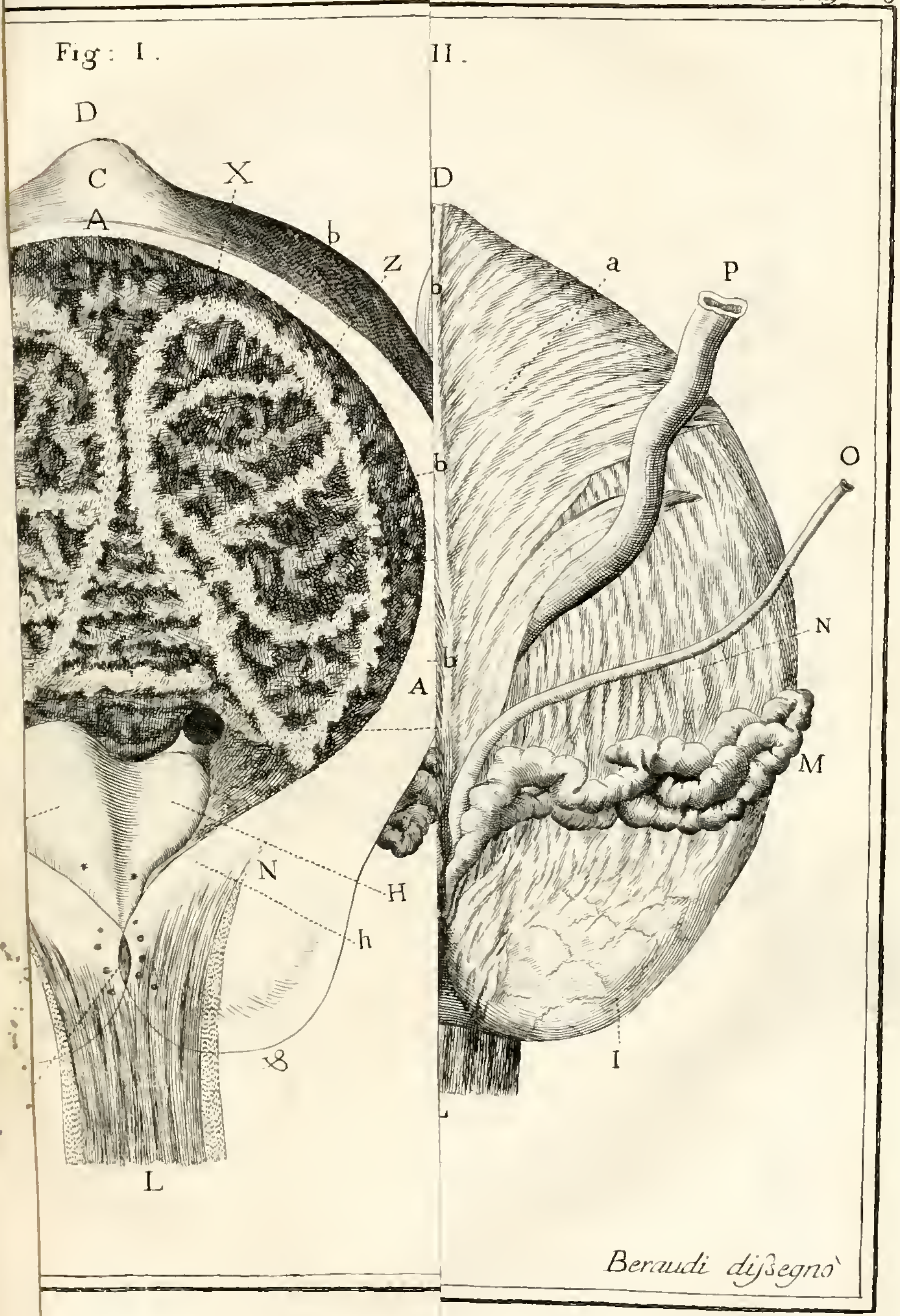


Fig: I.
II.
D
C
A
X
b
Z
D
a
P
b
b
O
N
b
A
M
N
H
h
I
L
Beraudi dissegnò

Fig. I.

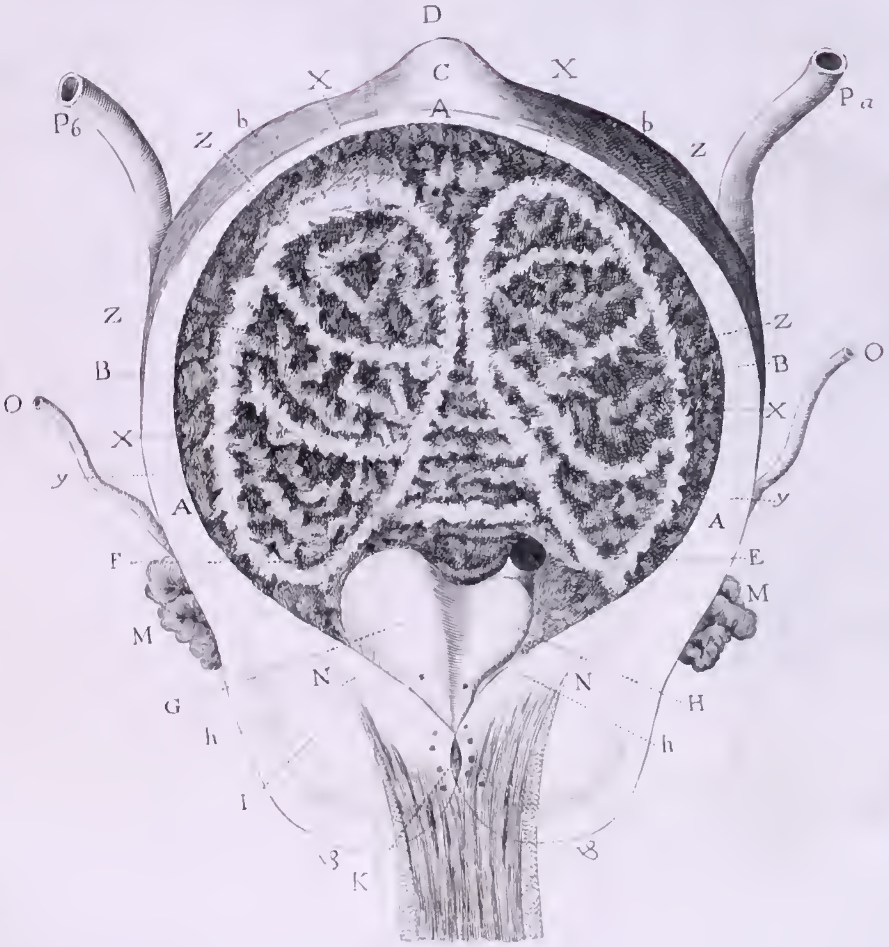
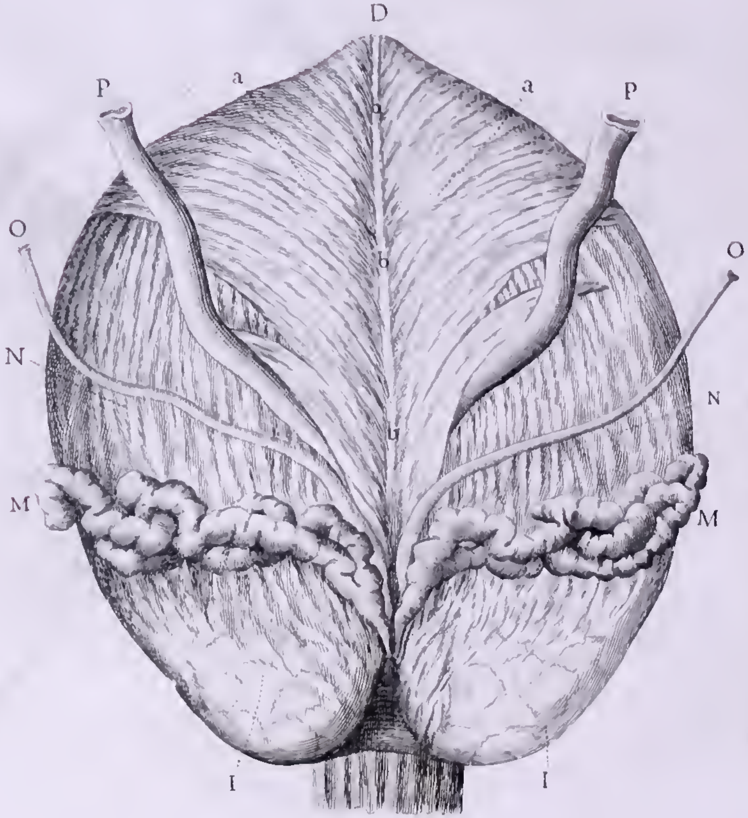
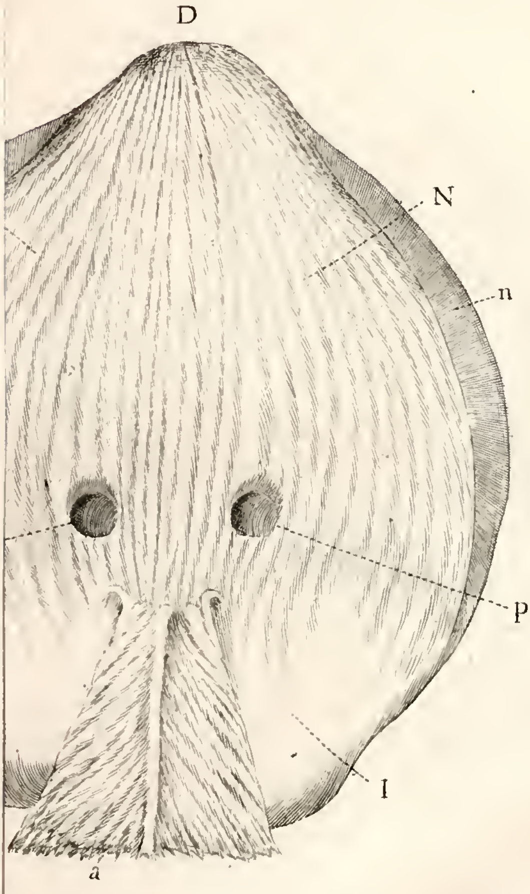


Fig. II.



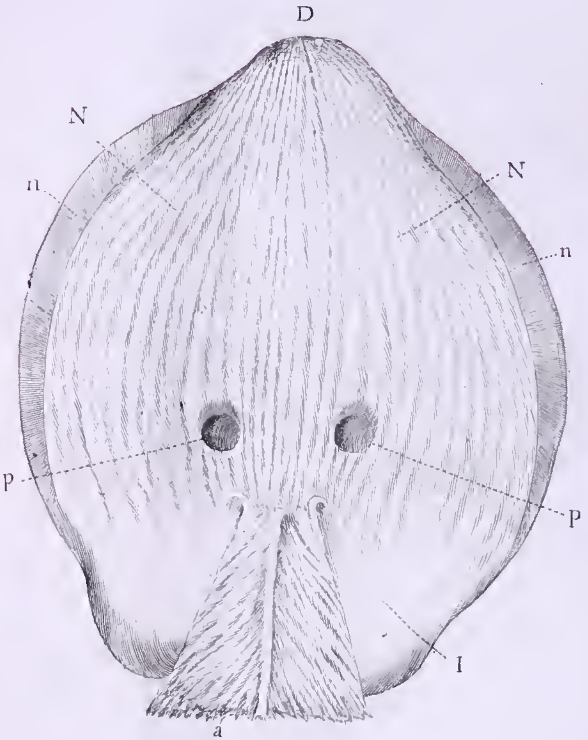
Malacarne Notomizzò *Beraudi dissegnò*

Fig: IV.



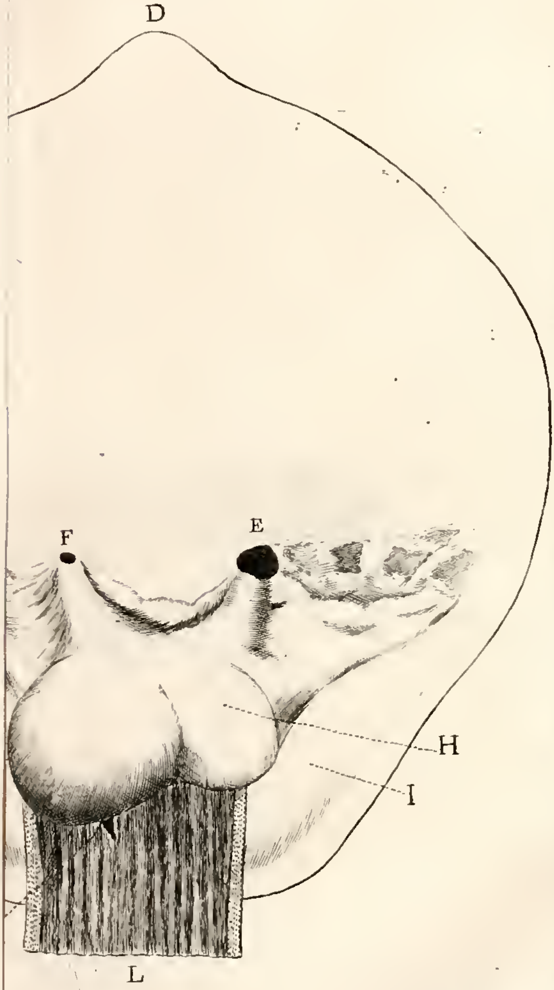
...izzò Beraudi dissegnò

Fig. IV.



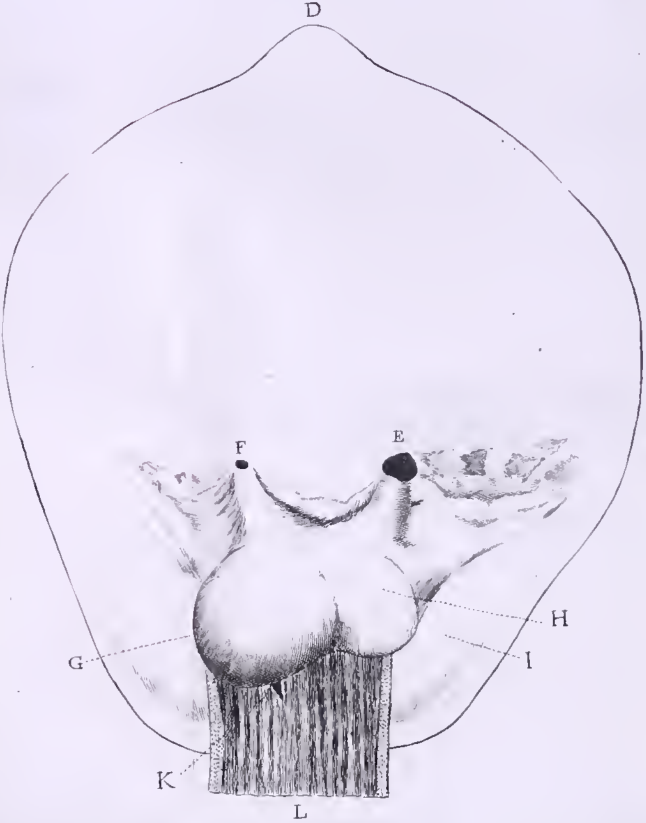
Malacarne Notomizzò *Beraudi dißegnò*

Fig: III.



Berardi disegnò

Fig: III.



Malacarne Notomizzò Berardi dissegnò

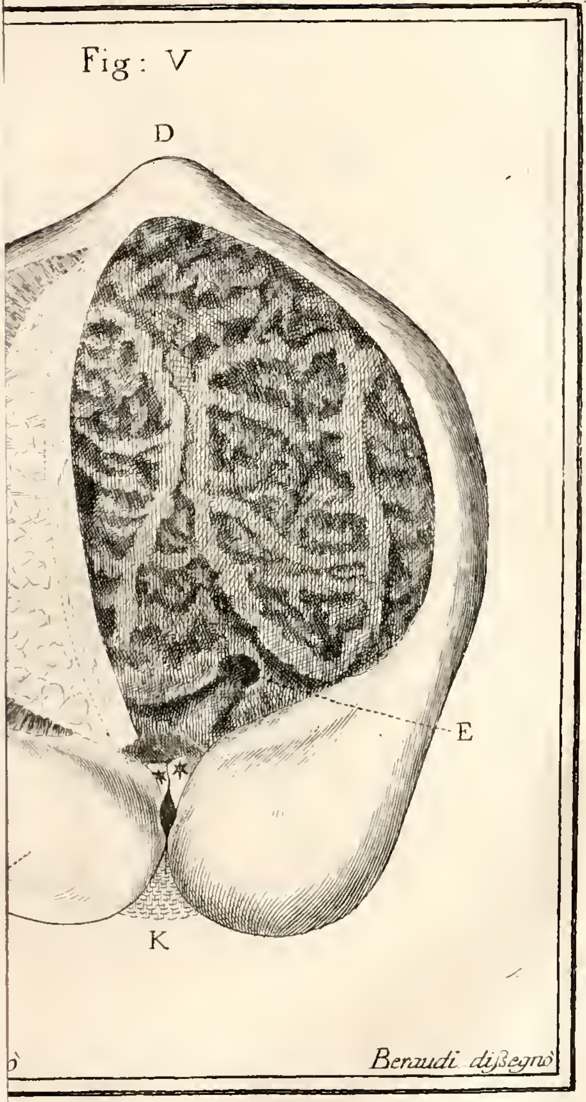


Fig: V
D
E
K
...ò
Beraudi dißegnò

Fig: V

Malacarne Notomizzò *Beraudi dißegnò*

Fig. IV.

a. Il mufculo penniforme già feparato, recifo in traverfo a picciola diftanza dalla fua origine, e piegato in giù.
D. La fommità della vefcica, dove convergono moltiffime fibre dello
NN. Strato longitudinale, o verticale, che concorrono ad avviluppare l' uraco, e a formare il ligamento fofpenforio della vefcica.
NN. Porzione del piano traverfale coperto dalle fibre del verticale.
PP. Le aperture efteriori della vefcica; nelle quali penetrano obbliquamente convergendo gli ureteri, che rafente la vefcica erano di calibro quafi uguali.
I. La proftata.

Fig. V.

Rapprefenta la faccia interiore della vefcica fgombra del farcoma ftato recifo in ** acciocchè fe ne poteffero meglio vedere gli ftrati della tunica mufculare.
n. Strato traverfale.
ZX ZX. Lo ftrato interiore, o reticolato; fra quefto ed il precedente appare una lamina, o fia tela di teffuto cellulare molto denfa, forte e bianca, fulla quale ftava tenacemente incollato queft' ultimo.
D. La fommità della vefcica. - *E.* La bocca dell' uretere finiftro.
I. La proftata fpaccata. - *K.* Il feno del Verumontano.

ESPOSIZIONE ANATOMICA

DELLE PARTI RELATIVE ALL' ENCEFALO DEGLI UCCELLI.

TRATTATO II.

Delle membrane, che ne avvolgono il cerebro.

Del Sig. VINCENZO MALACARNE Direttore delle R. Terme Acquesi, e Chirurgo Maggiore del Real Presidio di Torino.

Al Chiarissimo Sig. MICHELE GIRARDI Medico di Camera di S. A. R. il Duca di Parma, Presidente al Gabinetto di Storia Naturale, Professore primario della medesima, e di Notomia in quella Regia Università.

CI è libero finalmente il campo d' esaminare l' encefalo degli uccelli, e possiamo farlo con tanto maggior esattezza, quanto più distinte sono le parti ossose, dalla cognizione delle quali in tutte le regioni loro dipende quella degli organi dentro di esse contenuti.

La disposizione, e l' estrinseca forma di questi è veramente assai diversa da quella, che hanno nei crani umani, e qualcheduno dei medesimi occupa sito in apparenza troppo differente perchè ci dobbiamo stupire dell' avere alcuni Anatomici creduto mancare in questa classe d' animali. Ciò nulla ostante possiamo lusingarci, che d' or in avanti riescirà meno oscura la notomia di questi encefali, avendoci noi impiegata quanta diligenza ci fu possibile, e proccurato di spiegare chiaramente il risultato delle nostre ricerche, perciocchè se con gli stecchi miei, appoggiato a quelle poche notizie, che i chiarissimi *Willis*, ed *Allero* ce ne hanno lasciate, parmi d' essere arrivato non molto lontano dal ridurre l' Encefalotomia degli uccelli a quel grado di evidenza, cui è già

vostra mercè, o meritamente Celebratissimo Signore, la umana, e mercè dei lavori felici del vostro degnissimo allievo il Sig. *Gennari*, cui debbono accoppiarsi il nostro Sig. *Palletta*, ed i chiarissimi *Wrisbergio*, e *Semmeringio*, se con la debole mia vista, pure ho sviluppate, e discoperte alcune cose di qualche importanza; egli è giusto sperare, che altri di mano più destra, e d' occhio più perspicace fornito, debbasi in breve tempo inoltrare assai più addentro, ed esporci quel tanto, che v' ha di più recondito, e forse di più essenziale, che pure si è sottratto alla mia curiosità.

Nel secondo Trattato, che vi presento, troverete descritte le meningi degli uccelli, intorno alle quali *Willis* è stato alquanto più diffuso che *Allero*, e non meno veridico di questo. Mi piace recarvene intiera la descrizione cavata dal capo quinto del famoso Trattato *De Cerebri Anatome* nel quale *Willis* esponeva tutte le notizie, che si era proccurate intorno al cerebro degli uccelli, e dei pesci, acciocchè veggiate quanto se ne sapeva da quel grande Anatomico, e comprendiate quanto io gli debba.

„ Cranii tegmine sublato (disse Willis) *dura meninx* molem contentam arcte complectitur.

„ In medio illius, ubi cerebrum in duo *hemisphæria* dividitur, *sinus in longum protensus* habetur, qui tamen *nulla falce* interstitio dimissa, cerebro minus profunde inseritur.

„ Dein ubi hæc membrana *cerebrum*, *&* *cerebellum* interstinguit, duo *sinus laterales* efformantur.

„ Insuper volucribus *sinus quartus* adest, verum qui aliquanto posterius, quam in homine, aut quadrupedibus situm habet, nam paullo infra *glandulam pinealem*, *duræ meningis processus* cavus, & teres super medullæ oblongatæ crura dimittitur, ubi statim dividitur in *duos ramos*; quorum utrimque unum sursum emittit, in *cavitatem inter membranam striatam*, & cerebri hemisphærium in posteriore cerebri parte consitam.

„ Superiore hac membrana, sive *dura meninge* circumquaque discissa, & seposita, *Pia mater* valde tenuis apparet, quæ non ut in homine, aliisque perfectis animalibus, *tam crebris vasorum plexibus* insignitur, verum hæc meninx su-

„ btilissima fibrarum textura constans, *cerebri* intus contenti „ *superficiem planam*, & æquabilem, *gyrisque*, *&* *anfractibus* „ *prorsus destitutam*, solummodo investit undique, ac intime „ succingit. „

Altri squarci potrei qui trascrivere dalle opere anatomiche del lodato Autore, i quali però non esprimendo nulla di più, tralascio di farlo per passare quanto prima alla conferma d'alcune delle notizie espostevi, e di quelle che addurrò trascritte dai libri d' *Allero*, e alla dilucidazione delle meno chiare, intanto che vi verrò unendo quelle poche, onde non ho trovato altrove indizio.

Fatica bisognosa di tutta la vostra indulgenza, e del compatimento del Pubblico, del quale non ho ragione di dubitare, se ho la sorte d' ottenere la prima, il vostro autorevole giudizio avendo tanta forza, e regolandosi con il vostro esempio tutti coloro, che ambiscono di professare con lode la Notomía, la Storia naturale, de' maravigliosi vostri progressi nella quale fanno chiara testimonianza le singolari osservazioni sugli organi della respirazione degli uccelli che del Tomo antecedente di queste nostre *Memorie* fanno degnissima parte.

CAPITOLO I.

Della Dura-Madre

TESTO ALLERIANO.

„ Là dove gli emisferi del cervello sono l' uno all' altro „ vicini, ivi la Dura-madre forma una brevissima falce (*a*).

ARTICOLO I.

Notizie generali sulla D. M. degli Uccelli.

§. 1. Questa membrana, la tessitura della quale negli uccelli è simile a quella, che vi si osserva negli uomini, e negli

(*a*) *Dura membrana cerebri qua hemisphæra sibi proxima sunt, edit brevissimam falcem.*

gli altri animali, ha nei primi diverſe particolarità, che meritano d' eſſere conoſciute: e primamente, pellucida nelle diverſe ſpecie, in alcune però è colorita, per eſempio nel gallo d' india è di colore foſco ſudiccio, quaſi come la *D. M.* delle vipere. Duolmi di non avere conſervato almeno il nome nazionale, ſe non i caratteri di certi uccelli d' acque, alcuni dei quali in diverſi tempi eſſendo ſtati preſi ſulle ſponde del fiume Bormia, che ſcorre vicino alla città d' Aqui in Monſerrato, io ne ho notomizzato due pendente il mio lungo ſoggiorno alla direzione dei Militari a quelle R. Terme, e nel cranio vi trovai la *D. M.* d' un vivo colore aranciato.

2. Comprime, ed abbraccia così eſattamente tutto il cerebro, e ne mantiene così ſtretto avvicinate tutte le porzioni, che in qualunque menoma parte venga reciſa, o lacerata, toſto la ſoſtanza cerebrale ne sbuca fuori, nè vi ſi può più raſſettare, e quando ſe n' ha ſpogliato tutto un emisfero, non è più poſſibile riveſtirnelo intieramente.

3. La ſoſtanza di queſta meninge nelle oche, e negli altri volatili, è molto robuſta ſe ſi ha riſguardo alla tenerezza delle altre parti molli dei corpi loro: ed anche in quei ſiti, dov' è più traſparente, e più ſottile vi ſe ne poſſono ſenza difficultà diſtinguere le due lamine, e la ſoſtanza fibroſa, che ſeguendo qua e là diverſe direzioni ſi trova fra le medeſime. A tal fine però è neceſſario laſciarla ſeccare alquanto affiſſa alle oſſa, ed allora tentare di ſvellerla dalle medeſime, perciocchè lacerandoſi irregolarmente, rieſce agevole ſenz' altra preparazione d'aſſicurarſi tale eſſerne la ſtruttura; ed ancora meglio poi ne verremo convinti ſe, facendola ſeccar bene, la eſamineremo con le cautele indicate nella *Encefalotomia univerſale* (*a*), dove ſi tratta delle *D. M.* umane.

4. Ciò non è troppo conforme a quanto reca il chiariſſimo Sig. *De-Buffon* nell' aurea ſua *Storia naturale* parlando

(*a*) Parte I. Tratt. II. Cap. I.

del gufo (*a*), potendo fupporfi appoggiato fulla nuda afferzione di qualche Autore (*b*), cui fia paffato fotto gli occhi l' encefalo morbofo d' uno di quei volatili, dove le meningi aveffero contratta preternaturale aderenza, piuttofto che fulla Notomia di parecchi dei medefimi; perciocchè nel cranio di tre, dacchè fono in Torino (oltre a due ftati già da me diffecati in Aqui) ho fempre trovato la *D. M.* non folo diftinta dalla Pia, e alla bafe del cerebro quefte due tramezzate dall' aracnoidéa, ma la prima compofta di due lamine racchiudenti un teffuto fibrofo.

5. Le aderenze, che la fioccofa lamina, o efteriore della *D. M.* ha con le pareti laterali, e con la volta del cranio, fono deboli, ma altrettanto forti poi s' incontrano ai margini dei fori alle crefte, agli angoli, agli orli offofi, che dividono, e limitano le foffe di quefta cavità.

ARTICOLO II.

Pieghe, *onde la* D. M. *con le fue lamine interiori fi allunga verfo il centro dell' Encefalo*

6. Intanto, che la fioccofa lamina fta aderente a tutto il pariete della cavità del cranio, le altre due lamine formano otto allungamenti, o pieghe nella cavità medefima, che dalla figura, direzione, ufo, e fito loro io nomino *Falciforme* la prima; *Arcata* la feconda; la 3, e la 4 *Orizzontali*; la 5, e 6 *Otturatrici*; *Pituitarie* le due ultime.

Piega Falciforme.

7. La *piega falciforme*, o la *falce* (nome ch' io adopero più per l' analogia del fito, e per uniformarmi ad *Allero*, che per veruna raffomiglianza ravvifatavi mai con la falce (*c*) delle *D. M.* umane) è uno fcoftamento delle lami-

(*a*) *Le cerveau du Grand Duc eft recouvert d' une fimple tunique plus epaiffe que celle des autres oifeaux, qui, comme les animaux quadrupedes, ont deux membranes qui recouvrent la cervelle*. Vol. II. pag. 128.

(*b*) Infatti alle note *f. g.* della pag. citata egli cita *Schwenckfeld*, e *Giovanni di Muralto*.

(*c*) Nella Parte I. della *Encefalotomia umana*, alla nota del §. 20 io aveva già fcritto "La falce della *D. M.* „ nei quadrupedi s' immerge pochiffimo tra emisferi, ma nei volatili è „ appena vifibile e vi pare fatta all' „ unico fine di contenere il *S. L.*, onde non vi merita punto il nome di „ *Falce*". Nel paffo già recato di *Willis* non vi fi ammette la *Falce*.

ne fibrosa, e membranosa dalla fioccosa, appena capace di contenere il *seno longitudinale*, di modo che fra i due emisferi del cervello vi ha corrispondentemente un solco superficiale.

8. E' lunga quasi quanto gli emisferi, principiando soltanto al margine delle fosse olfattorie (*a*), dove sul cervello ha principio il solco longitudinale; all' indietro finisce al margine dell' arco, che limita superiormente al dinanzi la loggia del cervelletto, proprio sulla parte più elevata del medesimo (*b*); sicchè gli emisferi nelle anitre, e nelle oche hanno maggior estensione, che la supposta falce.

9. Sollevando la *D. M.* come per ispogliarne gli emisferi, e rovesciandola a tergo, si vede lacerarsi ai lati della piega falciforme una selva di filamenti come di cellulosa: questi sono i vasellini provenienti dalla *Pia-madre*, e dal cerebro per votarsi nel *S. L.*, uniti a quei tenuissimi filuzzi (*c*) onde la membrana *aracnoidéa* sta pure unita alla *P. M.*

10. La *piega arcata* pende perpendicolarmente dal margine dell'arco poc' anzi mentovato; principia dalla biforcazione del *seno longitudinale*, onde n' è più esattamente separata la sommità della faccia anteriore del cervelletto dall' incontro del margine posteriore d' amendue gli emisferi del cervello. Piega Arcata.

11. La *pieghe orizzontali* si vedono tra la faccia inferiore, ossia base degli emisferi, e la superiore de' *talami dei N. ottici*. Sono poco larghe, ed hanno circa sette linee di lunghezza; cuoprono l' esterno margine convesso dei *talami*. Pieghe Orizzontali.

12. Le *pieghe otturatrici* hanno questo nome perchè otturano in gran parte, e nascondono le fosse sfondate (*d*), e la doccia, che guida il *N. oftalmico* fino al proprio foro (*e*). Sono più brevi delle precedenti non avendo salvo tre linee di lunghezza, ma sono più larghe, e si trovano fra l' orlo superiore del foro oftalmico, e il posteriore delle fosse sfondate. Nascondono conseguentemente anche i *N. oftalmici*, e Pieghe Otturatrici.

(*a*) Ved. Tratt. I. Part. II. cap. II. Art. I. §. 1, 6, 9.

(*b*) Ivi §. 7, 10.

(*c*) *Encefalot. Umana* Part. I. Tratt. II. §. 275.

(*d*) V. Tr. I. Part. II. cap. II. Art. I. §. 9, e 12.

(*e*) Ivi cap. III. Art. VIII. §. 2.

si ripiegano perpendicolarmente in basso, chiudendo nelle loro fosse i grossi principj gangli-formi de' *N. mascellari superiori*, ed *inferiori*.

P. Pituitarie. 13. Le *pieghe pituitarie* sono ancora più brevi, distinte, situate ai lati della fossa (*a*), e nascondenti una parte della *glandula pituitaria*, e le aperture interne di quei due canaletti, che guidano nelle orbite il paro de' *N. motori comuni* degli occhi (*b*).

ARTICOLO III.

Degli Imbuti, e dei sacchi, onde la D. M. *si scosta dal centro dell' Encefalo.*

14. Gl' *Imbuti* principali, che la *D. M.* forma con tutte le sue lamine, immergendosi in certe cavità scolpite in quella del cranio, sono tre, l' *olfattorio*, il *pituitario*, e l' *occipitale*. I sacchi sono due nominati *auditorj*.

Imbuto olfattorio. 15. L' *imbuto olfattorio* è formato dalla porzione anteriore del gran sacco della *D. M.*, il padiglione elittico del quale ha verso i lati anteriori due cannuccie divergenti membranose.

Il padiglione è assai più largo in traverso, che alto, e riceve la porzione anteriore degli emisferi del cervello: le cannuccie guidano verso i fori olfattorj i due grossi, e polposi nervi dello stesso nome, oltre ai due *emissarj nasali* della *D. M.*; finiscono distintamente una per lato nelle caverne proprie del naso (*c*)

Imb. Pituitario. 16. Tra le pieghe pituitarie poc' anzi accennate (13), la *D. M.* si allunga pur anco prima verticalmente, poscia obbliquamente all' indietro nella fossa pituitaria per dare ricetto a quella *glandula*, ed uscita dal cranio ai due *emissarj* dello stesso nome, e ai nervi *Grandi simpatici*. Quest' imbuto però è traforato eziandio al davanti per darvi entrata a due notabili arterie (*d*), ed uscita a due vene considerabili,

(*a*) Ivi cap. II. Art. II. §. 3, e segg.
(*b*) Ivi cap. II. Art. II. §. 6, e cap. III. Art. IV.
(*c*) Ivi cap. II. Art. I. §. 1, 1, 3, 4.
(*d*) Ivi cap. II. Art. II. §. 4.

che sono gli *emissarj pituitarj* delle *D. M.* (*a*): è pure traforato indietro dalle due arterie *carotidi*, insieme alle quali escono del cranio i *N. Grandi simpatici* (*b*) già mentovati.

17. L' *Imbuto occipitale* è formato dalla *D. M.*, che giunta all' entrata della loggia del cervelletto e all' orlo anteriore del catino, a misura che si avvicina al gran foro occipitale, si restringe divenendo più forte, e più spessa: contrae fortissima aderenza con l' orlo del medesimo, e guida al canale delle vertebre la midolla allungata. Imb. occipitale.

18. I *sacchetti auditorj* si veggono sotto l' aspetto di due appendici cave, cieche, larghe e profonde proporzionatamente alle fossette ovali(*c*). Sono dirimpetto all' unione laterale del cervelletto con la midolla allungata, e contengono due tenere appendici delle nominate sostanze, ch' io inclino a considerare come i veri *N. auditorj*. Questi sacchetti sono di colore cenerognolo fosco, vergati di piombino per molti seni, che ivi tra le sue lamine contengonsi dalla *D. M.*, ordinariamente pieni di sangue, i quali si votano poi nelle fosse sfondate mediante gli *emissarj laterali esterni*. Sacchetti auditorj.

ARTICOLO IV.

I Seni della D. M.

19. Undici sono i seni più ragguardevoli ch' io abbia potuto discernere in questa meninge, cioè

Uno *Longitudinale*; Due *Laterali*;
Due *Subalterni*; Due *della piega arcata*;
Due *delle p. orizzontali*; Due *delle p. otturatrici*,
e due finalmente *della Loggia del cervello*.

20 Mentre che descriveremo questi secondo la disposizione loro nell' encefalo dalla fronte all' occipite, s' indicheranno pure gli *emissarj*, che sono già stati numerati nel Trattato (*d*) precedente con i nomi seguenti

(*a*) Ivi cap. III. Art. VI.
(*b*) Ivi Artic. VII.
(*c*) Ivi cap. II. Art. II. §. 13, e 15.
(*d*) Part. II. cap. II. Art. I. §. 3, nota (**).

Due *Nasali;* Due *Pituitari;*
Due *laterali esterni;* Due *laterali posteriori*,
e due *Occipitali*.

TESTO ALLERIANO (a)

„ Nella Falce v' è un seno, che ne siegue l' estensione „ fino al cervelletto, dove giunto manda un altro ramo ret- „ to, che dalla faccia posteriore del cervelletto medesimo „ scorre lunghesso la faccia pure diretana della spinale mi- „ dolla.

21. Non poche notizie intorno al seno longitudinale e agli altri delle *D. M.* anserine sono state già sparse da me nel precedente Trattato, capaci tutte di renderne più intelligibile la descrizione, che sono in procinto di farne, qualora alle medesime si dia una novella occhiata: nè occorrendo di ripeterle vi aggiungerò soltanto le cose notabili non ancora state esposte: e primamente questo seno non è triangolare, ma rotondo; ha qualche briglia, o *corda Willisiana* nella sua cavità, e queste lo rendono in alcuni siti incostanti varicoso.

22. Riceve il sangue onde tutta la porzione superiore della *D. M.* è irrigata non meno, che quella della *Pia*, di maniera che le vene anteriori vengono a mettervi foce quasi direttamente in avanti per lo spazio di sette linee nei *S. L.* lunghi lin. 14. Per lo spazio delle 4 lin. di mezzo poi le vene vi sboccano con tre direzioni costantemente distinte; le anteriori obbliquamente in avanti, le mezzane rettamente all' insu, le posteriori obbliquamente in dietro. Il rimanente del seno riceve i vasi più diretani della *D*, e della *P. M.*, che si scaricano nella porzione vicina a biforcarsi per formare i *seni laterali*.

Emissarj Nasali. 23. Intorno al padiglione elittico dell' imbuto olfattorio (15) sono molto confusi, perchè ai lati del medesimo il *S.*

(*a*) *In qua* (falce) *sinus est longitudinem sequens ad usque cerebellum, ibi ramum alium rectum trans cerebellum mittit in superficiem medullæ spinalis*.

L. si biforca, e ne siegue la direzione delle cannuccie sino nelle orbite, dove si scarica del sangue nelle prossime vene. Questi due prolungamenti anteriori del seno vengono appellati *emissarj nasali* della Dura-madre.

24. Per quello poi, che spetta al ramo, che *Allero* dice partire dal *S. L.*, e al di là dal cervelletto discendere per iscorrere sulla spinale midolla, egli mi sembra che il nostro chiarissimo Autore accenni quella grossa vena, che nelle galline, nei faggiani, nei nibbi, nelle beccaccie, e nelle pernici si curva dalla faccia anteriore del cervelletto sulla sommità del medesimo per portarsi veramente sulla faccia posteriore del principio della midolla suddetta; ma nelle oche, nelle anitre, e nè tampoco nei galli d' india non l' ho mai ritrovata.

Testo Alleriano (*a*).

„ Altri due rami rivolti a destra, ed a sinistra si prolun-
„ gano convergendo per continuarsi nelle vene jugulari.

Non sapendo io distinguere dal Testo se i due rami, dei quali fa qui menzione *Allero*, sieno quelli, che procedono immediatamente dal seno longitudinale, o se favelli d'altri, che pure vi si scorgono assai numerosi anche tra i ricettacoli sanguigni di questa meninge, per non errare descriverò i principali tra quelli, che con le ripetute Notomie di questi encefali ho discoperto.

25. E in risguardo ai primi ho trovato due rami, che dall' estremità posteriore del *S. L.* delle oche procedono, e si curvano sulla convessità, ossia lembo fisso della piega arcata (10) per gettarsi nella loggia del cervelletto, e di là nei ricettacoli venosi ai fianchi del gran foro occipitale. (*b*). Sono obbliqui, e circonflessi innanzi, in suori, e in basso di maniera, che il destro suol essere continuo con il seno longitudinale, poichè questo si piega notabilmente più a destra; Seni laterali.

(*a*) *Alii duo rami dextrorsum, & sinistrorsum conversi in venas jugulares continuantur.*

(*b*) Tr. I. Par. II. Cap. III. Art. XVII.

è tre o quattro volte più amplo del finistro, del quale alcune fiate si discernono a pena le traccie.

26. Avvi un tronco notabile di vena, che si eleva dall' intervallo degli emisferi, rasente la faccia anteriore del cervelletto; ma questa non ne oltrepassa la sommità, perchè si getta nella biforcazione del *S. L.* come la grossa vena di *Galeno*, che nei cerebri umani sbocca nel torchio d'*Erofilo*.

Vena verticale.

27. Un tale tronco nelle oche prende origine da quattro venuccie procedenti ognuna da una distinta estremità del *quadruplice plesso corioideo* (*a*), alle quattro porzioni del quale servono come di picciuolo.

28. Vi concorrono pure non pochi ramuscelli dispersi sulle faccie vicine dei *talami*, e dei *lobi mezzani*, che tutti, nel punto della unione dei tre solchi superiori del cervello, si riuniscono in un solo, che ascende diritto verso la foce mentovata, accompagnato da un *plesso vasculare* notabile, che cuopre, e sostiene la *glandula pineale* stata fin ora sconosciuta in questi encefali, la quale ad ogni modo vedremo ritrovarvisi (*b*), come in tutti gli uccelli, e precisamente in questo sito.

29. Procede inoltre nei crani anserini da due altri ramuscelli, i quali costeggiando la menzionata glandula, vengono a gettarsi nel tronco stesso, vicinissimo allo sboccare nella biforcazione del *S.* longitudinale.

30. Nei tordi, e negli storni come nei passeri solitari si veggono due vene costeggianti i lati della sommità del cervelletto, che si vanno a congiungere verso il margine superiore del gran foro occipitale, ma non si curvano (come negli uccelli mentovati al §. 24.) sulla sommità per discendere perpendicolarmente sulla faccia posteriore del cervelletto.

31. Dietro alla biforcazione del *S. L.*, immediatamente a tergo del principio dei *S.* laterali, partono due altri seni subalterni, che scorrono per que' due solchi, che serpeggiano irregolarmente per la volta della loggia del cervelletto

Emissarj occipitali.

(*a*) Ved. Tratt. Terzo Cap. IV. Arti IV.
(*b*) Tratt. III. Cap. IX.

to (*a*); portano il ſangue nei due ricettacoli venoſi già notati nei ligamenti, onde la prima vertebra s' articola con il capezzolo dell' oſſo occipitale, e ſono gli *emiſſarj occipitali*.

32. Il lembo libero, e una parte del corpo della piega arcata (10) contiene un ſeno facile a diſcernerſi per lo colore piombino, o roſſo, di cui lo tinge il ſangue, che vi ſta dentro, e che vi arriva per li vaſi della *D.*, e della *P.* madre che vi ſi appoggia. Queſto ſeno lo getta da tut' e due i lati negli ampj ſeni delle pieghe orizzontali (11). Io lo nomino ſeno arcato. Seno arcato.

33. Molte ſono le radici dei ſeni, che ſi oſſervano in queſte ultime pieghe, ricevendo eſſe per tutto il corſo loro quel ſangue, che ſcorre per li vaſellini delle parti della *D. M.* aderenti, e vicini alla foſſa ottica (*b*); ſicchè gonfiano preſto, e giunti dirimpetto al margine ſuperiore delle foſſe ovali (*c*), ricevono molte venuccie, oltre al ſangue, che vi sbocca dalle eſtremità del lembo libero della piega arcata. Seni orizzontali.

33. All' altezza delle foſſe ovali trovaſi quel ſolco irregolare e profondo, che abbiamo già deſcritto (*d*) e detto ſtenderſi tra la punta diretana della creſta, cui ſi attaccano le pieghe orizzontali, e l' orlo rilevato delle ſuddette foſſe; ſi allarga, e ſcorrendo quaſi perpendicolarmente fino alla parte delle foſſe sfondate (*e*) più lontana dal centro del cranio, prende una direzione obbliqua in baſſo per terminare nel foro maſcellare inferiore (*f*). In ſimile ſolco ha ricetto il terzo paro degli *emiſſarj* della *D. M.* detti *laterali eſterni*, e per mezzo loro viene traſmeſſo fuori del cranio delle oche, e dell' anitre il ſangue, che ſcorre per i ſeni ſtati finora deſcritti, Emiſſarj laterali eſterni.

34. Immergendoſi la *D. M.* nella foſſa pituitaria, vi ſi raccoglie tra le lamine molto ſangue derivante dalle parti vicine della baſe del cerebro, il quale ſi ſcarica fuori del cranio per le due aperture ovali della parte anteriore del fondo del- Emiſſarj pituitarj.

(*a*) Ivi Cap. II. Art. I. §. 11.
(*b*) Ivi Art. II. §. 1.
(*c*) Ivi §. 13., e ſeg.
(*d*) Ivi §. 16.
(*e*) Ivi.
(*f*) Ivi Cap. III. Art. X.

la foffa pituitaria medefima (16), ed a quefti canali abbiamo dato il nome d' *emiſſarj pituitarj*.

Seni delle pieghe otturatrici.

35. Vi s' aggiunge il fangue del feno occupante le pieghe otturatrici (12), del quale ben fovente fi vede tinta tutta la loro fuperficie.

Emiſſarj laterali poſteriori.

36. Gli *emiſſarj laterali poſteriori* fi trovano ful fondo del catino full' orlo pofteriore dei fori del par vago, e sboccano in parte nel golfo venofo analogo a quello delle jugulari interne de' crani umani; in parte raccogliendo il fangue, che viene dai lati di tutto l' imbuto occipitale (17) ne dirige il corfo per le caverne dell' orecchio verfo le aperture efteriori de' fori maftoidei.

37. Reftaci ancora da indicare le ftrifcie irregolari, ond' è vergata la *D. M.* della loggia del cervelletto, prefcindendo da quelle che corrifpondono ai feni fubalterni (31), in effe fgorga il fangue di due venette nafcenti dalle minute diramazioni delle parti pofteriori degli emisferi, e fulla *P. M.* vicina ne ricevono pure da due altre, che falgono dal lato più baffo dei folchi, onde gli emisferi del cervello fono feparati dal cervelletto. Si votano al davanti o nella biforcazione del *S. L.*, o nei laterali, o nei fubalterni, e allo 'ndietro negli *emiſſarj occipitali*.

38. E' difficile, che l' occhio nudo arrivi a fcoprire ai lati del *S. L.* fu qualfivoglia parte della *D. M.* arterie veramente roffe; fe ne fcorgono bensì parecchie verfo la radice delle apofifi orbitarie pofteriori (*a*), e nella loggia (*b*), dove ne fono pure manifefte alcune anaftomofi.

39. Non bifogna però confondere nè quefte, nè i vafi venofi finora accennati, con i vafi della *P. M.*, dei quali numerofi, e bizzarramente difpofti per le frequenti anaftomofi, darò notizia a luogo opportuno (*c*).

40. Nella teffitura di quefta dura meninge non ho mai trovato in veruno uccello glandula d' alcuna fpecie.

41. Tanto meno vi ho mai potuto difcernere fibrilla ner-

(*a*) Tr. I. Par. I. Cap. II. Art. II. §. 6.

(*b*) Ivi Par. II. Cap. I. Art. I. §. 10.

(*c*) Do quefto avvifo perchè la trafparenza della *D. M.* degli uccelli è tale, che tutti i vafellini della Pia fembrano al primo fguardo appartenenti alla Dura.

vosa; e sono più sicuro in questa classe d' animali non esservi nervo destinato a fornirla di rami, perchè ne ho sempre, in tutti gl' individui d' ogni specie stati notomizzati da me, trovato il tragitto dei tronchi e nei canali apprestati loro dalla stessa meninge, e per li fori e le scanalature delle ossa, libero, e senza quelle tante aderenze, e legami, che pur si osservano negli encefali umani in risguardo ai *N.* olfattori, agli oftalmici, ai mascellari superiori ed inferiori, ai vaghi, ai glossofaringéi, agl' ipoglossi, ed agli accessorj del *Willis*; dai quali nervi però dopo i chiarissimi *Fantoni*, *Allero* e *Caldani* posso francamente asserire io pure di non avere osservato giammai ad allungarsi fibra negli encefali degli uomini, de' quadrupedi, e dei rettili destinata a diramarsi per la *D. M.*

42. La *D. M.* degli uccelli nella cellulosa, che ne colliga le lamine, contiene pur anco una considerabile quantità di linfa viscidetta, che la mantiene morbida e flessibile, e facilmente viene spremuta sulla superficie interna, mentre è fresca, mediante la compressione.

43. L' uso di questa membrana, e di tutte le parti, che ne abbiamo descritte, non è differente da quello, che loro si dà nell' *Encefalotomia* già pubblicata.

CAPITOLO II.

Della Pia-Madre.

TESTO ALLERIANO

„ Indi la Pia-madre, ed un tessuto cellulare uniscono gli „ emisferi (*a*).

44. La Pia-madre dei cerebri anserini è finissima, ed a malo stento vi si discernerebbe, se non ci venisse indicata da' numerosi vasi, che tutta leggiadramente la irrigano, assai meno però, che nelle umane.

(*a*) *Inde pia membrana hemisphæria unit, & cellulosa tela.*

45. Questi vasellini tinti d' un rosso florido vannosi anastomosando, e sembra che il canale di comunicazione principale tra gli anteriori e i posteriori sia un vaso curvo, che divide in due l' estensione di ciascuno emisfero.

46. Non appare, che questa fina meninge s' insinui profondamente nel solco longitudinale, che distingue gli emisferi, e se vi penetra pure alquanto, vi scarseggia molto di vasi all' occhio nudo visibili.

47. Insinuasi bensì in que' *solchi obbliqui*, che separano la faccia posteriore d' amendue gli emisferi dall' anteriore del cervelletto, nei *laterali*, che gli separano dai *talami de' N. ottici*, ed in tutte le divisioni apparenti del cerebro: si caccia nei *ventricoli laterali*, e nel *IV. ventricolo* più sensibilmente, che altrove, e di là getta due tenui appendici fin nelle *cavità de' talami*. Veste vasculosissima il *ponte*, e le *gambe del cervello*; nel rimanente è simile alla umana (*a*).

CAPITOLO III.

Della Membrana Aracnoidea.

48. Il tessuto cellulare, del quale *Allero* nel testo già qui recato fa menzione (*b*), è probabilmente la membrana aracnoidéa, che strettamente unisce i margini del *solco longitudinale del cervello*, e la base del cono formato dal *cervelletto* con le parti vicine dei *talami*, e con *la midolla allungata*, come anche i margini del *terzo ventricolo*.

49. L' esistenza di questa membrana negli uccelli minuti è piuttosto dimostrata dalla resistenzuccia, che oppone allo scostamento degli emisferi, e delle altre parti contigue ora mentovate, di quello che sia palpabile, nè soggetta alla vista. Resistenza più sensibile nei cerebri freschi, che nei maneggiati qualche tempo dopo la morte dell' oca, o nei cot-

---

(*a*) *Encefalot.* Parte I. Tratt. IV. pag. 150. e seg.

(*b*) Quando però intendessesi l' unione delle pareti del solco, e quella delle parti più profonde del medesimo, io non avrei coraggio di negarla fatta da un tessuto cellulare: anzi lo credo. Ved. il Trat. seguente §. sesto.

ti, dove ne rimane appena qualche leggiere veſtigio ſcoſtando un emisfero dall' altro, o ſcoſtandone il cervelletto. Mi è rieſcito però d' oſſervarla più volte anche nelle anitre, nei galli d' India, nelle galline e noſtrali e di Numidia, nel groſſo barbagianni di Svizzera, e generalmente negli uccelli più groſſi, e di notarne le briglie (9) (*a*).

50. Il ſito più proprio a vederla diſtinta fralle altre due meningi è alla baſe del cerebro, fra 'l ponte e i nervi olſattori, tra la faccia diretana del cervelletto, i lati, e la vicina eſtremità della midolla allungata: e qui eziandio nei crani bolliti ho potuto ſepararne lembi larghi tre o quattro linee: ma non vi ho mai ſaputo ravviſare ombra di vaſo ſanguigno.

TRATTATO III.

Del Cervello.

Al medeſimo Sig. MICHELE GIRARDI.

ANche a' commenti ſulla deſcrizione Alleriana delle parti del cervello negli uccelli, mi permetterete di far precedere quelle notizie originali, che *Willis* nel già citato ſuo lavoro ci ha laſciate, e ſono le ſeguenti.

1. „ Cerebri fabrica in volucribus aliter habet ac in ho„ mine, aut quadrupedibus, nam præterquamquod in ambitu „ ejus *anfractus*, & inæqualitates omnino deſunt, etiam in„ terius *corpus calloſum*, *&* *fornix*, etiam *corpora ſtriata* „ prorſus deſiderantur; atque inſuper ipſa cerebri compages „ alio modo configuratur.

2. „ Quo hæc melius perſpiciantur, cerebri anſeris, aut „ galli indici diſſectionem inſtitues: atque *membranis* diſciſ„ ſis, cerebri figuram, & medietatem ejus unam ab altera, „ leviter comprimendo, diducas; & ſeparare pergas, donec „ ventum erit ad ipſum fundum, in quo *duo corpora medul-*

(*a*) *Encefalot.* Par. I. Tratt. III. §. 215.

„ *losa* existunt , quæ *nervorum* instar , transversim protensa ,
„ *hemisphæria* invicem connectunt .

3. „ Utrumque interstitii latus *membrana subalbida* investit , quæ quidem *striis* velut *radiis* a toto ambita versus angulum inferiorem productis insignitur ; *striæque* istæ circa *corporum medullarium* insertiones concentrantur .

4. „ Dein si *membrana* hæc secatur in utroque cerebri *hemisphærio cavitas* subjecta apparebit , quæ totum ab interstitii latere spatium , ac insuper posticam cerebri regionem magna ex parte subducit , eaque *membrana striata* concameratur .

5. „ *Utraque cavitas* circa fundum in *ductum intermedium* ; *& communem* , qui ad *infundibulum* patescit , aperitur ; & ex utroque *ductus* istius latere , *medullæ oblongatæ crura* exporriguntur , quibus utrinque cerebri *hemisphærium per duo medullaria corpora* appenditur .

6. „ Nimirum e cerebri *mole ventriculo substrata meditullium unum* , & *e membrana striata ventriculum obtegente meditullium alterum* prodit .

7. „ E *binis* hisce *meditulliis* in utroque latere positis , *corpora medullaria nervorum instar* transversim protensa , duo cerebri *hemisphæria* invicem conjungunt : insuper bina hæc utrinque coalescentia utrumque cerebri *hemisphærium medullæ oblongatæ cruribus* affigunt .

8. „ Adeo cerebri figura in volucribus , si hominum & quadrupedum perfectiorum cerebro comparaveris , velut inversa esse videtur . Nam sicuti in his *pars corticalis* anterior est , eique *medullaris* substernitur ; ita in volucribus inferior cerebri compages , que mole crassa , & spissiori constat , *corticis* loco est .

9. „ *Membrana* autem *extima* , *& superior ventriculum* concamerans , supra quamvis aliam partem *medullaris* apparet .

10. „ Porro *ventriculi* in hominis , & quadrupedum cerebris infra , & prope fundum , in volucribus superius , & juxta oram exteriorem collocantur .

11. „ Volucrum cerebris , quia *fornix* omnino deest , *bini* tantum *ventriculi anteriores* adsunt , inter quos *plexus choroeides* expanditur , cujus *portio venosa a sinu quarto* paulo inferius oritur .

12. „ *Arteriæ* autem ex utroque latere *medullæ oblongatæ*
„ ascendentes accedunt.

13 „ Nec magis in ipso volucrum cerebro, quam in *medulla oblongata* heterogeneitas, sive conformatio ab eadem
„ in hominibus, & quadrupedibus longe dispar apparet: nam
„ in prima illius sectione, unde *nervi optici* oriuntur, *duæ*
„ insignes *protuberantiæ* lateri utrique accrescunt.

14. „ Hæ multo majoris proportionis quam in perfectio-
„ ribus *prominentiæ orbiculares*, adeo ut cerebrum alterum,
„ & succenturiatum videantur: utraque *albidi coloris*, & pu-
„ re *medullaris*, interius excavata est; ita ut in hujusce ge-
„ neris animalibus *bini ventriculi in cerebro*, *totidemque in*
„ *medulla oblongata* reperiantur.

15. „ Cumque in his, sicuti in cæteris quibuscumque ani-
„ malibus, etiam *cavitas cerebello* subjiciatur, *ventriculi* in
„ toto encephalo existentes numero pariter, ac figura, & po-
„ sitione differunt.

16. „ In medio *caudicis medullaris*, ubi scilicet istæ *pro-*
„ *minentiæ* lateribus ejus adnascuntur, *rima ad infundibulum*
„ ducens inducitur.

17. „ In istam autem *utriusque ventriculi apertura* dehi-
„ scit, ut minime dubium fuerit quin serositates ibidem con-
„ gestæ ista via amandentur.

18. „ Porro verisimile est has *prominentias excavatas*, *&*
„ *medullares* in volucribus *corporis callosi* vices supplere.

19. „ Pariter etiam observamus, quantum ad *cerebellum*,
„ & reliquam *medullæ oblongatæ* portionem inter aves, & alia
„ animalia haud magnum discrimen intercedere, nisi quod
„ *prominentiæ orbiculares* ante *cerebellum*, aliæque *annulares*
„ sub ipso in illis occurrentes, utræque in volucribus deside-
„ rantur: nempe hæ posteriores non videntur omnino requi-
„ ri: priorum autem vices a *prominentiis medullaribus exca-*
„ *vatis*, quales volucribus subesse ostendimus, facile sup-
„ plentur.

Non radunerò qui tutte quelle altre, che si leggono sparse per gli altri Trattati di quell' insigne Anatomico, perchè tornerà più in acconcio averle sotto gli occhi a misura, che si anderanno esponendo le parti, che ne vengono indicate.

CAPITOLO I.

Degli Emisferi del Cervello.

Testo Alleriano (a).

„ Quelle due porzioni del cervello dell' oca, che ſi nomi-
„ nano emisferi, ſono ovali, conveſſe, e ſi allungano al da-
„ vanti a foggia di cono, il termine del quale è un *proceſ-*
„ *ſo mammillare*, cioè il vero *nervo olfattorio*.

1. L' uſo prevalga, e ſi continui a dare il nome d'emisferi alle due parti del cervello, che qui ſi accennano, benchè niente ſi accoſti meno delle medeſime alla figura emisferica. Fanno queſti da ſe ſoli la più conſiderabile porzione di tutto il cerebro, e ſi raſſomigliano molto ai lobi de' bulbi dell' aglio, avendo ognuno tre faccie diviſe da tre margini angolari, e due eſtremità; una poſteriore ottuſa, gibboſa, e natiforme, l' altra acuta, che n' è l' anteriore.

Emisferi del cervello

2. La faccia più larga degli emisferi è la ſuperiore, eſterna, o laterale, conveſſa, grande poſteriormente, angolare al davanti: è diviſa in due porzioni diſuguali dalla linea obbliqua, che divide i due sfondi della volta del cranio in foſſe maggiori, e in foſſe ſuperiori di mezzo (*b*).

3. La ſeconda faccia è l' interna, per la quale gli emisferi ſi toccano, eſſendone ſoltanto diviſi in alto mediante la piega della *D. M.* dov'è contenuto il ſeno longitudinale (*c*). Queſta faccia nello ſtato naturale è piana, e ſe diventano conveſſe tutte due nei due emisferi ſcoſtandogli, ciò dipende dalla mollezza della loro ſoſtanza, la quale non eſſendo più ſoſtenuta, s' incurva.

4. La

(*a*) *Duo, quæ vocantur, hemiſphæria ovata, convexa, anterius in conum procurrunt, cujus finis eſt proceſſus mamillaris, nervus olfactorius verus.*

(*b*) Tr. I. Par. II. Cap. II. Art. I. §. 5., e 6.

(*c*) Tr. II. Cap. I. Art. II. §. 7.

4. La terza è rivolta al basso, larga all' indietro, angolare anteriormente, alquanto concava: verrà da noi qualche volta nominata *base degli emisferi* perchè tutto il corpo dei medesimi vi si appoggia.

5. Passando agli angoli, ossia ai margini, uno è superiore, che unito al corrispondente dell' altro emisfero sostiene il *S. L.* della *D. M.*, uno è esteriore più lungo di tutti, curvo, e risguarda la base delle parti laterali esterne del cranio, dividendo la faccia esterna dalla inferiore: il terzo, che limita in basso le faccie inferiore ed interna, corrisponde all' asse longitudinale di quella midolla, che negli uomini, e nei quadrupedi forma il corpo calloso.

6. Le faccie interne d' amendue gli emisferi sono incollate insieme in alto mediante la membrana aracnoidéa, e nel rimanente del solco verticale, che le divide, mediante un tessuto cellulare assai robusto notato da *Allero* (*a*), e i margini inferiori delle medesime faccie ne sono congiunti a segno, che pare dimostrata ad evidenza la reciproca comunicazione, o continuità della sostanza de' due emisferi, a chi meno attentamente esamina queste parti.

7. Tutta la superficie d' ambedue gli emisferi è intieramente sgombra di solchi, e d' anfrattuosità com' è stato notato da *Willis* (*b*), e da molti altri Notomisti.

8. Abbiamo già sufficiente notizia delle fosse olfattorie, e dei loro fori, e dell' imbuto, che vi fa la *D. M.*, come altresì delle cannuccie membranose, nelle quali sono ricevute le punte degli emisferi, ed i nervi olfattorj medesimi, onde non ci rimane eccetto da indicare quale sia l' apparenza dell' estremità anteriore degli emisferi, conica sì, ma non formante i veri nervi olfattorj, come *Allero* pretese, perciocchè questa terminando alquanto ottusa, viene per così dire inguainata da un risalto proprio della porzione de' nervi stessi, che gonfia, e si fa rotonda appena superata la punta coni-

---

(*a*) Ivi Cap. II. nel Testo, e al §. 48.

(*b*) Come sopra, e nelle opere Vol. I. pag. 68, vedi pure *Coiter* pag. 130, *Muralto* vade mecum pag. 475. *Collins* Tab. 56, fig. 49, pag. 1099. *Aldrovandi* Ornitologia T. I. pag. 799.

ca. Sono insieme conglutinati l' accennato risalto, e la punta, esteriormente dalla Pia-madre, e dalla membrana aracnoidéa, interiormente dalla Pia-madre sola, che però ne lascia ravvisare la separazione, poco diversamente da quello, che si osserva nella stessa parte del cervello de' serpi, e delle vipere.

9. Si trovano dunque i veri nervi olfattorj inferiormente alla punta degli emisferi senza essere corpi comuni con i medesimi, e si vedono assai più rotondi, e cilindrici quando viene con destrezza distrutto il bifido canale ossoso nel quale passano (*a*) per iscorrere poscia nel solco alla parte superiore delle orbite loro destinato.

CAPITOLO II.

Della sostanza corticale.

Testo Alleriano (*b*)

„ La corticale non ha particolarità, nè scorgesi più ros„ sa, che nei cervelli umani, avendone il colore pallido-in„ carnato. E' però affatto priva d' anfratti.

10. Io trovo la corticale più bianca della umana tanto nelle oche, quanto nelle anitre.

11. In risguardo agli anfratti abbiamo già accordato, che mancano (7), la faccia superiore di ciascun emisfero appena portando un solco superficiale diretto obbliquamente in avanti e in dentro, come quel risalto, che nel primo Trattato abbiamo descritto (*c*).

12. Distruggendone in qualunque guisa la sostanza è vano tentare di costruirne centro ovale midollare senza distruggere altresì i *ventricoli superiori*.

13. Tagliando verticalmente i grossi tubercoli cinerici, che nei ventricoli suddetti occupano il centro degli emisfe-

---

(*a*) Tratt. I. Par. II. Cap. II. Art. I. §. 3.

(*b*) *Cortex nihil habet peculiare, neque, quam homini, rubicundior est, pallide carneus, ut gyris tamen careat.*

(*c*) Parte II. Cap. II. Art. I. §. 5.

ri, vi si scuopre bensì alquanto di midolla nella sostanza cinericia, ma senza penetrare nei ventricoli non s' incontra vera midollare, salvo in fondo al solco dividente gli emisferi, cioè nel sito, ch' è nei cervelli umani occupato dal corpo calloso.

14. La sostanza esteriore n' è cinericia come la corticale del cervello, massime negli emisferi, ed il nostro Autore dice (*a*), che in questi animali la sostanza medesima è composta di numerosi globetti come su accennato da *Collins* (*b*), e da me stesso negli uomini trattando del cervelletto umano; finisce però con dire, che non ha mai veduto in molti uccelli corpicciuoli rotondi nella corticale dei loro cerebri (*c*).

15. *Leeuvenoechio* fin dall' anno 1684 lasciò scritto, la corticale del cerebro degli uccelli essere formata di vasi, e d' un umore vitreo, simile alla pinguedine, sostanza pellucida però, che appariva composta di minutissimi vasellini, ed *Emmanuele Swedenborgio* vide nella corticale dell' oca una rete di minutissimi vasellini come attestaci *Allero* (*d*); ma io con l' occhio semplice non ho mai saputo ravvisare in questa sostanza verun corpo globuloso ad onta delle macerazioni in liquori spiritosi, e d' altra natura, e del bollimento, tutto ivi mi parve sempre tomentoso e vasculare.

(*a*) *De Part. corpor. humani Fabrica &c.* Tom. VIII. pag. 39.

(*b*) Distaccando dalla corticale del cervelletto le falci più intime della interna lamina della pia-madre ho veduto distinti innumerabili corpicciuoli incassati gli uni fra gli altri appunto come le vescichette sugose della polpa de' limoni si osservano. Vedi *Encefalot.* Parte III. pag. 124.

(*c*) *In cortice avium rotundas glebulas nunquam numerosis in exemplis vidi*. Ivi pag. 41.

(*d*) Ivi pag. 44, 45.

CAPITOLO III.

Del corpo calloſo, e della volta a tre pilaſtri.

Il tutto da me compreſo ſotto il nome d' Arco midollare.

TESTO ALLERIANO (*a*).

„ Quando ſi tolgono allo 'ndietro gli emisferi ecco l' argentino della midollare della volta, che naſce dalla commeſſura anteriore, e principalmente dalla baſe di ciaſcun emisfero, più addentro, ed in ſu della ſteſſa commeſſura: ſale da amendue le parti allo 'ndietro nel ventricolo anteriore, ſi allarga, cuopre quel ventricolo, ed elevandoſi inſenſibilmente ſi riduce in fibre.

16. La ſtriſcia argentina, cui l' Autore noſtro diligentiſſimo dà il nome di *volta* (*ſplendor medullaris fornicis*), è il vero corpo calloſo degli uccelli, ed io ne ho già reſo perſuaſo il celebratiſſimo *Contemplatore della Natura Carlo Bonnet*, con il quale ho l' onore d' eſſere in commercio; e l' anno 1779 a' 25 di Maggio (*b*) io gli ſcriſſi che ſembravami i chiariſſimi *Allero*, e *Lorry* (*c*) avere oſſervato ſuperficialmente il cerebro degli uccelli, la ſtriſcia midollare, che il primo addita ſotto il nome di *volta* negli Opuſcoli ſuoi minori (*d*),

---

(*a*) *Quando vero poſterius hemiſphæria removiſti adparet ſplendor medullaris fornicis, qui ex commiſſura anteriori, & ab imo petiſſimum hemiſphærio ad interiora, & ſuperiora ejus commiſſuræ cerebri natus, retrorſum in ventriculum anteriorem utrinque adſcendit, expanditur, tegit eum ventriculum, & in fibras dum adſcendit, diſſolvitur.*

Nel cit. Vol. VIII. poi alla pag. 57 ripete le medeſime parole dopo d' aver detto *Nullus in avibus eſt. Vidi tamen in Anſere &c.*

(*b*) Vedi il Vol. XV. della preziosiſſima raccolta delle opere di codeſto Naturaliſta inimitabile, e profondiſſimo Filoſofo alla pag. 130, e ſegg; indi alla 205. dello ſteſſo volume, come altresì le ſue lettere, che vanno unite all' *Encefalotomia*.

(*c*) *Savans Etrangers* Tom. III. pag. 344. e ſegg.

(*d*) Tom. III. ſect. XXXVII. Art. 10. Nel cit, vol. VIII dice pure *Avibus nullum eſt* (corpus callosum) *piſcibuſque*; e cita *Willis* pag. 68; *Monroo compar. anat.* pag. 113. *Oper. min.* 214.

essendone il vero *corpo calloso* " chez les Animaux de cette
„ classe (soggiungeva io) tout le corps calleux se reduit á
„ une espece d' *Arc*, ou pour parler le langage de l' Anato-
„ míe, á une *Faulx* medullaire, dont les parties posterieu-
„ res imitent fort bien la *Tente du cervelet* de la Dure-me-
„ re du cerveau de l' Homme."

17. Non ha però veruna rassomiglianza con la *volta* a tre pilastri così elegante e distinta nei quadrupedi, nei quali (come viene da noi dimostrato altrove) dee la sua elevazione, ed eleganza alla disposizione dei talami de' *N.* ottici, e a due matasse di sostanza cinericia, simmetriche, poste sotto l' arco diretano della volta medesima, matasse che mancano intieramente si negli uomini, che negli uccelli, ma forma un risalto angolare longitudinalmente curvo a foggia d' arco in faccia all' apertura superiore del terzo ventricolo. Intanto la faccia superiore della midolla, onde risulta questo risalto acutissimo in basso cioè il fondo del solco dividente gli emisferi, ne è incavato.

18. La sostanza midollare unita alle pareti del solco, ed intrecciata nel fondo del solco, che divide gli emisferi, è ripiegata al dinanzi sotto di se medesima, nell' uomo, dal margine posteriore, che fa sulla grossa vena di *Galeno* lo *spiraglio* (*a*), e vi rende apparenti in esso, ma assai più nei quadrupedi il corpo calloso, e la volta, la quale è realmente una continuazione della sostanza ripiegata di quel corpo: ma nei volatili tutto il corpo calloso, e la volta in basso riduconsi alla suddetta specie d' arco longitudinale, del quale abbiamo già detto (16), che le parti posteriori midollari imitano la tenda del cervelletto delle *D. M.* umane, e non hanno aderenza alle parti soggette se non per lo tessuto cellulare.

19. L' unico vero commercio tra la sostanza degli emisferi, ed il corpo calloso ha luogo nella parte anteriore di

(*a*) Nella *Encefalot.* parte I. §. 50, e 238. Parte II. §. 25. si dichiara lo *Spiraglio* indicare, che la porzione superiore principale del cervello non ha veruna aderenza con la colonna midollare centrale eccetto alla parte anteriore, quasi alla base del cervello stesso.

quei due *corpi*, ai quali daremmo pur anco noi l' epiteto di *ſtriati* per non generare confuſione con nomi novelli, ſe gli trovaſſimo compoſti di due ſoſtanze, e ſituati nei ventricoli laterali, e non affatto fuori dei medeſimi come gli vediamo negli uccelli diviſi per dar luogo ad una feſſura finiſſima, ch' è il *terzo ventricolo* (43). Tutto il rimanente degli emisferi, che contiene i *ventricoli laterali*, i *tubercoli Alleriani*, e i *pleſſi corioidei*, facendo la maſſa principale del cerebro, non vi è aderente nè a tergo, nè ai lati ma ſoltanto al davanti.

Punte del corpo calloſo.

20. L' eſtremità anteriore del corpo calloſo ha due punte, le quali ſi ripiegano obbliquamente in fuori ed in baſſo per immergerſi nella ſoſtanza degli emisferi, la punta deſtra nel deſtro, la ſiniſtra nel ſiniſtro tubercolo.

Appendici del corpo calloſo.

21. La poſteriore ſi allarga, e s' inalza ſu tutt' e due gli emisferi ſempre bianca, e forma un' eſpanſione midollare a foggia di tela depreſſa nel mezzo, la quale tela ha quattro larghe appendici a foggia d' *ale* diſteſe due per lato,

22. Le *ale ſuperiori* ſi allargano obbliquamente elevandoſi, e mentre che ſi avvicinano al centro della faccia poſteriore gibboſa dei *tubercoli Alleriani*, formano due ſeni, la concavità dei quali è rivolta al davanti.

23. Le *ale inferiori* ſono alquanto più larghe, ed argentine, prendono aderenza con la *commeſſura poſteriore*, e con i margini vicini dei *lobi* (dalla diviſione naturale delle faccie interne dei quali riſulta il *terzo ventricolo*) mediante un teſſuto cellulare deboliſſimo.

24. Per meglio diſcernere tutta l' eleganza della fabbrica del corpo calloſo, e delle appendici del medeſimo negli uccelli (la qual coſa è più facile negli alocchi, nelle oche, nelle anitre, nelle grù, nei nibbi e ſimili altri groſſi animali) biſogna ſcoſtare gli emisferi dal *cervelletto*, uno dopo l' altro ſollevandone, e traendone innanzi la porzione gibboſa de' *tubercoli Alleriani*, e così toſto ſi vedrà la midollare, onde queſti ſono aſcoſi aprirſi, lacerarſi in qualche luogo dopo ſofferta una mediocre diſtenſione.

25. Al favore di tale apertura s' introduca la punta d' una penna (preparata per queſt' uſo a foggia di ſteccadenti) nella capacità del ventricolo più vicino all' apertura medeſima, e ſtriſciandone il tagliente in alto, ſe ne ſcinde il parete po-

ſteriore, che circonflettendoſi ſui lati ſi ſtende molto in baſſo, ed all' innanzi.

26. Diſcoperto in ſimil foggia il *tubercolo*, onde ſono riempiti i ventricoli laterali, ſe queſto ſi ſcoſta dal parete centrale, ſe ſi ſolleva verſo i lati del cranio, ed in avanti, laſciando in ſito l' arco midollare del pari, che le ale del medeſimo, vedeſi da queſte, e da quello (in guiſa che non ſi potrebbe meglio altrimenti) rappreſentata la falce, e la tenda delle *D. M.* umane in ſito.

27. Col metodo ſuddetto ſi diſcuoprono agevolmente in amendue i ventricoli 1. l' *appendice*, che ſi ſpicca lateralmente dai *tubercoli Alleriani*, la quale ſi ripiega in avanti, e in dentro verſo l' arco: 2. l' inſerzione delle punte anteriori di queſto negli emisferi: 3. le ale già deſcritte.

CAPITOLO IV.

Dei ventricoli laterali, e dei corpi in eſſi contenuti.

TESTO ALLERIANO (*a*)

„ Diſtrutta, o ſollevata la volta ſi ſcorge da tutti e due i
„ làti il ventricolo anteriore, che occupa la parte poſteriore di
„ ciaſcun emisfero, ed affatto ſemplice ſi ſtende indietro, ed
„ in giù: i parieti di queſta cavità ſono cinerici in ogni par-
„ te, ſalvo alla volta.

(*a*) *Fornice remoto adparet utrinque ventriculus anterior, qui poſteriorem partem cujuſque hemiſphærii occupat, & retrorſum deſcendit: totus ſimplex; corticea natura, præter fornicem, comprehenditur.*

Allero gli accenna pure al §. XIX, pag. 64. del cit. vol. VIII, e nella nota dice *Negabat Harvejus* (De circulat. ſang. pag. 159) *ſed habet Perrault* (eſſais de Phyſiq. Tom. 2. pag. 162. Tab. 9. fig. I.) *in & ſtruthione Pariſini; inque ipſo anſere de quo negat Harvejus, certo vidi. In Aquila deſcribit Borrichius* (Hermet. ſapien. pag. 266) *Adgnovit Williſius* (loc. cit. pag. 69) *& Willhougby* (ornitol. pag. 5) *& Malpighius* (op. poſthum. pag. 82). Alla pag. 65 poi ſoggiunge *Ea cavea aliter paulum in avibus ſe habet, potius poſterior.* E nella nota *Cerebri ventriculi in avibus* (*neque enim hic caveam thalamorum deſcribimus*) *quando hemiſphæria ſenſim diducuntur, ſtriata, radiata, ex fornice retrorſum adſcendente, medulla remota adparent, unico cum tubere corticali, ſtriati corporis ſimili.*

ARTICOLO I.

I ventricoli laterali.

28. Tutto che *Allero* gli nomini *anteriori*, io non posso astenermi dal dirgli *laterali* perchè non principiano gran fatto anteriormente al *terzo ventricolo*, e si stendono molto più addietro, come nei paragrafi antecedenti è già in gran parte dimostrato, dai quali agevolmente si ricava, che questi sono le più grandi, e le più estese cavità del cerebro degli uccelli (*a*), occupanti la parte interna più vicina alla divisione degli emisferi, e la posteriore inferiore della estremità natiforme d' amendue gli emisferi medesimi, tappezzate di poca e tenerissima sostanza corticale o cinericia.

29. La loro estremità anteriore è quasi appuntata nel terzo anteriore della lunghezza degli emisferi, appena alquanto più in avanti del sito, dove si pianta più abbasso la punta bifida anteriore del corpo calloso considerata dall' esattissimo nostro Autore come il pilastro anteriore della volta. La posteriore verrà meglio conceputa quando si rifletterà alle cose, che nei seguenti articoli si troveranno esposte.

ARTICOLO II.

I Tubercoli Alleriani.

TESTO ALLERIANO (*b*)

„ ..... Si vedono (i ventricoli laterali) contenere un so-
„ lo tubercolo corticale simile al corpo striato.

„ Tolta

(*a*) Nelle teste cotte dette dei galli d' india, delle galline, dei fagiani, delle oche, delle anitre, dei nibbi e simili rendendosi più soda e meno tenace la sostanza del cerebro, è assai più facile osservare l' estensione di queste cavità, e tutte le parti dell' arco, scostando solamente con le dita con destrezza i due emisferi finchè sono aperti i ventricoli, e poi separandone (col premergli verso le tempie) i tubercoli *Alleriani*.

(*b*) Vedi la nota al testo dell' articolo precedente ed il cit. vol. VIII.

„ Tolta via quella membrana, ſiegue un tubercolo midol-
„ lare non totalmente prolunganteſi in avanti, ma aſſai più
„ allo indietro, e l' ultima parte inferiore del ventricolo è
„ appoggiata ſu queſti corpi, i quali tengono qui le veci de-
„ gli ſtriati, formando realmente la vera gamba anteriore
„ del cervello.

30. Le ſuddette cavità, o ventricoli ſi allargano ſenſibilmente all' indietro di modo che occupano quaſi tutta la parte più gibboſa degli emisferi ſenza avere notabile profondità, poichè il nocciolo degli emisferi è fatto da quel groſſo tubercolo già ſtato notato da noi, come abbiamo veduto nel teſto. Queſti tubercoli empiono le cavità dei ventricoli laterali, che ſi prolungano con il voto loro molto al di ſotto del margine interno dei tubercoli ſteſſi.

31. Queſto margine ha poſteriormente un' appendice quaſi cuneiforme, alquanto uncinata, oſſia incurvata dal di dietro in avanti verſo il centro dell' encefalo, dov' è libera.

32. Ma perchè più agevolmente ſi conoſca la figura ed il volume de' *tubercoli Alleriani*, e l' eſtenſione fin ora ignorata dei ventricoli laterali, ſi ſollevi con il manico dello ſcalpello o con lo ſtecco per ogni verſo la tenue ſoſtanza del parete eſteriore d' un ventricolo, mentre che con l' indice dell' altra mano applicato ſul tubercolo, che vi ſtava rinchiuſo, ſi va queſto ſcoſtando ora dall' arco midollare, ora dalle ale, traendolo in avanti.

---

alla nota della pag. 65. dove leggeſi *Adparent* (*cerebri ventriculi*) *unico cum tubere corticali, ſtriati corporis ſimili. Ea membrana remota ſequitur medullaris colliculus non penitus in anteriorem partem productus, in inferiorem magis, & ultima pars inferior ventriculi iis corporibus incumbit, quæ ſunt pro ſtriatis, verum nempe crus anterius cerebri* (oper. min. III pag. 192.)

Nelle ſteſſe opere minori *Allero* aveva già ſcritto: *Magis diductis parietibus adparent duo tubercula interiora, anteriora, cinerea, cortice multis vaſis rubris percurſo, intus medullam habentia, nulla certe forma conſpicua, ut ſtriatorum corporum locum teneant, cæterum ſtriata non ſint; poſterius magis corticea, anterius magis medullaria ſint, & ponantur ante nervos opticos, & ab iis decuſſentur.*

Finalmente nel cit. vol. VIII. leggiamo alla pag. 81. *Non ita aves* (*corpora ſtriata nacta ſunt*) *etſi enim in ventriculo laterali utroque ſimilis eorum columna eminet, tota tamen cinerea eſt, ut accurate rimando obſervavi. Medius ventriculus duos colles accumbentes habet, ſtriatorum ſimiles, ſed minime duplici colore varios, in quos tota cerebri medulla terminatur.*

33. Così oltre all' aumento di capacità, che dalla appendice dei tubercoli ne viene alla circonflessione de' ventricoli stessi, vedrannosi pur anco li tubercoli medesimi distaccati naturalmente da tutta la capacità posteriore di quelli, e si comprenderà, che il vero punto d' unione tra gli emisferi, e ciascun tubercolo incomincia proprio là, dove le punte anteriori dell' arco, o corpo calloso si cacciano nella sostanza della faccia interna, ossia nei lati del fondo anteriore del solco dividente gli emisferi per trascorrere a formare alla base del cervello le due papille midollari. Da quel sito in avanti non fanno più che un solo corpo, una continuazione di sostanza con il resto degli emisferi.

34. Benchè la base dei tubercoli ne sia più pallida, che tutto il resto della massa loro, non vi si ravvisa però abbondantemente raccolta la midollare, eccetto quella poca, che loro viene dalla punta bifida del corpo calloso, perciocchè le ale, massime le inferiori, che sono intieramente argentine, s' immergono con i lembi loro piegati in avanti sotto l' appendice dei tubercoli, e dalla sostanza propria degli emisferi nella quale penetrano, si allungano in basso senza contrarre nessuna aderenza con i tubercoli stessi.

35. Arrivate vicino al centro compongono due cordoni midollari, i quali passano al di sotto dei *corpi cinerici* detti lobi da noi (§. 19), aggiacenti al *terzo ventricolo*, pure sottoposti alla base degli emisferi, e dirigendo il corso loro verso il ponte del *Varolio*, formano la porzione principale delle gambe del cervello.

36. Nella parte anteriore inferior interna degli emisferi si trovano pure molti fili midollari, i quali, uniti con le strie provegnenti dalla punta bifida anteriore dell' arco, formano un corpo bianco di notabile volume.

Articolo III.

Il Tramezzo dei ventricoli laterali.

37. Per dimostrare chiaramente questo tramezzo si spacchi sul davanti la parete superiore d' un ventricolo nella sommità del solco longitudinale con lo stecco di penna, o con

il nevrotomo; indi si allontani dal solco un tubercolo trattenendo in sito la parete del solco medesimo, e recidendo quello alla sua base in traverso dal centro al lato del cranio: consecutivamente si apra l' altro come sopra, si scosti, e si porti via l' altro tubercolo, e vedrassi il tramezzo risultare dalla unione di tali parieti in fondo al solco longitudinale insieme concorrenti, qui divenuti più bianchi, massime all' indietro, e costruenti il corpo calloso, ossia l' arco midollare, del quale abbiamo già tante volte fatto menzione (cap. III).

ARTICOLO IV.

De' Plessi corioidei.

TESTO ALLERIANO (a)

„ In quello (ventricolo) penetra il plesso corioideo che
„ vi si distende a foggia d' una membrana irrigata per ogni
„ dove da numerosissimi vasellini.

„ Quel plesso è accompagnato da una grossa vena.

38. Ho sempre trovata divisa in quattro parti la tenera membranuccia, che fa il plesso corioidéo dei ventricoli laterali dell' oca, della grù, dell' alocco e degli altri uccelli maggiori, cioè due parti superiori una per lato, e due inferiori.

39. Le superiori formano una specie di *fiocco* assai largo appeso ad un tenue cordoncino vasculare: occupa una picciola porzione della cavità superiore dei ventricoli, appoggiandosi sulla parte più elevata dei tubercoli *Alleriani*, che gli riempiono: questo fiocco, cioè la porzione del plesso più estesa, vasculare e libera, si trova al davanti, ed il cordoncino, dal quale pende, posteriormente.

(a) *In eum* (ventriculum) *plexus chorioideus subit, & in eundem membranæ vasculis plenissimæ specie se diffundit*

Eum plexum magna vena comitatur.

Alla pag. 79. poi del vol. VIII. ha ciò, che siegue: *In avibus elegantes omnino per ventriculos laterales, maxime posterius, plexus expanduntur, & inter colles striatis corporibus similes, cavosque thalamos eminent*.

40. Le inferiori ſono a guiſa di larghe *frangie* appeſe pure ad un cordoncino vaſculari, e ſi eſtendono ſotto i tubercoli ſuddetti, avendo pure l' eſtremità libera al davanti, ed i picciuoli verſo la parte diretana dell' arco midollare.

41. I quattro cordoncini ſono tutti convergenti verſo il cervelletto, dove unitiſi in un tronco ſolo, queſto paſſa dietro della *commeſſura poſteriore del terzo ventricolo* ora dirimpetto alla *glandula pineale*, ora tra queſta e la faccia anteriore del *cervelletto*, e ſale a metter foce nella biſorcazione poſteriore del *S.* longitudinale della *D. M.* (*a*).

ARTICOLO V.

Altro Pleſſo vaſculare.

TESTO ALLERIANO (*b*)

„ Poſteriormente alla volta il pleſſo medeſimo ſi fa ſtrada:
„ fra quella, e la vicina parte del cervello.

42. Il tronco dependente dall' anaſtomoſi dei quattro cordoncini vaſculari del pleſſo deſcritto, paſſando poſteriormente all' arco (18) per lo ſpiraglio, rade la faccia anteriore del cervelletto, e giunto al ſito dove comunicano col ſeno longitudinale i ſeni obbliqui dependenti dalle vene, che derivano dalle eſtremità gibboſe degli emisferi, e dalla faccia anteriore del cervelletto, riceve le vene principali d' un altro pleſſo corioideo conſiderabile, dal quale ſuol eſſere avvolta naſcoſta la glandula pineale, probabilmente quello, che *Allero* nel teſto pur ora citato ha voluto indicare.

(*a*) Ved. Tratt. preced. §. 26.

(*b*) *Poſterius quam fornix idem plexus inter eum, & accumbens cerebrum prodit.*

CAPITOLO V.

Del terzo ventricolo.

TESTO ALLERIANO (a)

„ Il ventricolo di mezzo ha su i lati due tubercoli simili
„ ai corpi striati, ma privi del doppio colore, che gli fa
„ nominare così, e nei medesimi viene a terminare tutta la
„ sostanza midollare del cervello.

„ Fra quei tubercoli v' ha il *terzo ventricolo* come nell'
„ uomo, e si continua pure anche nell' acquidotto.

ARTICOLO I.

De' Lobi.

43. Conosciuta la struttura del corpo calloso, e delle sue appendici, l'estensione dei ventricoli laterali, e i tubercoli che occupano quasi tutta la loro capacità, si distruggano queste due eminenze con un taglio orizzontale per lato, che ne porti via tutta la sostanza dal termine anteriore del corpo calloso al cervelletto e dai lati del corpo medesimo alle tempie: si separi destramente (al che non incontrasi ostacolo) dalla faccia anteriore del cervelletto medesimo, dalla *commessura posteriore del terzo ventricolo*, e dalla faccia superiore dei *talami de' nervi ottici* tutto l' appartenente alle ale del corpo calloso, ossia alle pareti esterne dei ventricoli laterali, e si rovesci al davanti finchè ne resti puranco scoperta la *commessura anteriore* dello stesso *ventricolo*, e si vedranno due *lobi* di sostanza cinericia (19) situati al di sotto degli emisferi, affatto fuori dei ventricoli laterali, perchè sottoposti alle ale inferiori del corpo calloso, che si stendono innanzi, anche oltre all' angolo anteriore di questi *lobi* stessi. Lobi.

V iij

(b) *Medius ventriculus duos colles accumbentes habet, striatorum similes &c.* come nella nota.

44. Sono essi due corpi cinerici, foschi, tondeggianti al lato più distante dal centro dell' encefalo, gibbosi, ineguali e midollari in basso, piani in alto, situati sotto gli emisferi in guisa, che il destro è diviso dal sinistro soltanto per una stretta fessura assai meno lunga dell' estensione dell' arco midollare, ossia corpo calloso, che la ricuopre, la quale fessura limitata visibilmente dalle due *commessure* già più volte citate, è l' indizio superiore del vero *III. ventricolo*.

Apertura superiore del III. ventricolo.

45. La porzione anteriore dei lobi è bianca, e si confonde con la base pur midollare degli emisferi, sicchè queste sostanze discendono unite a perdersi nelle *gambe del cervello*, ch' io non oso nominare *colonna midollare centrale*, come ho fatto nell' *Encefalotomia umana*, perchè nell' uomo è verticale mentre che negli uccelli ha una direzione quasi orizzontale verso l' occipite.

46. *Allero* volendo accordare anche alle anitre i corpi striati disse, che *sono cinerici, alquanto distinti dalle gambe del cervello, le quali stanno loro dietro*. Nel paragone poi, che fa del cerebro degli uccelli con quello degli uomini disse, che *sono simili eziandio per li corpi striati*; ed accennandone le differenze, al N. 4. disse: *Il terzo ventricolo ne è diverso perchè negli uccelli si trova fra i corpi striati, i talami dei N. ottici essendo fuori del cervello*. Dunque diede il nome improprio di *corpi striati* a questi, che noi appelliamo *lobi*, giacchè nei medesimi non avvi stria di sorte veruna, come dallo stesso *Allero* fu ingenuamente confessato.

47. Non dobbiamo dunque interpretare, che il *III. ventricolo* sia fra i tubercoli *Alleriani* (§. 30., e segg.) come sembra il nostro Autore avere talvolta indicato, ma dobbiamo cercarlo fra i lobi (44. e segg.) distintissimi da tutte le altre parti del cervello per li caratteri, che abbiamo espressi.

ARTICOLO II.

Le cose notabili nel ventricolo III.

48. I margini paralleli dei lobi, che sono i labbri del III. ventricolo, tengonsi avvicinati mediante due cordoni mi-

dollari poſti in traverſo, nominati *commeſſure*, una anteriore, ed una poſteriore.

49. Soffiando con impeto dentro quella feſſura ſi rende manifeſta la capacità del III. ventricolo, in fondo al quale anteriormente ſotto la commeſſura anteriore ſi vede una mediocre lacuna indicante il ſito, che corriſponde all' *imbuto* diſcendente verſo la *glandula pituitaria*; queſta lacuna diceſi *apertura anteriore* del III. ventricolo.

Apertura anteriore del III. ventricolo.

50. Dirigaſi pure con forza il fiato per la ſuddetta feſſura poſteriormente, e ſi ſcuoprirà la comunicazione di queſto ventricolo con l' *acquidotto*, che guida al *quarto ventricolo* mediante l' *apertura poſteriore* coperta dalla commeſſura pur anco poſteriore.

Apertura poſteriore del III. ventricolo.

51. Queſt' apertura è ſituata aſſai meno profondamente dell' anteriore, perchè l' *acquidotto* è ſcolpito ſuperficialmente ſulla faccia ſuperiore diretana della midolla allungata.

52. I parieti laterali del terzo ventricolo ſono fatti dai lobi (44. e ſegg.). Il colore di queſti è cinericio, e ſono tappezzati di lanuginoſa molle ſoſtanza.

ARTICOLO III.

Le commeſſure.

53. Il cordoncino midollare, che fa la commeſſura anteriore, penetra in traverſo per la parte anteriore dei lobi; giunta alla metà dell' eſtenſione traverſo dei quali ſi curva, ſi piega in baſſo ed innanzi per inneſtarſi nel più eſterno dei faſcetti argentini, dei quali daremo notizia quando tratteremo dei *Nervi olfattorj* nel IV. Trattato.

Commeſſura anteriore.

54. Tale corſo della commeſſura anteriore ſi ſcorge diſtintamente in mezzo alla ſoſtanza dei lobi per la grande bianchezza di quella che ſpicca nel cinericio di queſti; ma conviene raſchiarne dolcemente la ſuperficie, e tener dietro alla curvità di quel candido cordone.

55. Parmi, che *Allero* abbia voluto mentovare queſta

commessura quando disse (*a*): *Nel mezzo del sito occupato dalle gambe del cervello, sui talami, queste gambe vengono congiunte mediante un cordoncino simile ad un nervo, molto lungo, diretto in traverso, e midollare*. Ma questa benchè trafori i lobi, non tocca però le gambe del cervello, nè ha veruna relazione con i talami, che vi stanno assai più addietro, e lontani.

56. E che favelli di questa, non già della posteriore viene dimostrato dalle parole seguenti „ v' è finalmente un' al- „ tra commessura più allo 'ndietro, e al di sotto della me- „ desima la comunicazione del terzo con il quarto ventri- „ colo (*b*).

Commessura posteriore.

57. La commessura posteriore si trova nelle oche due linee circa più indietro della anteriore, ed è una lastra midollare piatta e spessa, larga più d' una linea dall' angolo posteriore del terzo ventricolo alla vicina faccia del cervelletto; la sua estensione traversale arriva a lin. 2 + 1 : 2. Serve di volta al principio dell' *acquidotto*.

58. E' composta d' alcuni strati (*c*) di molte fila assai distinte, traversali, parallele, alcune delle quali s' immergono nella fosca sostanza dei lobi (*d*), altre nella midolla delle gambe del cervello: il maggior numero però delle posteriori s' immerge nella parte vicina dei *talami de' N. ottici*.

CAPITOLO

(*a*) *In media vero crurum cerebri sede, supra thalamos, uniuntur hæc crura funiculo nervo simili, transverso, medullari*.

(*b*) *Alia denique posterior commissura est, sub qua ventriculus tertius in quartum continuatur*.

E nel volume VIII. pag. III. trattando della commessura posteriore dice *Habent aves*.

(*c*) Negli uomini è fatta a lastre midollari successivamente più corte e più basse indietro ved. encefalot. univ. parte II. cap.

(*d*) Nei galli, e nei fagiani la commessura posterior è visibilmente laminosa in vece, che nei frosoni forma un travicello quadrato verso il cervelletto, e nei primi sotto la commessura stessa al davanti non avvi subito l' acquidotto, ma una lisca di mediocre spessezza, midollare, ed immersa nella parte diretana dei lobi.

CAPITOLO VI.

ARTICOLO I.

Dell' acquidotto.

60. Soffiando leggiermente per lo terzo ventricolo nella posteriore apertura, si vede l'acquidotto, che negli uccelli è un canale di considerabile lunghezza, molto largo al suo principio, e poco alto mercè che il margine diretano del terzo ventricolo tocca quasi la lastra midollare, che ne fa quivi la commessura. Si va però allargando per ogni verso a misura che si accosta ai *peduncoli* del cervelletto per dare principio all' *aja* del quarto ventricolo.

61. Non oltrepassata ancora l' estensione longitudinale della commessura (57. 58.) sboccano nell' acquidotto due canaletti di notabile calibro, i quali vengono dai sacchi fatti negli uccelli (come nelle vipere, nei serpi, e nei ramarri) dai *talami de' N. ottici*, i quali *Allero* dice (*a*) " essere congiunti insieme per mezzo d' una lamina midollare traver- Imboccature dei ventricoli de' talami.
" sale sottile distesa sulla faccia diretana delle gambe del cer-
" vello contro la faccia anteriore del cervelletto, dimodo
" che cuopre il quarto ventricolo.

ARTICOLO II.

Il velo midollare.

62. Per conoscere la struttura di questa lamina, che forma la volta dell' acquidotto distrutta la loggia ossosa del cervelletto (*b*), rimossi i tubercoli *Alleriani* de' ventricoli laterali, e le ale del corpo calloso di maniera, che sia scoper-

(*a*) *Uniuntur inter se lamina medullari transversa, tenui, posterius, & superius cruribus cerebri imposita, adplicata etiam posteriori cerebello ut ventriculum quartum tegat.*

(*b*) A questo proposito vedi il mio *Tratt. delle osservazioni in Chirurgia* Parte II. pag. 67, e seg.

to il terzo ventricolo (43), e la commeſſura poſteriore, ſi deprima indietro il *cervelletto*, e ſi ſcoſtino i fili inferiori della ſuddetta commeſſura; intanto ſpingaſi dolcemente il fiato nella parte poſteriore del terzo ventricolo verſo l' acquidotto, e toſto vedraſſi ſollevato un velo bianco (*a*) tenuiſſimo, traſparente, e molto arrendevole, ſicchè ceſſando di ſpingervi il fiato, più non ſarà viſibile.

63. A miſura che l' accennato velo ſi eſamina più in baſſo diſcoſtandone ſempre più il cervelletto, ſi trova dotato di maggiore denſità, e robuſtezza per lo corſo ſuperiore d' una linea; e i lati di tale addenſamento, le fibre del quale ſcorrono viſibilmente in traverſo, ſono una continuazione di ſoſtanza con quella delle vicine parti dei talami.

64. Sembra, che queſta laſtra midollare traverſa (dai lati inferiori, o per meglio dire poſteriori della quale naſcono per varj filuzzi diſtinti i nervi *patetici*) finiſca mediante un lembo inferiormente libero contro la faccia anteriore del *cervelletto*: infatti più baſſo del ſegmento, contro cui queſto lembo s' appoggia, prima che ſi arrivi alla parete poſteriore vicina del *quarto ventricolo*, ſi contano ancora in alcuni uccelli tre, quattro, e fino a cinque ſegmenti cinerici, l' ultimo, oſſia il più baſſo dei quali al davanti può vederſi di baſſo in alto ſu per la cavità del ventricolo ſuddetto tra i *peduncoli* del cervelletto, dov' egli ſi caccia a guiſa di capezzolo. Baſta a tal fine, che ſi deprima il cervelletto in avanti, e ſe ne ſcoſti la midolla allungata.

65. Eppure non è così. Dall' orlo poſteriore (*b*) della deſcritta lamina ſi allunga lo ſteſſo velo midollare, però molto aſſottigliato, cioè maggiormente d' ogni più pellucida lamina di talco, e d' ogni più traſparente pellicola dei lobetti dell' aglio; ed appunto per queſta ſua ſomma pellucidità non ſi vede punto cangiato il colore xarampelino del capezzolo ſuddetto, che pure n' è veſtito.

(*a*) Nella Parte III. della *Encefalotomia univerſ.* come nella *nuova eſpoſ. della ſtruttura del cervelletto umano* è ſtato dimoſtrato, che *Wieuſſens* avea preſo male a propoſito queſto velo per una valvula deſtinata a frenare il corſo de' fluidi dal IV. ventricolo per l' acquidotto nel III. ved. pag. 103 §. 119.

(*b*) Tratt. delle Oſſ. in chirurgia pag. 68.

66. Si rende visibile questo velo tenerissimo allor quando si ha recisa in traverso tutta la sostanza del cervelletto, che supera in altezza il livello della faccia superiore dei talami, potendosi con tale metodo meglio sollevare gli ultimi segmenti anteriori del cervelletto per favorire il sollevamento del velo, e per farlo gonfiare a foggia di bollicina spignendovi nuovamente con discretezza il fiato per l' acquidotto all' ingiù, o per lo quarto ventricolo all' in su.

67. Nelle oche, e negli alocchi vecchi suole trovarsi denso, bianco, ed assai meno trasparente che in molti altri volatili; per la qual cosa nasconde affatto l' ultimo segmento del cervelletto, e si vede a continuarsi distintamente con la sostanza midollare, che occupa l' interno del cervelletto, sostanza disposta a guisa di semicono voto con la base rivolta verso lo sfondo romboidéo.

68. Per vederne poscia ancora più distinta la continuazione con la mentovata sostanza midollare interiore del cervelletto, si tagli questo verticalmente quanto è alto di maniera, che si riduca in due porzioni, una destra, e l' altra sinistra; queste si scostino l' una dall' altra, e tosto si vedrà la midollare della faccia anteriore del semicono (*a*) a sollevare il velo, con il quale è continua, e questo a lacerarsi quando si continui a discostare le due parti nell' accennata guisa tagliate.

ARTICOLO III.

Le Eminenze quadrigemelle.

69. *Allero* sempre trattando di questo velo soggiunge: *Tale eminenza, che però non ha elevazione di figura determinata, è per altro simile alla quadrigemella di* Winslow (*b*),

(*a*) Vedrassi pur anco la cavità conica da nissun notomista osservata, o descritta, che trovasi nel corpo stesso del cervelletto e che verrà da noi ampiamente descritta nel seguente Trattato.

(*b*) Op. Minor. Vol. III. pag. 93. *Ea eminentia in nullas eminentias figurata quadrigeminæ* Winslowi *cætera similis est.*

ed altrove: *Negli uccelli sta sull' acquidotto una eminenza somigliante* (alla quadrigemella) *ma priva delle elevazioncelle rotonde* (*a*). A questo proposito io debbo ripetere, che siccome altre parti essenziali occupano nell' encefalo delle oche, delle anitre, e degli altri volatili un sito differentissimo da quello, nel quale si sogliono trovare nell' umano, e in quello dei quadrupedi, dei pesci, e de' rettili; così non dee recare maraviglia se anche l' eminenza quadrigemella di *Winslow* (le quattro elevazioni della quale furono dagli Anatomici conosciute sotto il nome di natiche e di testicoli) non serva di volta o di parete superiore all' acquidotto, ma si debba cercare nella parte inferiore interna di questo canale vestita della morbidissima lanugine, che tutto lo tappezza, e coperta della menzionata lastra midollare, o velo descritto. In fatti distrutta la commessura posteriore, ed il velo, non v' è uccello, nel cerebro del quale non si veggano due picciole eminenze per lato affisse al parete inferiore interno dell' acquidotto. Le due superiori o anteriori (equivalenti alle natiche dei cerebri umani) sono più tonde, e più elevate delle inferiori (equivalenti ai testicoli) o posteriori alquanto bislunghe.

70. Le destre sono divise dalle sinistre mediante il solco stendentesi dal terzo ventricolo giù per l' acquidotto fino alla punta inferiore del IV ventricolo, o della penna da scrivere.

71. Non solo nei volatili grossi, ma eziandio nei piccioli è cosa agevole discernerle nell' accennato luogo, dove più e più volte le ho fatte osservare nei tordi, nei frosoni, nei passeri di salcio, e di muro, nei cardellini, nei canarini, nelle ballerine, e fin nei reattini.

72. Siccome *Allero* dice, che (*b*) *dalla eminenza quadrigemella nasce una striscia traversa, e da quella il quarto paro de' nervi*; così vedremo nel Trattato dei Nervi cerebrali

---

(*a*) Vol. VIII. §. XXXII. pag. 106. *In Avibus eminentia similis aquæductui imponitur, sed absque rotindis colliculis.*

Nella nota. Confer Gallopavonem Collins Tab. 57. fig. 3.

(*b*) *Ab eminentia quadrigemina transversa stria nascitur, & ab ea nervus quartus*. Op. Minor. l. cit.

degli uccelli se il IV paro dei nervi nasca solamente dalla lisca midollare, della quale *Allero* favella, o se qualche radice se ne spicchi pure dal parete anteriore interno dell' acquidotto.

CAPITOLO VII.

Delle papille midollari, ossia eminenze mammillari.

Testo Alleriano (a).

„ Anteriormente alla commessura anteriore si trovano le
„ vere eminenze mammillari come negli uomini.

73. Nei cervelli umani (*b*) quest' eminenze sono situate dietro della commessura anteriore, davanti all' antro dei nervi motori comuni degli occhi, una per lato, immediatamente alla base del cerebro tra l' unione quadrata dei nervi ottici, e l' antro. In quella parte dell' *Encefalotomia universale*, che tratta dei quadrupedi, si dimostra, che occupano lo stesso luogo nella maggior parte di quegli animali, con questa differenza però, che nel cavallo, nell' asino, nel mulo, nella lepre, e nel coniglio queste due eminenze sogliono essere così strettamente unite insieme per un tessuto cellulare assai robusto, per la pia madre, e per la membrana aracnoidéa, che vi formano un solo capezzolo. Due distinte, e assai più apparenti per lo candore loro si veggono alla base del cerebro dei rettili come sono i serpi, le vipere, i ramarri, e collocate posteriormente alla commessura.

74. Negli uccelli le ho sempre trovate al davanti della medesima come insegna il nostro Autore; debbo però avvisare, che in questo sito vi ha un altro paro d' eminenze, ch' io nominerò francamente *apofisi midollari dei nervi ottici* perchè si ergono proprio dal centro della divisione dei

Apofisi midollari dei N. ottici.

(*a*) *Ante eam commissuram ut in homine, veræ sunt eminentiæ mamillares.*
(*b*) Encefalot. Univer. Parte II.

nervi ottici davanti all' aja della loro unione: sono sode, e affatto continue con la sostanza del nervo.

75. Anzi la stessa fossa, dalla quale escono questi nervi, unica nella cavità del cranio, doppia verso le occhiaje, (*a*) perchè divisa mediante il tramezzo delle medesime, riceve anche le appendici, che sono pure in quel luogo insieme unite per le faccie, onde si corrispondono.

76. Le due papille poi, che corrispondono a quelle degli uomini e dei quadrupedi, si rendono apparenti sollevando la faccia inferiore dei *tubercoli Alleriani* (cap. IV. art. II), e scostandola dall' unione dei *N.* ottici, che negli uccelli, come vedremo a suo luogo, non è quadrata. Sono pallide nelle oche, e negli altri uccelli grossi; nei minori, com' è il cardellino, il fanello, il verzellino, il lucarino, la allodola, la passèra de' salci, il reattino ecc, sono del colore della perla, lucide, e minute.

77. Riesce difficile assicurarsi se la punta bifida dell' arco midollare (cap. III.) concorra a formarle. Il sito delle papille anteriore alla commessura negli uccelli appunto come la punta bifida anteriore dell' arco, che si avanza oltre alla commessura suddetta, e qualche debole traccia argentina, che ho osservato da quella a queste nella sostanza dei citati tubercoli *Alleriani* tanto nelle oche, quanto nelle anitre, nel barbagianni, nel nibbio, e nei galli d' india, dee rendermi scusabile se inclino a credere, che anche negli uccelli le papille midollari sieno formate come negli uomini (*b*) dal raddoppiamento della sostanza midollare della punta anteriore dell' arco per risalire (a qualche fine noto alla natura) nella sostanza del cervello, non avendo io negli uccelli ancora potuto vedere la continuazione di tale raddoppiamento fino al nervo olfattorio.

(*a*) Trat. I. Par. II. cap. II. Art. II. §. I. cap. III. Art. III.
(*b*) Encefal. Univ. Parte II.

CAPITOLO VIII.

I Talami.

Testo Alleriano (*a*)

„ Alle gambe del cerebro ſtanno appoggiati i talami de'
„ nervi ottici, la ſtruttura dei quali è differente da quella
„ che hanno negli uomini. Sono due ſacchi voti, ovali; oc-
„ cupano lo ſpazio di mezzo tra il cervello e il cervellet-
„ to, poſteriormente al primo, davanti all' ultimo, ſopra le
„ gambe del cervelletto.

78. Sono veramente talami dei *N.* ottici que' due corpi bianchi, liſci, poco differenti in figura da due lupini, cioè tondi, pianamente conveſſi in alto ed in baſſo, coperti dalla gibboſa eſtremità degli emisferi, aggiacenti in avanti ai lobi, in alto ai *peduncoli del cervelletto*, che ſi vedono tra la colonna midollare centrale, e le pareti laterali del cranio alla baſe di queſto, innicchiati nelle due foſſe (*b*) ſcolpitevi appunto per contenerli, e perciò dette da noi foſſe dei talami; nelle quali ſono trattenuti dalle già deſcritte due pieghe orizzontali della Dura-madre (*c*).

79. Nel centro del corpo loro lenticolare ſi vede una conſiderabile cavità (comune agli uccelli, ai ſerpi, alle vipere, ai peſci) la quale sbocca nelle pareti laterali dell' acquidotto là dove n'è ancora fatta la volta dalla commeſſura poſteriore (61). Ventricolo dei talami.

(*a*) *Verum cruribus cerebri adplicantur thalami nervorum opticorum, quorum alia, quam in homine, natura eſt. Sacci ſunt cavi, ovales, medio loco inter cerebrum & cerebellum poſiti, pone cerebrum, ante cerebellum, ſuper crura cerebelli.*

In avibus (pag. 68.) *thalami nervorum opticorum cavi ſunt, propriumque ventriculum continent.*

In avibus (vol. VIII. §. XXV. pag. 87) *hi thalami manifeſto cavi ſacci ſunt.* E nella nota: *Habet Willis* p. 71. *Willoughby* p. 5. *Collins* p. 1101. *Tab.* 53. F. 6. Tab. 58. fig. I. ecc. Altrove di nuovo dice

Cavea in avibus ad aquæductus finem in ventriculum quartum hiat; fibræ ſuperficiei nervum opticum adeunt.

(*b*) Trat. I. Parte II. cap. II. Art. I. §. 14, e 15.

(*c*) Tratt. ſecondo §. 11.

80. Aveva già notato *Allero*, che la corteccia dei talami è midollare, ma ſottile, e che il rimanente dell' intima loro ſoſtanza è quaſi cinericio (*a*), ſicchè mi reſta ſoltanto da accennare, che la ſoſtanza midollare n'è ſoſtenuta da tale ſoſtanza cinericia, la qual è molto foſca, e ſi appoggia pure ſopra un nocciolo midollare cavo, a tal che la cinericia è tra due laſtre midollari ſimili a due guſci di lupino contenuti uno nell' altro.

81. In ſecondo luogo, che il parete interno del ſecondo guſcio midollare è pur anco tappezzato di morbida polpoſa lanugine cinericia, per la quale ſerpeggiano molti vaſellini ſanguigni, diſpoſti ivi a foggia di rete in alcuni cerebri molto elegante.

Pleſſo corioidéo dei ventricoli de' talami.

82. In terzo luogo, che non ſi dee confondere con il pleſſo corioidéo viſibile nei talami degli uccelli più groſſi l'accennata rete vaſculare, perchè quello è un corpo diſtinto fatto a foggia d' una membrana fine sì, ma libera, tutta irrigata eſſa ancora di vaſellini, e venendo dal quarto ventricolo, ſi porta in amendue le cavità dei talami a guiſa di doppio allungamento.

83. Finalmente, che queſti due piccioli pleſſi corioidei hanno il picciuolo proprio membranoſo, il quale paſſa nel canaletto di comunicazione tra il voto dei talami e l'acquidotto, mentre che il fiocco, dal quale ne ſono occupate le cavità, agitato nell' acqua vi ſi ſpiega, e manifeſta la propria notabile eſpanſione.

84. Soggiungeſi poi dall' Autore eſſere corticale quella ſoſtanza, che attacca i talami alle gambe del cervello (*b*), e che gli uniſce tra di loro; e ch' eſſi abbracciano e circondano le gambe del cervello nella guiſa, che alquanto più indietro

---

(*d*) *Eorum cortex medullaris tenuis eſt; reliquum intus fere corticeum*. Op. Min. l. cit.

(*b*) *Thalamos, ubi cum cruribus coaleſcunt, corticea ſubſtantia unit. crura cerebri perinde amplexantur, & circum eunt, uti paullo poſt cerebelli crura ſolent, & appendices quædam ſunt ejus cruris cerebri. Hi thalami toti cavi educunt nervum cognominem fibris ſuis anterioribus, & poſterioribus, qui tamen etiam ad corticalia crura cerebri adhærent. Hi porro nervi optici craſſi, & duri, & breves conveniunt in unum* Op. Minor. l. cit.

dietro abbracciano e circondano quelle del cervelletto, e sono in certo modo appendici delle gambe del cervello; e questi corpi voti mediante le fibre loro anteriori, e posteriori dare origine al *N.* ottico, essendo anche aderenti alla parte cinericia delle gambe del cervello; e gli stessi nervi grossi, e duri dopo un breve tragitto si congiungono pur anco insieme.

85. Con le quali parole il chiarissimo Autore ha probabilmente voluto indicare la sostanza cinericia della quale abbiamo notato essere costrutti i lobi (*a*), e non già considerare come porzione dei talami siffatta sostanza cinericia, perciocchè sebbene questi con il margine interno si trovino aderenti ai lobi, tuttavia non sono continui, nè confusi insieme.

86. In risguardo poi all' origne, alla struttura, ed al corso dal medesimo esposti dei nervi ottici, tratteremo diffusamente nel Trattato ai *N.* cerebrali destinato.

CAPITOLO IX.

Della Glandula Pineale

TESTO ALLERIANO (*b*)

„ Non v' è Glandula Pineale.

87. Il vedere collocati negli uccelli così lontano dai ventricoli laterali i talami de' *N.* ottici, che negli uomini, e nei quadrupedi si trovano sotto la volta a tre pilastri immediatamente uniti per formare il terzo ventricolo; e gli stessi talami costrutti così diversamente da quello, che sono in questi (differenza però, che non è guari considerabile tra i talami degli uccelli e quelli delle vipere, dei serpenti, delle lucertole terrestri, ed acquatiche, e dei pesci) il vederli così

(*a*) 43, 46, 47.

(*b*) *Nulla glandula pinealis* e ripete: *Nulla in Ansere, Anate, Tringa.* Op. Minor. P. II. pag. 197.

lontani dai corpi, che equivagliono agli ſtriati, ſebbene queſti pure negli uccelli non abbiano nè la forma eſteriore, nè le ſtrie interiori, che hanno nei quadrupedi, e negli uomini, il vedere da queſti corpi ſcolpito così lontano il terzo ventricolo, e le eminenze quadrigemelle collocate ſul parete interno inferiore dell' acquidotto, in vece d' eſſere come negli uomini e nei quadrupedi ſulla ſommità della colonna midollare centrale poſteriormente, e fuori dell' acquidotto medeſimo ecc. ecc. mi ha fatto ſoſpettare, che la glandula pineale doveſſe pur anco ricercarſi nell' encefalo degli uccelli lontano dal ſito negli uomini, e nei quadrupedi dalla medeſima occupato.

88. E ben mi apposi, mercecchè dopo varie infruttuoſe ricerche ho trovato queſto corpicciuolo preciſamente nel mezzo della parte diretana contigua degli emisferi nella eſtremità poſteriore del ſolco onde gli emisferi ſteſſi ſono diviſi, propio dove principiano i due ſolchi laterali, che ne ſieguono la curvità della porzione diretana, e la faccia anteriore del cervelletto, dove ſcorre il groſſo vaſo, che in queſti animali tiene il luogo della groſſa vena di *Galeno*.

89. La prima fiata, che in tale ſito vidi la glandula pineale aſſai diſtintamente, fu nell' encefalo d' un barbagianni; continuai a cercarvela, ed ivi a trovarla nei galli d' india dov' è groſſa come il cuore d' un ranocchio, al quale per la figura non poco ſi raſſomiglia; nei nibbi sì grandi, che piccioli; negli ſparvieri, dov' è apparentiſſima, e dove l' ho dimoſtrata frequentemente larga, ed alta poco meno di due linee, criſtallina, e riſplendente.

90. D' allora in poi non ho più incontrato veruna difficultà a dimoſtrarla nelle galline, e nelle pernici, nei guſi, nei merlotti, nei corvi, nei froſoni, nei tordi, nelle rondinelle, nei fanelli, nei verzellini, negli uſcignuoli, nelle allodole, e nei reattini, in ſomma in tutti gli uccelli, che notomizzai, e ſempre nell' accennato punto d' unione dei tre ſolchi mentovati, purchè i cerebri ne foſſero ſani, ed in quel ſito non foſſero ſtate maltrattate nè la dura, nè la pia meninge.

(*a*) Trat. II. §. 28.

91. Nelle oche, e nelle anitre (*a*) ſi dimoſtra nella ſeguente maniera. Segate con delicatezza le oſſa del cranio circolarmente a livello della volta delle orbite, e toltone via il coperchio, laſciando in ſito la *D. M.*, ſi recida queſta membrana con le forbicine a ſeconda del taglio circolare, ſi sollevi, e ſi roveſci ſul cervelletto uniformemente ſpogliandone ad un tratto amendue gli emisferi ſenza lacerarla, e ſenza fare violenza: intanto ſi oſſervi alla parte poſteriore del ſeno longitudinale quel pleſſo di vaſi, che ſta dirimpetto alla faccia anteriore del cervelletto, perchè fra quei vaſi pieni di ſangue trovaſi innicchiata la glandula pineale, cioè un corpo di ſoſtanza cerebrale cinericia, lucido, e benchè polpoſo, non però intieramente privo d' elaſticità.

92. Si continuino a premere co' polpaſtrelli dell' indice, e del dito mezzano della deſtra i due emisferi per vietare, che non s' arrendano alla Dura-madre, che biſogna terminar di rivolgere delicatamente a tergo, e queſta membrana ſi trarrà dietro la glandula pineale intiera, o una porzione principale della medeſima, la quale reſterà appeſa, a foggia del cuore d' un lumacone ignudo, alla piega arcata (Tratt. II. §. 10.) della ſteſſa meninge, nel ſito dove ſi fa la biforcazione (*b*) del ſeno longitudinale.

93. Molte volte però (a tenore della deſtrezza dell' Anatomico, della minore tenacità delle aderenze del pleſſo con la glandula, e della maggiore robuſtezza dei picciuoli, che uniſcono queſta alla commeſſura poſteriore (57)) la glandula reſta nel ſuo ſito naturale; allora vi ſi vede la baſe meno cinericia, e più larga, immerſa fra gli emisferi e il cervelletto, piegata notabilmente al davanti, e la punta appoggiata a quella groſſa vena, che abbiamo già indicata (*c*), ſta rivolta in alto contro la faccia anteriore del cervelletto.

94. Nel barbagianni, nello ſparviere, nel falchetto, ma

(*a*) Nel Vol. VIII. però *Allero* medeſimo non contradice ad alcuni autori, che ammettono la Gl. Pin. in certi volatili. Vedi alla pag. 109. le parole ſeguenti nella Nota *In ſtruthio camelo Pariſini; in aquila Borric. Hermet. Ægypt. ſapient. p. 266. Harder Apiar. p. 67.*

(*b*) Trat. II. §. 22.

(*c*) Trat. II. §. 28.

assai meglio nei galli d' india si discernono due teneri filuzzi pellucidi, che a foggia di due picciuoli ne attaccano la parte posteriore della base, bianchiccia perchè midollare, alla commessura posteriore, uno per lato.

95. Si possono vedere affissi alla commessura medesima esaminando queste parti con attenzione, ancorchè tutta, o in parte ne sia stata svelta la glandula nel sollevare la *D. M.*, ma bisogna a tal fine avere già votati i ventricoli laterali, cioè averne distrutto il nocciolo (artic. II.), ossia tubercolo *Alleriano*, e rivolto al davanti tutto l' appartenente alle appendici posteriori del corpo calloso.

96. Quando i due teneri filuzzi mentovati sono ancora affissi alla glandula, ed alla commessura posteriore, si trovano (serbate le dovute proporzioni) più lunghi di quelli onde questa glandula nei cerebri umani è attaccata alla commessura stessa, ed ai talami (*a*).

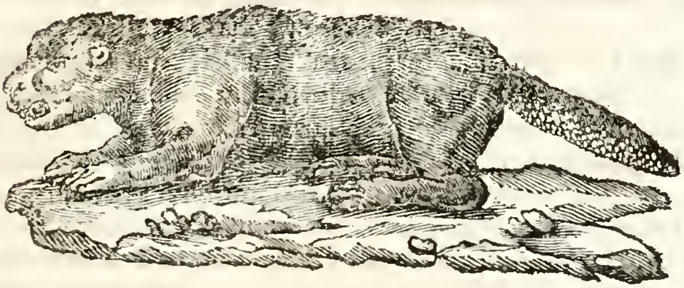
97. Nelle galline (*b*), nei galli d' india, e nel nibbio come nel barbagianni strisciandovi leggiermente sopra una delle faccie la punta dello stecco di penna, d'una spilla ecc., vi si veggono a sollevare certe increspature, o rughe, che si possono considerare come indizj d'un tenue epitelio, che veste questa glandula, il quale con la cottura delle teste sembra meglio ancora manifestarsi, rendendola assai meno friabile.

98. Nella crivella, nelle gazze, nei corvi occupa visibilmente, e tenacemente il luogo additato ed è bislunga, in questi rossigna, nelle altre pellucida e cinericia. E per prova della tenacità di tale adesione si notomizzi l' encefalo d' una crivella, o smeriglio (uccello non più grosso d' una pernice) e si troverà affissa alla commessura posteriore per due filuzzi tanto elastici benchè quasi pellucidi, che potranno ricondurre varie fiate la glanduletta verso la commessura, com' è accaduto costantemente a me quando ne la ebbi a bello studio allontanata, e tosto che rallentai la forza, con la quale io ne la teneva distante.

(*a*) Encefalot. Parte 2. Cap. 7.

(*b*) Nelle teste cotte di queste due specie separando con diligenza gli emisferi del cervello, e da questi il cervelletto ognuno a mensa può assicurarsi dell' esistenza della Gl. Pin. nel sito da me indicato.

Tali ſono le oſſervazioni ſtateci laſciate da *Allero* ſul cervello degli uccelli, e tale la ſtruttura, che guidato da quelle io ſono arrivato a trovare più coſtantemente nelle oſſa, nelle meningi, e nel cervello medeſimo, le quali ſottopongo all' acutiſſimo occhio voſtro, come ſottometterò giacchè me lo accordate le mie Ricerche ſul cervelletto di queſta claſſe d' animali, e ſui nervi, ch' eſcono dai crani loro, il riſultato delle quali è forſe più curioſo di quello, che ſono le preſenti. Aggiungerò pure le varietà nelle moltiplici diſſecazioni mie incontrate, non avendo io voluto congiungerle con le coſe coſtanti per non generare confuſione, o rendere le note più voluminoſe del teſto, e premendomi d'altra parte, che ſi adori l' ampia magnificenza, onde l' *Adorabile Creatore* d' ogni coſa ha fregiato l' univerſo, e la varietà mirabile dei mezzi, onde ha ſaputo ottenere i medeſimi fini ad iſtruzione noſtra, e a gloria ſua. Ho l' onore d' eſſere ecc.



TEOREMI

SOPRA LE SERIE INFINITE CONVERGENTI

Formate dai Prodotti de' Numeri diſpari ſucceſſivi diviſi pe' Prodotti de' Numeri pari corriſpondenti

Del P. Gregorio Fontana delle Scuole Pie, Pubblico Profeſſore delle Matematiche ſuperiori nella Regia Univerſità di Pavia.

NOn vi ha forſe nella moderna Analiſi parte alcuna, in cui da un ſecolo e mezzo in qua ſiaſi fatto da' Geometri un si gran viaggio, e tante nuove inaſpettate verità ſieno ſtate ſcoperte, quanto in quella, che vien deſtinata ad eſporre la Teoria delle Serie Infinite. Siccome ſino da' primi paſſi, che andò facendo la nuova Analiſi, fu facile ad ognuno di accorgerſi dell' utilità ſomma ed importanza, che dalla dottrina delle ſerie dovea per neceſſità derivare in tutte le Scienze Matematiche; quindi avvenne, che i più gran Geometri rivolſero le loro meditazioni a queſt' intereſſantiſſimo oggetto, e facendo a gara d' inoltrarſi più addentro nella materia portarono tanto avanti le loro ricerche, che a conſiderare l' intervallo percorſo dal principio del cammino ſino al termine, a cui ſono in oggi pervenuti, e avuto riguardo al lento progreſſo delle altre cognizioni in quel periodo di tempo, ſi crederebbe ſenza pena, che non uno o due ſecoli, ma ben venti e trenta foſſero traſcorſi. A ſoſtenere l' indefeſſo ſtudio de' Geometri in queſta ſpecial parte di analiſi a preferenza delle altre contribuì, non ha dubbio, più che ogn' altro motivo l' idea che toſto ſi concepì de' vantaggi grandiſſimi e delle prezioſe ricchezze, che queſto nuovo campo fin ne' primi tentativi parve largamente promettere a' ſuoi coltivatori. In fatti potendoſi opportunamente introdurre le ſerie in un' infinità di ricerche, le più delicate e profonde,

e presentandosi elleno dappertutto anche quando meno si preveggono; se si giugnesse a tanto di poter assegnare la somma di ciascheduna, tutto si sarebbe fatto nelle Matematiche, e qualunque arduo intrattabil Problema sarebbe sciolto compiutamente. Ma con tutti i progressi già fatti siamo ancora tanto lontani da quest' ultima meta, che l' immensa distanza, che ci separa, non sembra sperabile dover mai essere interamente sormontata. Nelle serie stesse numeriche, che con più successo delle altre sonosi coltivate, in mezzo all' ampia e doviziosa raccolta di nuove fecondissime verità scoperte nelle serie de' numeri *figurati*, de' *poligoni*, delle potenze dirette ed inverse de' numeri naturali, ecc. è tuttavia tale e tanta la farraggine delle cose, che ancor restano nell' oscurità, che basterebbe questo solo argomento, quando tutti gli altri mancassero, per convincersi della povertà e delle angustie dell' ingegno umano.

Siccome pertanto infinite serie numeriche si possono comporre moltiplicando per ogni termine un certo aggregato di numeri dispari successivi, e dividendo il risultato pel prodotto de' numeri pari corrispondenti, o viceversa dividendo questo per quello, ed intorno a tali serie poco o nulla si è scoperto fino al presente, e poco altro si conosce oltre il famoso Teorema di *wallis* per esprimere il rapporto della circonferenza circolare al diametro; non sarà inutile l' esporre qui alcuni curiosi e nuovi Teoremi risguardanti la somma delle predette serie: dico nuovi Teoremi, perchè dai due primi in fuori, che per essere di facile dimostrazione debbono esser già conosciuti, non mi è palese, che gli altri si trovino prima d'ora pubblicati. Questi Teoremi a me si sono presentati mercè di alcuni particolari artifizj di Calcolo Integrale, artifizj talvolta assai fini e complicati per dover creder probabile l' esistenza d' una via più corta e spedita, che la da me tenuta, per dimostrare alcuni di essi.

Le somme, che io assegno alle serie da me trattate, sono di tre sorti, altre cioè assolutamente infinite, altre trascendenti, altre algebraiche e semplicissime.

TEOREMA I.

La ſerie $\frac{1}{2}+\frac{1}{2.4}+\frac{1.3}{2.4.6}+\frac{1.3.5}{2.4.6.8}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}+$ecc. *in inf.* è uguale all' unità.

TEOREMA II.

La ſerie $\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}+$ ecc. *in inf.* ha un valore infinito.

TEOREMA III.

La ſerie $\frac{1^2}{2^2}+\frac{1.3^2}{2.4^2}+\frac{1.3.5^2}{2.4.6^2}+\frac{1.3.5.7^2}{2.4.6.8^2}+\frac{1.3.5.7.9^2}{2.4.6.8.10^2}+$ecc. *in inf.* ha parimente un valore infinito.

SCOLIO.

Nel Teorema XVII. ſi dimoſtrerà, che queſta ſerie conſerva il ſuo valore infinito quand' anche i due ultimi fattori di tutti i numeratori e denominatori ſieno elevati al quadrato; e lo ſteſſo potrà dimoſtrarſi, quando i tre ultimi, i quattro ultimi, ecc. e generalmente qualunque numero finito di fattori ultimi nel numeratore, e denominatore di ciaſcun termine della ſerie ſi trovi alzato al quadrato. Che ſe tutti i fattori de' termini della ſerie vengono elevati al quadrato, la ſomma ritiene tuttavia un valore infinito, ma d' un' indole però affatto ſingolare, qual è l' infinito logaritmico. Ecco pertanto il ſeguente

TEOREMA IV.

La ſerie $\frac{1^2}{2^2}+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}+\frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}+$ ecc. *in inf.* ha un valore infinito, ma logaritmico.

TEOREMA

TEOREMA V.

Il quadrante inverso della periferia del cerchio descritto col raggio 1, cioè $\frac{2}{\pi}$ è uguale alla serie infinita

$$1-\frac{1}{2^2}-\frac{1^2.3}{2^2.4^2}-\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}-\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}-\frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2}-\text{ecc.}$$

in inf.

SCOLIO.

La famosa serie Wallisiana, la quale suole dimostrarsi mediante un lungo giro di calcoli complicati, diventa un' immediata conseguenza di questo Teorema. Imperciocchè sommando successivamente i termini della serie, si ottiene di mano in mano

1.°

$$1^2-\frac{1^2}{2^2}=\frac{1^2.3}{2^2}.$$

2.°

$$\frac{1^2.3}{2^2}-\frac{1^2.3}{2^2.4^2}=\frac{1^2.3(4^2-1^2)}{2^2.4^2}=\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2}.$$

3.°

$$\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2}-\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}=\frac{1^2.3^2.5(6^2-1^2)}{2^2.4^2.6^2}=\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2}.$$

4.°

$$\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2}-\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}=\frac{1^2.3^2.5^2.7(8^2-1^2)}{2^2.4^2.6^2.8^2}=\frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2}.$$

5.°

$$\frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2} = \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9\,(10^2 - 1^2)}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2}$$
$$= \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9^2.11}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2}.$$

6.° ecc.

Quindi apertamente si scorge essere il quadrante inverso $\frac{2}{\pi} = \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9^2.11^2.13^2.15^2.17.\text{ecc.}}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2.12^2.14^2.16^2.\text{ecc.}}$ che è appunto la serie Wallisiana formata d' un solo termine contenente il prodotto de' quadrati di tutti i numeri dispari diviso pel prodotto de' quadrati di tutti i numeri pari.

TEOREMA VI.

Il quadrante inverso $\frac{2}{\pi}$ della circonferenza del cerchio descritto col raggio 1 è parimente uguale alla serie infinita

$$\frac{1}{2} + \frac{1^2}{2^2.4} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2.6} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8} + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2.10}$$
$$+ \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9^2}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2.12} + \text{ecc.}$$

TEOREMA VII.

Lo stesso quadrante inverso $\frac{2}{\pi}$ è uguale alla serie infinita

$$3\left(\frac{1}{2.4} + \frac{1^2.3}{2^2.4.6} + \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6.8} + \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8.10}\right.$$
$$\left. + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2.10.12} + \text{ecc.}\right),$$ di cui è chiara la legge.

TEOREMA VIII.

Lo ſteſſo quadrante inverſo $\frac{2}{\pi}$ è parimente eguale alla ſerie infinita, della quale è pur manifeſta la legge,

$$5\left(\frac{1.3}{2.4.6}+\frac{1^2.3.5}{2^2.4.6.8}+\frac{1^2.3^2.5.7}{2^2.4^2.6.8.10}+\frac{1^2.3^2.5^2.7.9}{2^2.4^2.6^2.8.10.12}+\frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9.11}{2^2.4^2.6^2.8^2.10.12.14}+\text{ecc.}\right).$$

TEOREMA IX.

Il predetto quadrante inverſo $\frac{2}{\pi}$ è uguale a queſt' altra ſerie di legge pur manifeſta

$$7\left(\frac{1.3.5}{2.4.6.8}+\frac{1^2.3.5.7}{2^2.4.6.8.10}+\frac{1^2.3^2.5.7.9}{2^2.4^2.6.8.10.12}+\frac{1^2.3^2.5^2.7.9.11}{2^2.4^2.6^2.8.10.12.14}+\frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9.11.13}{2^2.4^2.6^2.8^2.10.12.14.16}+\text{ecc.}\right).$$

TEOREMA X.

In generale, ſe n eſprime qualſivoglia numero diſpari, il quadrante inverſo $\frac{2}{\pi}$ è uguale ad n moltiplicato per la ſerie infinita, la quale ha le ſeguenti proprietà: 1.° ogni ſuo termine frazionario ha per numeratore il prodotto dei numeri diſpari ſucceſſivi, i quali arrivano ſino al diſpari n eſcluſivamente nel primo termine, e ne' termini ſuſſeguenti creſcono ſempre di uno di più ſopra il precedente: 2.° queſti fattori diſpari ſono elevati al quadrato a riſerva degli ultimi in numero di $\frac{n-1}{2}$ in ciaſcun termine: 3.° il denominatore di ogni termine contiene il prodotto dei numeri pari ſucceſſivi, i quali arrivano nel primo termine ſino ai pari $n+1$ incluſivamente, e ne' termini ſuſſeguenti creſcono ſempre di un

fattore di più sopra il termine precedente: 4.° questi numeri pari sono elevati al quadrato ad eccezione degli ultimi in numero di $\frac{n+1}{2}$ in ciascun termine.

TEOREMA XI.

Il quadrante inverso $\frac{2}{\pi}$ è nuovamente uguale alla serie infinita

$$3\left(\frac{1}{2}-\frac{1.3}{2^2.4}-\frac{1^2.3.5}{2^2.4^2.6}-\frac{1^2.3^2.5.7}{2^2.4^2.6^2.8}-\frac{1^2.3^2.5^2.7.9}{2^2.4^2.6^2.8^2.10}-\frac{1^2.3^2.5^2 7^2.9.11}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2.12}-\text{ecc.}\right)$$

TEOREMA XII.

Il quadrante inverso $\frac{2}{\pi}$ è uguale alla serie infinita

$$5\left(\frac{1.3}{2.4}-\frac{1.3.5}{2^2.4.6}-\frac{1^2.3.5.7}{2^2.4^2.6.8}-\frac{1^2.3^2.5.7.9}{2^2.4^2.6^2.8.10}-\frac{1^2.3^2.5^2.7.9.11}{2^2.4^2.6^2.8^2.10.12}-\text{ecc.}\right)$$

TEOREMA XIII.

Il quadrante inverso $\frac{2}{\pi}$ viene espresso dalla serie infinita

$$7\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}-\frac{1.3.5.7}{2^2.4.6.8}-\frac{1^2.3.5.7.9}{2^2.4^2.6.8.10}-\frac{1^2.3^2.5.7.9.11}{2^2.4^2.6^2.8.10.12}-\frac{1^2.3^2.5^2.7.9.11.13}{2^2.4^2.6^2.10.12.14}-\text{ecc.}\right)$$

TEOREMA XIV.

Se in generale n rappresenta qualunque numero dispari, il quadrante inverso $\frac{2}{\pi}$ viene espresso dal prodotto di n moltiplicato per una serie infinita di termini frazionarj, tutti negativi a riserva del primo, la qual serie procede con questa legge: 1.° il numeratore di ciascun termine è il prodotto dei numeri dispari successivi, i quali nel primo termine giungono sino al dispari n esclusivamente, ed ogni termine susseguente acquista un fattore di più sopra il termine antecedente: 2.° questi fattori dispari sono elevati alla seconda potenza a riserva delli $\frac{n+1}{2}$ ultimi in ciascun termine: 3.° il denominatore di ciascun termine della serie è il prodotto de' numeri pari successivi, l' ultimo de' quali nel primo termine è $n-1$, ed ogni termine susseguente della serie acquista un fattore di più che il precedente: 4.° tali numeri pari ascendono alla seconda potenza ad eccezione delli $\frac{n-1}{2}$ ultimi in ciascun termine.

TEOREMA XV.

Il logaritmo iperbolico del numero 2 è uguale alla serie infinita di nota legge $\frac{1}{2^2}+\frac{1.3}{2.4^2}+\frac{1.3.5}{2.4.6^2}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8^2}+\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10^2}+\frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12^2}+$ ecc.

TEOREMA XVI.

Il logaritmo iperbolico del numero 2 è parimente uguale alla serie infinita, di cui è pure visibile la legge

$$\frac{4}{3}\left(\frac{1.3^2}{2^2.4^2}+\frac{1.3.5^2}{2.4^2.6^2}+\frac{1.3.5.7^2}{2.4.6^2.8^2}+\frac{1.3.5.7.9^2}{2.4.6.8^2.10^2}\right.$$

$+ \frac{1.3.5.7.9.11^2}{2.4.6.8.10^2.12^2} + \text{ecc.})$

TEOREMA XVII.

Il valore della ſerie di manifeſta legge
$\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} + \frac{1.3^2.5^2}{2.4^2.6^2} + \frac{1.3.5^2.7^2}{2.4.6^2.8^2} + \frac{1.3.5.7^2.9^2}{2.4.6.8^2.10^2}$
$+ \frac{1.3.5.7.9^2.11^2}{2.4.6.8.10^2.12^2} +$ ecc. *in inf.* è infinito.

TEOREMA XVIII.

La ſerie di nota legge
$\frac{1.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} + \frac{1.3.5^2.7^2}{2.4^2.6^2.8^2} + \frac{1.3.5.7^2.9^2}{2.4.6^2.8^2.10^2} + \frac{1.3.5.7.9^2.11^2}{2.4.6.8^2.10^2.12^2}$
$+ \frac{1.3.5.7.9.11^2.13^2}{2.4.6.8.10^2.12^2.14^2} +$ ecc. *in inf.* ha per ſomma
$\frac{41}{64} \log. 2 - \frac{1}{128}$.

TEOREMA XIX.

La ſerie $\frac{1.3}{2^2.4^2} + \frac{1.3.5}{2.4^2.6^2} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6^2.8^2} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8^2.10^2} +$ ecc. *in inf.* dove i due ultimi fattori di ogni denominatore ſono elevati al quadrato, ha per ſomma $\frac{1}{4}(1 - \log. 2)$.

TEOREMA XX.

La ſerie $\frac{1.3.5}{2^2.4^2.6^2} + \frac{1.3.5.7}{2.4^2.6^2.8^2} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6^2.8^2.10^2}$
$+ \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8^2.10^2.12^2} + \frac{1.3.5.7.9.11.13}{2.4.6.8.10^2.12^2.14^2} +$ ecc. *in inf.*, nella quale i tre ultimi fattori di ciaſcun denominatore ſono ele-

vati alla seconda potenza, ha per somma $\frac{3}{64}\left(\log. 2 - \frac{1}{2}\right)$.

TEOREMA XXI.

La somma della serie $\frac{1.3.5^2}{2^2.4^2.6^2} + \frac{1.3.5.7^2}{2.4^2.6^2.8^2} + \frac{1.3.5.7.9^2}{2.4.6^2.8^2.10^2} + \frac{1.3.5.7.9.11^2}{2.4.6.8^2.10^2.12^2} +$ ecc., nella quale i tre ultimi fattori di ciascun denominatore, e l' ultimo di ciascun numeratore si trovano alzati al quadrato, ha per valore $\frac{17}{128} - \frac{7}{64}\log. 2$.

TEOREMA XXII.

La serie $1 - \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} - \frac{1}{5.7} - \frac{1}{7.9} - \frac{1}{9.11} -$ ecc. *in inf.* ha la sua somma $= \frac{1}{2}$.

TEOREMA XXIII.

La somma della serie $\frac{2}{1.3} - \frac{4}{1.3.5} - \frac{6}{3.5.7} - \frac{8}{5.7.9} - \frac{10}{7.9.11} - \frac{12}{9.11.13} - \frac{14}{11.13.15} -$ ecc., di cui è manifesto l' andamento, è $= \frac{1}{4}$.

TEOREMA XXIV.

La serie $\frac{2.4}{1.3.5} - \frac{4.6}{1.3.5.7} - \frac{6.8}{3.5.7.9} - \frac{8.10}{5.7.9.11} - \frac{10.12}{7.9.11.13} - \frac{12.14}{9.11.13.15} -$ ecc. ha per somma $\frac{1}{6}$.

TEOREMA XXV.

La somma della serie $\frac{2.4.6}{1.3.5.7} - \frac{4.6.8}{1.3.5.7.9} - \frac{6.8.10}{3.5.7.9.11}$
$- \frac{8.10.12}{5.7.9.11.13} - \frac{10.12.14}{7.9.11.13.15} - \frac{12.14.16}{9.11.13.15.17}$ — ecc., di cui è palese la legge, è $= \frac{1}{8}$.

TEOREMA XXVI.

La serie $\frac{2.4.6.8}{1.3.5.7.9} - \frac{4.6.8.10}{1.3.5.7.9.11} - \frac{6.8.10.12}{3.5.7.9.11.13}$
$- \frac{8.10.12.14}{5.7.9.11.13.15} - \frac{10.12.14.16}{7.9.11.13.15.17} - \frac{12.14.16.18}{9.11.13.15.17.19}$ — ecc. di manifesta legge ha per somma $\frac{1}{10}$.

TEOREMA XXVII.

La serie $\frac{2.4.6.8.10}{1.3.5.7.9.11} - \frac{4.6.8.10.12}{1.3.5.7.9.11.13} - \frac{6.8.10.12.14}{3.5.7.9.11.13.15}$
$- \frac{8.10.12.14.16}{5.7.9.11.13.15.17} - \frac{10.12.14.16.18}{7.9.11.13.15.17.19}$ — ecc. di evidente andamento ha per somma $\frac{1}{12}$.

TEOREMA XXVIII.

La somma della serie $\frac{2.4.6.8.10.12}{1.3.5.7.9.11.13} - \frac{4.6.8.10.12.14}{1.3.5.7.9.11.13.15}$
$- \frac{6.8.10.12.14.16}{3.5.7.9.11.13.15.17} - \frac{8.10.12.14.16.18}{5.7.9.11.13.15.17.19}$

— 10.12

$- \frac{10.12.14.16.18.20}{7.9.12.13.15.17.19.21}$ — ecc. di legge manifesta è $= \frac{1}{14}$.

TEOREMA XXIX.

Essendo n qualunque numero intero, la frazione $\frac{1}{2n}$ è uguale alla somma della serie che ha tutti i termini negativi a riserva del primo, ed è dotata delle seguenti proprietà: 1.° Il numeratore del primo termine è il prodotto de' numeri pari successivi continuati fino al pari $(2n - 2)$ inclusivamente: 2.° il numeratore di ogni termine susseguente è il numeratore precedente sminuito del suo primo fattore, e aumentato del fattore successivo all' ultimo: 3.° il denominatore così del primo come del secondo termine è il prodotto de' numeri dispari successivi continuati fino a $(2n - 1)$ inclusivamente nel primo termine, e fino a $(2n + 1)$ inclusivamente nel secondo termine: 4.° il denominatore di ogni altro termine susseguente è lo stesso che il denominatore antecedente, a cui manca il primo fattore, e cresce il fattore consecutivo all' ultimo.

TEOREMA XXX.

La serie $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{11.13} +$ ecc. *in inf.* ha la sua somma $= \frac{1}{2}$.

SCOLIO.

Questo Teorema non differisce dal Teorema XXII., ma non doveva qui omettersi, perchè forma il primo anello della catena seguente.

TEOREMA XXXI.

La somma della serie $\frac{2}{1.3.5} + \frac{4}{3.5.7} + \frac{6}{5.7.9} + \frac{8}{7.9.11}$

$+ \frac{10}{9.11.13} + \frac{12}{11.13.15} +$ ecc. non è altro che $\frac{1}{4}$.

TEOREMA XXXII.

La ferie $\frac{2.4}{1.3.5.7} + \frac{4.6}{3.5.7.9} + \frac{6.8}{5.7.9.11} + \frac{8.10}{7.9.11.13} + \frac{10.12}{9.11.13.15} +$ ecc. ha per fomma $\frac{1}{6}$.

TEOREMA XXXIII.

La fomma della ferie $\frac{2.4.6}{1.3.5.7.9} + \frac{4.6.8}{3.5.7.9.11} + \frac{6.8.10}{5.7.9.11.13} + \frac{8.10.12}{7.9.11.13.15} + \frac{10.12.14}{9.11.13.15.17} +$ ecc., il di cui andamento è evidente, è $= \frac{1}{8}$.

TEOREMA XXXIV.

La ferie $\frac{2.4.6.8}{1.3.5.7.9.11} + \frac{4.6.8.10}{3.5.7.9.11.13} + \frac{6.8.10.12}{5.7.9.11.13.15} + \frac{8.10.12.14}{7.9.11.13.15.17} +$ ecc. ha per fomma $\frac{1}{10}$.

TEOREMA XXXV,

La fomma della ferie $\frac{2.4.6.8.10}{1.3.5.7.9.11.13} + \frac{4.6.8.10.12}{3.5.7.9.11.13.15} + \frac{6.8.10.12.14}{5.7.9.11.13.15.17} + \frac{8.10.12.14.16}{7.9.11.13.15.17.19} + \frac{10.12.14.16.18}{9.11.13.15.17.19.21} +$ ecc. è $= \frac{1}{12}$.

TEOREMA XXXVI.

La somma della serie $\frac{2.4.6.8.10.12}{1.3.5.7.9.11.13.15}$ $+\frac{4.6.8.10.12.14}{3.5.7.9.11.13.15.17}+\frac{6.8.10.12.14.16}{5.7.9.11.13.15.17.19}$ $+\frac{8.10.12.14.16.18}{7.9.11.13.15.17.19.21}+\frac{10.12.14.16.18.20}{9.11.13.15.17.19.21.23}+$ ecc. ha per valore $\frac{1}{14}$.

TEOREMA XXXVII.

Preso per n qualunque numero intero, la frazione $\frac{1}{2n}$ è uguale alla somma della serie continuata in infinito, e composta di termini tutti positivi e frazionarj, e regolati dalle seguenti leggi: 1.° il numeratore del primo termine è il prodotto de' numeri pari successivi continuati fino a $(2n-2)$ inclusivamente: 2.° il numeratore di ciascun termine susseguente è lo stesso che il numeratore precedente sminuito del primo fattore, ed accresciuto del fattore consecutivo all' ultimo: 3.° il denominatore del primo termine è il prodotto de' numeri dispari successivi continuati fino a $(2n+1)$ inclusivamente: 4.° il denominatore di qualunque termine susseguente è il prodotto dei fattori del denominatore antecedente incominciando dal fattor secondo, e terminando nel fattore consecutivo all' ultimo.

SI AVVERTONO I LIBRAJ

Che il passaggio dalla pag. 187 alla pag. 220 è errore tipografico, perchè non sia creduto difettivo il volume.

S O P R A
L' INTEGRAZIONE DELLA FORMULA
$Qdx + Py^2dx \pm dy = 0$
M E M O R I A

Del Sig. Cavaliere Lorgna.

L' Equazione enunziata nel titolo di questa Memoria occupa un luogo nel Calcolo integrale sì distinto per sè non meno che per la celebrità della formula

$$ax^m dx + bx^n y^2 dx - dy = 0$$

che le appartiene, detta *Riccaziana* dall' inventore primo di onorata e sempre illustre memoria Co. *Jacopo Riccati*, che ho creduto studio non infruttuoso il promuoverne l'integrazione al segno che ho potuto più lontano. Se mi sia toccato in sorte di fare qualche avanzamento in questa indagine, il conoscano e giudichino i Geometri che vorranno concederle nel riandarla qualche momento delle loro applicazioni.

I.

Ridurre l' equazione differenzio-differenziale (A)

$$(A) \ldots . ddt + Qtdx^2 = 0$$

in cui dx è costante, Q funzione di x, al primo grado.

Si faccia $(\mu) \ldots dt = tydx + udx$, ove y, u son due variabili assunte, e sostituendo per ddt il valore $y^2tdx^2 + yudx^2 + tdxdy + dudx$, si avrà

$$t + \frac{1}{Q}\left(y^2t + yu + \frac{tdy}{dx} + \frac{du}{dx}\right) = 0$$

di cui formando due equazioni, come due sono le variabili introdotte, avremo le due equazioni di primo grado (B), (C)

$$(B) \ldots . 0 = dy + y^2 dx + \mathcal{Q} dx$$

$$(C) \ldots . 0 = yudx + du$$

da cui dipenderà l' equazione proposta (A). Il che ecc.

II.

Dato un valore soddisfacente all' equazione (B)

$$(B) \ldots . 0 = dy + y^2 dx + \mathcal{Q} dx$$

integrare l' equazione (A)

$$(A) \ldots . 0 = ddt + \mathcal{Q} t dx^2$$

Sia $y = \Delta$ un tal valore soddisfacente. Il si sostituisca nell' equazione (C) (§. I.), e s' integri. Sarà $u = Ce^{-\int \Delta dx}$, essendo C la costante arbitraria, ed e il numero di cui l' unità è il logaritmo iperbolico. Ripresa poscia la relazione (μ) (§. I.), vi si ponga Δ per y, $Ce^{-\int \Delta dx}$ per u, e s' integri. Risulterà $t = e^{\int \Delta dx} \left(C' + C \int dx e^{-2\int \Delta dx} \right)$ integrale completo dell' equazione (A). Il che ecc.

III.

Dato il valore particolare Δ soddisfacente all' equazione (B)

$$(B) \ldots . 0 = dy + y^2 dx + \mathcal{Q} dx$$

trovare l' integrale completo dell' equazione (B)

Si faccia $y = \frac{dt}{tdx}$; sarà $y^2 = \frac{dt^2}{t^2 dx^2}$, $dy = \frac{tdxddt - dt^2 dx}{t^2 dx^2}$, posto dx costante. Sostituendo pertanto questi valori in (B), riavremo l' equazione $(A) \ldots . ddt + \mathcal{Q} t dx^2 = 0$.

Sia poi $y = \omega$ l' integrale completo dell' equazione (B), che si cerca. Riprendendo l' equazione di relazione

$y = \frac{dt}{tdx}$, vi si sostituisca per y il valor generale ω sì che sia $\frac{dt}{t} = \omega dx$, e s' integri. Sarà $t = Ae^{\int \omega dx}$, integrale completo dell' equazione (A), giacchè ω dee comprendere una costante arbitraria. Ma s' è trovato (§. II.) essere

$$t = e^{\int \Delta dx} \left(C' + C \int dx e^{-2\int \Delta dx} \right)$$

integrale completo della medesima equazione (A), se sia Δ valor soddisfacente all' equazione (B). Dunque necessariamente dovrà essere

$$Ae^{\int \omega dx} = C' e^{\int \Delta dx} + C e^{\int \Delta dx} \int dx\, e^{-2\int \Delta dx}, \text{ cioè}$$

$$A = C' e^{\int (\Delta - \omega) dx} + C e^{\int (\Delta - \omega) dx} \int dx\, e^{-2\int \Delta dx}$$

e però differenziando, dividendo l' equazione differenziale per $dx \,.\, e^{\int (\Delta - \omega) dx}$, e facendo $\frac{C'}{C} = B$, si troverà essere

$$(*) \ldots . y = \omega = \Delta + \frac{e^{-2\int \Delta dx}}{B + \int dx\, e^{-2\int \Delta dx}}$$

l' integrale completo dell' equazione (B). Il che ecc.

IV.

Se ha luogo la relazione (1), essendo M qualunque funzione di x, o di y, o di entrambe, si verifica pure l'equazione differenziale (2)

$$(1) \ldots . x^2 y^2 = M$$

$$(2) \ldots . \pm dy \sqrt{M} + y^2 dx - \frac{dM}{2x} = 0$$

Imperciocchè, differenziando l' equazione (1), si ottiene l' equazione $2xy^2 dx + 2yx^2 dy - dM = 0$, la quale si trasforma nell' equazione $2xy(xdy + ydx) - dM = 0$, cioè nella seguente (3)

$$(3) \ldots . xydy + y^2 dx - \frac{dM}{2x} = 0$$

Ma l' equazione (1) somministra $xy = \pm \sqrt{M}$. Sostituendo pertanto questo valore nell' equazione (3), si verifica l' equazione (2). Il che ecc.

V.

E' dunque $y = \pm \frac{1}{x} \sqrt{M}$ un doppio valore soddisfacente all' equazione (2) per l' ambiguità de' segni.

VI.

Pertanto se sia $M = y^p$, e però abbia luogo la relazione (4)....$y = x^{2:(p-2)}$, si verificherà l' equazione (5)

$$(5)\ldots\ldots - \frac{p}{p-2} x^{(4-p):(p-2)}dx + x^{-p:(p-2)}y^2 dx \pm dy = 0$$

Imperciocchè in questa supposizione l' equazione (2) del §. IV. prende la forma (6)

$$(6)\ldots\ldots \pm 2y^{p:2}dy + 2y^2 dx - py^{p-1}x^{-1}dy = 0$$

Dunque sostituendo per $y^{p:2}$ nel primo membro, e per $y^{p-1}dy$ nel terzo il respettivo valore in x dall' equazione (4) si avrà l' equazione

$$\pm 2x^{p:(p-2)}dy + 2y^2 dx - \frac{2p}{p-2} x^{4:(p-2)}dx = 0$$

la quale divisa per $2x^{p:(p-2)}$ somministrerà l' equazione (5). Il che ecc.

VII.

Se dunque ha valor finito soddisfacente l' equazione (5) l' avrà pure la forma generale (7)

$$(7)\ldots\ldots nx^m dx + x^n y^2 dx \pm dy = 0$$

allorchè sia $m + n + 2 = 0$. Giacchè, posto $\frac{4-p}{p-2} = m$, $-\frac{p}{p-2} = n$, si avrà dalla prima relazione $p = \frac{4+2m}{m+1}$, e

dalla seconda $p=\frac{2n}{n+1}$. Dunque $\frac{4+2m}{m+1}=\frac{2n}{n+1}$, e però $m+n+2=0$. Se dunque ecc.

VIII.

Integrare generalmente l' equazione (5)

$$(5)\dots -\frac{p}{p-2}x^{(4-p):(p-2)}dx+x^{-p:(p-2)}y^2dx\pm dy=0$$

Si faccia $x=z^{-(p-2):2}$, sarà $dx=-\frac{p-2}{2}z^{-p:2}dz$, e l'equazione (5) si trasformerà nell' equazione (8)

$$(8)\dots\frac{p}{2}z^{-2}dz-\frac{p-2}{2}y^2dz\pm dy=0$$

A questa equazione pertanto soddisfa il valor particolare $y=\pm z^{-1}$ ricavato dal sostituire nella relazione $y=\pm x^{2:(p-2)}$ soddisfacente all' equazione (5) (§. VI.) il valore di x in z, in cui corrisponde il segno superiore o inferiore al segno ond' è affetto l' ultimo termine dell' equazione. Posto ciò, si faccia $y=-\frac{2u}{p-2}$, e l'equazione (8) si convertirà nell' equazione (9)

$$(9)\dots\frac{p}{4}(2-p)z^{-2}dz+u^2dz\pm du=0$$

che ha l' istessa forma dell' equazione (B) del §. III., e a cui soddisfa il valore particolare $u=\pm\frac{2z^{-1}}{2-p}$. Si ripigli pertanto l'integrale generale di quella (*) e vi si sostituisca per Δ il valore $\pm\frac{2z^{-1}}{2-p}$. Sarà l' equazione (10)

$$(10)\dots u=\mp\frac{2z^{-1}}{p-2}\pm\frac{(p+2)z^{4:(p-2)}}{B(p+2)\pm(p-2)z^{(p+2):(p-2)}}$$

l' integrale completo dell' equazione (9). E perciò rimettendo il valore di u in y, e il valore di z in x, sarà l'equazione (D)

(D)....

$$(D) \ldots y = \pm \frac{4x^{2:(p-2)}}{(p-2)^2} \mp \frac{2(p+2)x^{-8:(p-2)^2}}{B(p^2-4) \pm (p-2)^2 x^{-2(p+2):(p-2)^2}}$$

l' integrale completo dell' equazione (5). Il che ecc.

IX.

Basterà dunque porre nell' equazione (D) $\frac{2n}{n+1}$, oppure $\frac{4+2m}{m+1}$ in luogo di p, e si otterrà l' integrale generale dell' equazione del §. VII.

$$nx^{-n-2}dx + x^n y^2 dx \pm dy = 0$$

oppure dell' equazione

$$-(m+2)x^m dx + x^{-m-2}y^2 dx \pm dy = 0$$

X.

Pertanto l' equazione

$$(11) \ldots Ax^{-2}dx + By^2 dx \pm dy = 0$$

avrà integrale completo, qualunque quantità costante sieno A e B. Imperciocchè, fatto $y = u : B$, l' equazione prende la forma canonica

$$(12) \ldots ABx^{-2}dx + u^2 dx \pm du = 0$$

però col porre $1 \pm \sqrt{(1-4AB)}$ in luogo di p nell' equazione (10) si ottiene l' integrale dell' equazione (12), e in conseguenza quello pure dell' equazione (11) manifestamente.

XI.

Sia $M = -\frac{ax^2}{b}$; l' equazione fondamentale (2) del §. IV. prende la forma (13)

$$(13) \ldots x^{-1}dx\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)} + x^{-1}y^2 dx\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)} \pm dy = 0$$

di cui farà integrale foddisfacente $y = \pm\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)}$. Pofto ciò, inoltriamoci a trovare di quefta equazione l' integrale completo.

Poichè $\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)} = \frac{a}{\sqrt{(-ab)}}$, $\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)} = \frac{b}{\sqrt{(-ab)}}$, fi faccia $dz = \frac{x^{-1}dx}{\sqrt{(-ab)}}$. Avremo l' equazione

$$adz + by^2dz \pm dy = 0$$

la quale prende la forma canonica (B) del §. III. col porre $y = \frac{u}{b}$, nel qual cafo ella diventa l' equazione (14)

$$(14) \ldots . Adz + u^2dz \pm du = 0$$

effendo $A = ab$. A quefta foddisfa il valore $u = \pm\sqrt{-A}$, e però ripigliando l'equazione integrale (*) dal §. III., poichè $\Delta = \pm\sqrt{-A}$, farà la forma

$$u = \pm\sqrt{-A} + \frac{\mp 2e^{\mp 2z\sqrt{-A}}\sqrt{-A}}{\mp 2B\sqrt{-A} + e^{\mp 2z\sqrt{-A}}} = \frac{\mp\sqrt{-A} + 2ABe^{2z\sqrt{-A}}}{\mp 2Be^{2z\sqrt{-A}}\sqrt{-A} + 1}$$

l' integrale generale dell' equazione (14). Se dunque fi rimettano i valori di u, z in y, x, fi avrà l' integrale ricercato dell' equazione (13) di quefta forma

$$y = \frac{\mp\sqrt{-a:b} + 2aBx^2}{\mp 2Bx^2\sqrt{-ab} + 1}$$

Il che ecc.

XII.

Con quefto metodo troveremo pure l' integrale completo dell' equazione

$$-\frac{dx}{\sqrt{(x^2+c^2)}} + \frac{y^2dx}{\sqrt{(x^2+c^2)}} \pm dy = 0$$

procedente dalla fuppofizione di $M = x^2 + c^2$. Imperciocchè, pofto $\frac{dx}{\sqrt{(x^2+c^2)}} = dz$, avremo immediatamente

$$-dz+y^2dz\pm dy=0$$

cui soddisfa $y=1$, ed è della forma dimandata per l' integrazione (§. III.).

XIII.

L' equazione $Adz+u^2dz\pm du=0$, cioè $dz=\mp\frac{du}{A+u^2}$, cui abbiamo integrato al §. XI. è per sè importantissima, e merita bene, che si faccia riscontro del suo integrale col valore d' altronde noto che ne risulta di un arco circolare per la tangente, allorchè sia A quantità positiva. Essendo pertanto l' integrale trovato

$$u=\frac{\mp\sqrt{-A}+2ABe^{\pm 2z\sqrt{-A}}}{\mp 2Be^{\pm 2z\sqrt{-A}}\sqrt{-A}+1}$$

Sarà facile lo svolgere anche il valore dell' arco circolare z in funzione finita della tangente u. In fatti si troverà essere, moltiplicando sotto e sopra per $\sqrt{-1}$,

$$e^{\pm 2z\sqrt{-A}}=\frac{\mp\sqrt{-A}-u}{\mp 2uB\sqrt{-A}-2AB}=\frac{\pm\sqrt{A}-u\sqrt{-1}}{\pm 2Bu\sqrt{A}-2AB\sqrt{-1}}$$

e però $z=\frac{1}{\pm 2\sqrt{A}\sqrt{-1}}\,l.\,\frac{\pm\sqrt{A}-u\sqrt{-1}}{\pm 2Bu\sqrt{A}-2AB\sqrt{-1}}$.

Ma nel caso di $z=0$ è pure $u=0$. Dunque, posto nell' equazione $z=0$, $u=0$, si trova essere la costante

$B=\frac{\pm\sqrt{-1}}{2\sqrt{A}}$. Sostituendo pertanto questo valore per B, sarà

$$\text{Arc.}\,z=\pm\frac{1}{2\sqrt{A}\sqrt{-1}}\,l.\,\frac{\pm\sqrt{A}-\sqrt{-1}\ \text{tang.}\,u}{\pm\sqrt{A}+\sqrt{-1}\ \text{tang.}\,u}$$

Se dunque sia $A=1$, ed abbia luogo il segno negativo, sarà

$$\text{Arc. } z = -\frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l.\, \frac{-1-\sqrt{-1}\ \text{tang.}\, u}{-1+\sqrt{-1}\ \text{tang.}\, u}, \text{ cioè}$$

$$\text{Arc. } z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l.\, \frac{1+\sqrt{-1}\ \text{tang.}\, u}{1-\sqrt{-1}\ \text{tang.}\, u}$$

il che precisamente somministrando il valore dell'arco circolare per la tangente trovato col metodo de' seni e coseni dal Sig. *Eulero* nel Tomo I. dell' Introduzione all' Analisi degl' Infiniti §. 140, comprova l' esattezza dell' integrazione fondamentale al nostro §. III.

XIV.

Ma lasciando di cercare l' integrazione d' altre formule col dare diversi valori alla funzione indeterminata M, mi so a richiamare a integrazione la formula *Riccaziana* in tutti quegl' infiniti casi, pe' quali l' inventore Co. *Jacopo Riccati* giunse a ottenere la separazione delle indeterminate, cioè a prepararla opportunamente per la costruzione col mezzo delle curve, il che non va confuso coll' analitica e vera integrazione di cui si tratta in questo luogo. Ella è di questa forma (R)

$$(R) \ldots\, ax^m dx + bx^n y^2 dx - dy = 0$$

Pertanto facendo le stesse sostituzioni Riccaziane (μ), (ω)

$$(\mu) \ldots\, y = -\frac{n+1}{b}\, x^{-n-1} + x^{-2n-2} t$$

$$(\omega) \ldots\, y = x^{2m+2} : \left(u + \frac{m+1}{a}\, x^{m+1}\right)$$

otterremo le due equazioni (S), (T)

$$(S) \ldots\, ax^{m+2n+2} dx + bx^{-n-2} t^2 dx - dt = 0$$

$$(T) \ldots\, bx^{2m+n+2} dx + ax^{-m-2} u^2 dx - du = 0$$

Supponendo ora, che possa integrarsi compiutamente l' equazione (R), se sia $m = n$, potrà del pari integrarsi l' equazione (S), se sia $m + 2n + 2 = -n - 2$, e l' equazione

(T), se sia $2m + n + 2 = -m - 2$, cioè se sia $m = -3n - 4$, $m = \frac{-n-4}{3}$. Nel primo caso ciascuno degli esponenti di x diventa $-n-2$ nell' equazione (S), e nel secondo ciascheduno diventa $\frac{n-2}{3}$ nell' equazione (T), e però l' una e l' altra s' integra, come s' integra (R) se sia $m = n$. Dunque l' equazione (R) può integrarsi tanto se sia $m = -3n - 4$, quanto se sia $m = \frac{-n-4}{3}$, essendo le equazioni (S), (T), integrabili in questi casi, derivate dall' equazione (R) con le sostituzioni (μ), (ω). Si apponga P in luogo di $m + 2n + 2$, Q in luogo di $-n-2$ agli esponenti di x nell' equazione (S), ed L, K in luogo degli esponenti $2m + n + 2$, $-m-2$ nell' equazione (T), e si ragioni come qui innanzi dicendo, se è integrabile l' equazione (R) quando sia $m = \frac{-n-4}{3}$, il sarà pure l' equazione (S), quando sia $P = \frac{-Q-4}{3}$, e l' equazione (T) qualor sia $L = \frac{-K-4}{3}$. Avremo pertanto due nuovi valori per m, cioè $m = \frac{-5n-8}{3}$, $m = \frac{-3n-8}{5}$, posto il primo de' quali, l' uno e l' altro degli esponenti di x nell' equazione (S) diventa $\frac{n-2}{3}$, e posto il secondo, ciascuno degli esponenti di x diventa $\frac{m-2}{3}$ nell' equazione (T), oppure $\frac{-5n-10}{9}$. E però è ciascheduna integrabile, come s' integra l' equazione (R), quando sia $m = n$. Procedendo con questo ragionamento, e tenendo conto successivamente de' valori di m in n risultanti dal progresso di questi paragoni, si perverrà a conchiudere che l' equazione (R) può integrarsi com-

piutamente se tra m ed n abbia luogo questa relazione

$$m(2g\mp 1)+n(2g\pm 1)+4g=0$$

in cui g è qualunque numero intero affermativo, supposto sempre, che sappia integrarsi un' equazione della forma (R) in cui gli esponenti di x sieno tra di sè uguali. Dipende dunque lo scioglimento del nodo dall'integrare compiutamente un' equazione come (R) in supposizione di $m=n$, al che dietro alle cose trovate qui innanzi è facilissimo il pervenire. Imperciocchè si faccia $x^m dx=dz$, qualunque cosa sia m, e l' equazione (R) prenderà questa forma

$$adz+by^2dz-dy=0$$

Posto pertanto $y=u:b$, l' equazione da integrarsi della forma canonica sarà quella del §. XI.

$$(14)\ldots\ldots Adz+u^2dz-du=0$$

essendo $A=ab$, la quale ha per integrale completo

$$u=\frac{\sqrt{-A}-2ABe^{2z\sqrt{-A}}}{2Be^{2z\sqrt{-A}}\sqrt{-A}-1}$$

oppure (§. XIII.)

$$z=\frac{1}{2\sqrt{A}\sqrt{-1}}\,l.\,\frac{\sqrt{A}-u\sqrt{-1}}{2Bu\sqrt{A}-2AB\sqrt{-1}}$$

E poichè $u:b=y$, $x^m dx=dz$, si restituisca in queste equazioni by per u, $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ per z, e ciascheduna delle equazioni (V), (V')

$$(V)\ldots\ldots y=\frac{\sqrt{-a:b}-2aBe^{\frac{2x^{m+1}\sqrt{-ab}}{m+1}}}{2Be^{\frac{2x^{m+1}\sqrt{-ab}}{m+1}}\sqrt{-ab}-1}$$

$$(V')\ldots\ldots x^{m+1}=\frac{m+1}{2\sqrt{-ab}}\,l.\,\frac{\sqrt{a}-y\sqrt{b}\sqrt{-1}}{2Bby\sqrt{a}-2aB\sqrt{b}\sqrt{-1}}$$

Sarà l' integrale completo dell' equazione (R) ſe ſia $m=n$, eſſendo B la coſtante arbitraria.

XV.

E' dunque integrabile generalmente la formula (X)

$$(X) \ldots\ldots ax^{(-n(2g\pm1)-4g):(2g\mp1)}dx+bx^ny^2dx-dy=0$$

in cui dimoſtrò ſeparabili le indeterminate il ſoprallodato Geometra, ſenza il ſoccorſo di sì fatta ſeparazione, e co' puri e diretti artificj dell' Algebra. Prendiamo, a fine di darne qualche eſempio, a ſvolgere i due primi caſi che riſultano dal porre $g=1$. Il metodo è lo ſteſſo per tutti gli altri.

I. Eſ.

Sia da integrarſi l' equazione (a)

$$(a) \ldots\ldots ax^{-3n-4}dx+bx^ny^2dx-dy=0$$

S' intenda fatta la ſoſtituzione (μ) del §. XIV., cioè nell' equazione (S) fatto $m=-3n-4$. L' equazione (S) ſi traſforma nell' equazione (b)

$$(b) \ldots\ldots ax^{-n-2}dx+bx^{-n-2}t^2dx-dt=0$$

della forma (R) (§. preced.) in ſuppoſizione di $m=n$. Nell' integrale pertanto (V') dell' equazione (R) ſi ponga $-n-2$ per m, t per y, e ſarà

$$x^{-n-1}=\frac{-n-1}{2\sqrt{-ab}}\,l.\,\frac{\sqrt{a}-t\sqrt{b}\sqrt{-1}}{2Bbt\sqrt{a}-2aB\sqrt{b}\sqrt{-1}}$$

l' integrale completo dell' equazione (b). Ma dall' equazione (μ), $t=\left(y+\frac{n+1}{b}x^{-n-1}\right):x^{-2n-2}$. Per conſeguenza ſoſtituendo in queſto integrale sì fatto valore per t, ſarà

$$x^{-n-1}=\frac{-n-1}{2\sqrt{-ab}}\,l.\,\frac{\sqrt{a}-\left(y+\frac{n+1}{b}x^{-n-1}\right)\left(\sqrt{b}\sqrt{-1}\right):x^{-2n-2}}{2Bb\left(y+\frac{n+1}{b}x^{-n-1}\right)\sqrt{a}:x^{-2n-2}-2aB\sqrt{b}\sqrt{-1}}$$

l' integrale generale dell' equazione (a). Il che ecc.

II. Es.

Sia da integrarsi l' equazione (c)

$$(c)\ldots ax^{(-n-4):3}dx + bx^n y^2 dx - dy = 0$$

Si ponga $m = \frac{-n-4}{3}$ nell' equazione (T) (§. XIV.). Diverrà ella della forma (d)

$$(d)\ldots bx^{(n-2):3}dx + ax^{(n-2):3}u^2 dx - du = 0$$

ch'è la forma (R) in supposizione di $m = n$, permutati soltanto i coefficienti. Si ripigli pertanto l' integrale (V') di (R), e vi si ponga $\frac{n-2}{3}$ per m, u per y, a per b, b per a. Sarà

$$x^{(n+1):3} = \frac{n+1}{6\sqrt{-ab}}\, l. \frac{\sqrt{b} - u\sqrt{a}\sqrt{-1}}{2aBu\sqrt{b} - 2bB\sqrt{a}\sqrt{-1}}$$

l' integrale completo dell' equazione (d). Ma per l' equazione (ω) è $u = x^{2m+2}y^{-1} - \frac{m+1}{2}x^{m+1} = x^{(-2n-2):3}y^{-1} + \frac{n+1}{6}x^{(-n-1):3}$, posto per m il suo valore in n. Dunque surrogato in quest' integrale il valore di u, sarà

$$x^{(n+1):3} = \frac{n+1}{6\sqrt{-ab}}\, l. \frac{\sqrt{b} - \left(x^{(-2n-2):3}y^{-1} + \frac{n+1}{6}x^{(-n-1):3}\right)\sqrt{-a}}{2aB\left(x^{(-2n-2):3}y^{-1} + \frac{n+1}{6}x^{(-n-1):3}\right)\sqrt{b} - 2bB\sqrt{-a}}$$

l' integrale completo dell' equazione (c). Il che ecc.

XVI.

Due illustri geometri *Daniello* e *Nicola Bernoulli* presero per mano in quel torno di tempo la formula *Riccaziana*, e si volsero a rintracciare i casi di separazione delle variabili nell' equazione (Z)

(Z)....

$(Z) \ldots\ldots ax^m + y^2 dx - dy = 0$

Con molta eleganza pertanto dimostrarono entrambi, che in questa equazione sono separabili le indeterminate allorchè sia l' esponente $m = \frac{-4g}{2g \pm 1}$. Ma non è stata neppur questa forma integrata completamente, ch' io sappia, per altro mezzo fuorchè per opera delle serie infinite dal Sig. *Eulero* nel T. II. del suo Calcolo Integrale alla pag. 182. Ora col fare $n = 0$ nella formula (X) del §. XV. riceve ella integrazione non solamente per una via diretta e semplice, ma eziandio per un mezzo puramente algebraico.

XVII.

Non si ristrigne per altro a questo solo il frutto, che possiamo ricavare dal Teorema del §. IV., avendovi una forma da esso dipendente, generale e fecondissima, cui mi propongo di additare, non del tutto immeritevole di attenzione.

XVIII.

Se ha luogo l' equazione (1)

$(1) \ldots\ldots y = \frac{dM}{Mdx}$

si verifica pure l' equazione differenziale (2)

$(2) \ldots\ldots - \frac{ddM}{Mdx} + y^2 dx + dy = 0$

qualunque funzione di x, o di y, o d'entrambe le variabili promiscuamente sia il simbolo M.

Imperciocchè, essendo $y = \frac{dM}{Mdx}$, sarà $yMdx = dM$, e quadrando $y^2 M^2 dx^2 = dM^2$. Dunque differenziando

$$2yMdx(ydMdx + dyMdx) - 2dMddM = 0$$

cioè

$$Mdx(y^2 dMdx + ydyMdx) - dMddM = 0$$

e però

$$y^2dMdx + ydyMdx - \frac{dMddM}{Mdx} = 0$$

Ma $yMdx = dM$. Sostituendo pertanto questo valore nel secondo termine, e dividendo l' equazione per dM, si verificherà l' equazione (2). Il che ecc.

XIX.

L' equazione (2) essendo della forma canonica (B) (§. III.), col valore finito (1) in pronto, che le soddisfa, e potendo in oltre essere M qualunque funzione ad arbitrio, si comprende agevolmente essere senza limiti il numero delle equazioni trascendenti della forma (B)

$$(B) \ldots . dy + y^2dx + Qdx = 0$$

le quali a completa integrazione si conducono col metodo esposto nel §. III., ed altrettante essere le equazioni differenzio-differenziali della forma (A)

$$(A) \ldots . ddt + Qtdx^2 = 0$$

che possono generalmente integrarsi, dato l'integrale (§. II.) della forma (B). Diamone alcuni esempli.

I. Es.

Sia da integrarsi l' equazione (3)

$$(3) \ldots . dy + y^2dx - dx\left(m(m-1)x^{m-2} + m^2x^{2m-2}\right) = 0$$

Si faccia nell' equazione (2) del §. XVIII. $M = e^{x^m}$; sarà

$dM = mx^{m-1}dxe^{x^m}$, $ddM = m(m-1)x^{m-2}dx^2e^{x^m}$

$+ m^2x^{2m-2}dx^2e^{x^m}$, e si verificherà l' equazione (3). Fatta poi una simile sostituzione nell' equazione (1) del medesimo §., avrà luogo l' equazione $y = mx^{m-1}$, il qual valore rappresenta in conseguenza il valore soddisfacente Δ dell' equazione canonica (B). Se dunque nell' equazione (*) dell' §. III. si sostituisca questo valore per Δ, sarà

$$y = mx^{m-1} + e^{-2x^m} : \left(B + \int dx e^{-2x^m} \right)$$

l' integrale completo dell' equazione (3). Il che ecc.

II. Es.

Sia da integrarsi l' equazione (5)

$$(5) \ldots . dy + y^2 dx + (x^{-2} dx) : l.x = 0$$

Si ponga $M = l.x$, e fatte per M, dM, ddM le convenevoli sostituzioni nelle equazioni (1), (2) del §. XVIII., si verificherà l'equazione (5), di cui sarà un valore soddisfacente $y = x^{-1} : l.x$. Surrogando pertanto questo valore per Δ nell' equazione (*), si troverà essere

$$y = \frac{x^{-1}}{l.x} + e^{-2\int x^{-1} dx : l.x} : \left(B + \int \left(dx e^{-2\int x^{-1} dx : l.x} \right) \right)$$

l' integrale completo dell' equazione (5). Il che ecc.

III. Es.

Sia l' equazione differenziale (6)

$$(6) \ldots . dy + y^2 dx - \frac{dx}{1 + x^2} = 0$$

di cui si cerca l' integrale.

Si faccia $M = \sqrt{(1 + x^2)}$. Fatte le sostituzioni per M, e suoi differenziali nelle equazioni (1), (2) del §. XVIII., si verificherà l' equazione (6), ed avrà luogo il valor particolare $y = x : \sqrt{(1 + x^2)}$. Si sostituisca pertanto $x : \sqrt{(1 + x^2)}$ per Δ nell' equazione fondamentale (*), e si troverà, che l' equazione

$$y = x : \sqrt{(1 + x^2)} + e^{-2\sqrt{(1+x^2)}} : \left(B + \int dx e^{-2\sqrt{(2+x^2)}} \right)$$

è l' integrale completo dell' equazione (6) Il che ecc.

XX.

E per avere gl' integrali immediatamente ne' casi particolari, integriamo generalmente l' equazione (2)

$$(2)\ldots - \frac{ddM}{Mdx} + y^2dx + dy = 0$$

Essendo pertanto $y = \frac{dM}{Mdx}$ il valor particolare che le soddisfa, si sostituisca nell' integrale canonico (*) questa espressione per Δ, e sarà

$$y = \frac{dM}{Mdx} - \frac{M^2}{B - \int \overline{M^2dx}}$$

l' integrale completo dell' equazione (2), di qualunque forma ad arbitrio sia M.

XXI.

Ed ecco fatta strada alla determinazione di un' opportuna equazione di relazione tra le funzioni indeterminate P, $\mathcal{Q}$, perchè abbia luogo l' integrazione dell' equazione generale

$$\mathcal{Q}dx + Py^2dx + dy = 0$$

avendola verificata qui innanzi soltanto in casi particolari. Porremo in chiaro nel seguente Teorema il trovato, che non ha bisogno nè di schiaramenti, nè di esemplificazioni, apparendo tosto nell' esposizione di lui il campo che s' apre per lo scioglimento di sì fatta equazione. Il che basti nel presente argomento.

XXII.

Se ha luogo la relazione finita (ξ)

$$(\xi)\ldots P\mathcal{Q} + \frac{ddM}{Mdx^2} = 0$$

qualunque cosa sia M, l' equazione (ω)

$$(\omega)\ldots \mathcal{Q}dx + Py^2dx + dy = 0$$

è generalmente integrabile.

Imperciocchè, sostituendo nell' equazione (ω) il valore di $\mathcal{Q}dx$ tratto dalla relazione (ξ), risulta l' equazione (π)

$$(\pi)\ldots: -\frac{ddM}{MPdx}+Py^2dx+dy=0$$

Se dunque si faccia in (π) $Pdx=dz$, si avrà l' equazione (μ)

$$(\mu)\ldots: -\frac{ddM}{Mdz}+y^2dz+dy=0$$

E l' equazione (μ) ha per integrale completo (§. XX.)

$$y=\frac{dM}{Mdz}-\frac{M^2}{B-\int M^2dz}$$

Sostituendo pertanto in questo integrale Pdx in luogo di dz, sarà

$$y=\frac{dM}{MPdx}-\frac{M^2}{B-\int M^2Pdx}, \text{ oppure}$$

$$y=-\frac{dM\mathcal{Q}dx}{MddM}-\frac{M^2}{B+\int MddM:\mathcal{Q}dx}$$

l' integrale completo in M, P, oppure in M, $\mathcal{Q}$ dell' equazione (ω), qualunque funzione di x sieno M, P nel primo caso, ed M, $\mathcal{Q}$ nel secondo. Il che ecc.

DELLA FIGURA DEL GORGO

Che la Natura forma in un vaſo cilindrico ripieno d' acqua, nel centro del cui fondo ſia aperto un foro circolare.

Del Sig. Co. GIORDANO RICCATI.

I. NEll' Annotazione allo Schediaſma XXXVI. del Co. *Jacopo Riccati* mio Padre contenuto nel Tomo III. delle ſue Opere ho determinato la figura del gorgo $SMEFNT$ (*Fig. I.*), che ſi genera girando intorno all' aſſe ZG la curva SME, la cui equazione $\frac{y\sqrt{g}}{\sqrt{x}}$, nella quale le ſezioni circolari $MN = y$, $EF = c$, $ST = b$, ed inoltre le linee $IG = g$, $IZ = \frac{gc^2}{b^2}$, $IO = x$. Ho dedotta queſta figura dalla ſuppoſizione, che la velocità dell' acqua nel gorgo ſi acceleri colla legge dei gravi cadenti per la linea del piombo. Chiamata u la velocità, colla quale l' acqua ſgorga dal foro, ho dimoſtrato, che la forza viva dell' acqua contenuta nel gorgo s' eguaglia a $\left(\frac{2}{3}gc + \frac{\frac{1}{3}gc^4}{b^3}\right) \cdot \frac{u^2}{2}$.

II. Sia $HG = a$ l' altezza del vaſo, $HQ = s$ lo ſpazio minimo, per cui è diſceſa l' acqua, e per conſeguenza l' acqua uſcita dal vaſo ſia bs, la quale ſi è conformata in un cilindro cz, la cui baſe $EF = c$, e la lunghezza $z = \frac{bs}{c}$. Se nella citata Annotazione, che ſuppone minimo il foro $EF = c$, non aveſſi traſcurato alcune quantità relativamente nulle, ed aveſſi ridotto le formole alle miſure conoſciute, ſarei pervenuto alle due ſeguenti

$$\frac{\sqrt{(4gabs)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2 - gc^2 - sc^2}{b} + bs + \frac{2}{3}gc + \frac{\frac{1}{3}gc^4}{b^3}\right)}} = u$$

$$\frac{\sqrt{(4\varepsilon acz)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2-gc^2}{b}-\frac{zc^3}{b^2}+cz+\frac{2}{3}gc+\frac{\frac{1}{3}gc^4}{b^3}\right)}}=u,$$

nelle quali ε significa lo spazio scorso in un minuto secondo da un grave, che liberamente discende. Dalla sovrascritta seconda formola si comprende, che se l' altezza $IG=g$ del gorgo nell' ipotesi del foro c minimo non è infinitamente minore di z, l' acqua ch' esce dal foro non giungerà mai ad acquistare la velocità $\sqrt{(4\varepsilon a)}$ propria di un grave disceso dall' altezza $HG=a$. L' esperienza c' insegna, che l' altezza del gorgo è finita, ed oltre a ciò se fosse infinitesima, il moto dell' acqua incontrerebbe una gran resistenza pel fregamento del fondo del vaso.

III. Bisogna dunque assegnare al gorgo una figura; da cui s' inferisca nell' ipotesi del foro minimo, che a z infinitamente picciola corrisponda $u=\sqrt{(4\varepsilon a)}$, quantunque g sia finita. Tagliata $Oo=dx$, e chiamata W la velocità confaccente alla sezione $MN=y$, ne risulta la forza viva dello strato d' acqua ydx uguale a $ydx.\frac{W^2}{2}$. Ma stando le velocità u, W in ragione inversa delle sezioni $EF=c$, $MN=y$, ci si presenta l' analogia $y:c::u:W$, da cui si deduce il valore di $W=\frac{cu}{y}$, che sostituito mi dà la predetta forza viva $=\frac{c^2dx}{y}.\frac{u^2}{2}$, e conseguentemente la forza viva della porzione $SMNT$ dell' acqua contenuta nel gorgo $=\frac{c^2u^2}{2}\int\frac{dx}{y}$. Noto che la velocità u si dee considerare costante, cercandosi la forza viva dell' acqua nel gorgo, mentre alla sezione $EF=c$ compete la velocità u. Avremo pertanto generalmente le due formole

$$\frac{\sqrt{(4\varepsilon abs)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2-gc^2-sc^2}{b}+bs+c^2\int\frac{dx}{y}\right)}}=u$$

$$\frac{\sqrt{(4\varepsilon acz)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2-gc^2}{b}-\frac{zc^3}{b^2}+cz+c^2\int\frac{dx}{y}\right)}}=u$$

Se ſuppoſto minimo il foro c, ſia per eſempio $z=c^{1:2}$, dovranno in riguardo a $cz=c^{3:2}$ traſcurarſi i termini $\frac{ac^2-gc^2}{b}$ $-\frac{zc^3}{b^2}$, e quando anche $c^2\int\frac{dx}{y}$ ſia infinitamente minore di $cz=c^{3:2}$, ne proverrà $u=\sqrt{(4\varepsilon a)}$.

IV. Afferma l' Ab. *Vincenzo Riccati* mio fratello nella Lettera XIX. intorno ai *Principj della Meccanica*, che per mancanza di dati non ci è permeſſo di determinare la figura del gorgo. Or ecco il dato da me ſcoperto, col mezzo del quale ſtabiliſco la mentovata figura. La gravità fa ogni sforzo, acciocchè l' acqua cz, che ſcaturiſce dal foro, acquiſti la maſſima velocità u. S' otterrà ciò, quando eſſendo date l' altre grandezze, ſia minima $\int\frac{dx}{y}$. La natura dunque preſceglierà quella figura di gorgo, riſpettivamente a cui ſia minima $\int\frac{dx}{y}$, e per conſeguenza ancora tale $\frac{dx}{y}$, formandoſi da infiniti elementi minimi un minimo tutto.

V. Fa di meſtieri adunque il ricorrere al metodo delle *Variazioni*. Sia *SME* (*Fig.* 2.) la curva, che girandoſi intorno all' aſſe *ZG* generi la cercata figura del gorgo *SMEFNT*, e ſieno come ſopra le ſezioni circolari $ST=b$, $EF=c$, $MN=y$, e le linee $ZG=g$, $ZO=x$, $Oo=dx$. Le variazioni della curva *SME* vengano determinate dalla curva *SiE*, e la variazione della ſezione $MN=y$ ſi eguaglierà alla zona circolare deſcritta coi raggi *OM*, *Oi*, la cui larghezza *Mi*. Dinotando le variazioni col ſegno δ, ſarà la predetta variazione $=\delta y$. Segnata di più $Oo=dx$, da $oK=\delta dx$ venga eſpreſſa la ſua variazione. La proprietà di minimo, che compete all' elemento $\frac{dx}{y}$, eſige che ſia nul-

la

la la sua variazione, onde s' abbia $\frac{dx}{y} = \frac{dx + \delta dx}{y + \delta y}$. Ne segue per conseguenza, che debba avverarsi l' analogia $dx : \delta dx :: y : \delta y$, e che perciò ne risulti $y \delta dx = dx \delta y$. Ma si sa essere $\delta dx = d \delta x$; dunque $y d \delta x = dx \delta y$. Di questa formola ne faremo uso in progresso al numero VII.

VI. Ripigliata per mano la formola $\frac{c^2 dx}{y}$, ne prendo le differenze espresse per δ indice delle variazioni, e mi si presenta $\frac{c^2 \delta dx}{y} - \frac{c^2 dx \delta y}{y^2} = 0$, e conseguentemente ancora $\int \frac{c^2 \delta dx}{y} - \int \frac{c^2 dx \delta y}{y^2} = 0$, ovvero $\int \frac{c^2 d \delta x}{y} - \int \frac{c^2 dx \delta y}{y^2} = 0$, ponendo in luogo di δdx la grandezza eguale $d \delta x$. Pel metodo delle integrazioni per parti si trova $\int \frac{c^2 d \delta x}{y} = \frac{c^2 \delta x}{y} + \int \frac{c^2 dy \delta x}{y^2}$, e perciò l' equazione precedente si cangia così

$$(A) \int \left(\frac{c^2 dy}{y^2} . \delta x \right)$$

$$- \int \left(\frac{c^2 dx}{y} . \delta y \right)$$

$$+ \frac{c^2}{y} . \delta x = 0$$

Da questa formola si caverà primieramente l' equazione indefinita

$$(B) \frac{c^2 dy}{y^2} . \delta x$$

$$- \frac{c^2 dx}{y^2} . \delta y = 0$$

ed in oltre l' equazione determinata

$$(C) \frac{c^2}{y} . \delta x = 0.$$

VII. Per liberarci frattanto nell' equazioni trovate dalle

differenze indeterminate δx, δy, esamino se per la natura del Problema v' abbia fra loro qualche relazione. E primieramente per la formola (B) trovo $\frac{c^2 dy\delta x}{y^2} = \frac{c^2 dx\delta y}{y^2}$, e dividendo per $\frac{c^2}{y^2}$, $dy\delta x = dx\delta y$. Ma al fine del numero V. ho scoperto $yd\delta x = dx\delta y$; dunque $dy\delta x = yd\delta x$, e perciò $\frac{dy}{y} = \frac{d\delta x}{\delta x}$, ed integrando $\log. y = \log. \frac{\delta x}{dx}$, prendendo dx in qualità di costante. Quindi $y = \frac{\delta x}{dx}$, e finalmente $\delta x = ydx$. Si sostituisca questo valore nella formola $dy\delta x = dx\delta y$, e si troverà $ydydx = dx\delta y$, e poscia $\delta y = ydy$. Per la qual cosa sono resi noti i valori delle due differenze indeterminate.

$$\delta x = ydx$$

$$\delta y = ydy$$

Scorgeremo a chiaro lume essere stati rettamente determinati i valori di δx, δy, se differenziando la formola $\delta x = ydx$, considerata costante dx, come s' è fatto nella predetta determinazione, onde s' abbia $d\delta x = dxdy$, si sostituiscano i valori di $d\delta x$, e di δy nell' equazione $yd\delta x = dx\delta y$ scoperta al fine del numero V. Effettuata la sostituzione, troveremo giustamente $ydydx = ydydx$.

VIII. Surrogati i valori di δx, δy nella formola (A), ci si affaccierà

$$(A') \int \left(\frac{c^2 dy}{y^2} . ydx \right)$$

$$- \int \left(\frac{c^2 dx}{y^2} . ydy \right)$$

$$+ \frac{c^2}{y} . ydx = 0 .$$

Si faccia la riflessione, che gli elementi delle due sommatorie sono eguali a due quantità indentiche affette da segni contrarj, e che perciò l' aggregato delle due sommatorie es-

ser dee $=0$. E poichè la somma dei tre termini della formola (A') esser dee uguale a nulla, addiviene che sia il terzo termine $c^2dx=0$. Il perchè sarà nullo l' elemento della seconda sommatoria $\frac{c^2dx}{y^2}.ydy=0.\frac{dy}{y}$, e per conseguenza anche quello della prima.

Avverto in oltre, che dalla formola determinata (C) $\frac{c^2}{y}.\delta x=c^2dx=0$ si raccoglie $x=\frac{K}{c^2}$. Ora x ha due valori costanti, cioè a dire $x=0$ nel punto Z, $x=g$ nel punto G; e quindi si avrà $K=\begin{cases}c^2.0\\c^2.g\end{cases}$. Ai due valori di $x=\begin{cases}0\\g\end{cases}$ corrispondono altrettanti valori di $y=\begin{cases}b=ST\\c=EF\end{cases}$.

IX. Stabilisce il ch. Sig. *Luigi de la Grange* nel Tomo II. dell' Accademia di Turino pag. 176, che se δx, δy sono assolutamente indipendenti l' una dall' altra, si faranno i coefficienti di ciascuna d' esse uguali a zero. Benchè non si avveri questa indipendenza nel nostro caso, ci è nulladimeno permesso di supporre nella formola (B), che sieno $\frac{c^2dx}{y^2}=0$, $\frac{c^2dy}{y^2}=0$, ma non già congiuntamente, onde quando $\frac{c^2dx}{y^2}=0$, sia parimente $\frac{c^2dy}{y^2}=0$. Vediamo cosa succederebbe ammettendo, che $\frac{c^2dx}{y^2}$, $\frac{c^2dy}{y^2}$ si riferiscano in proporzione finita. Se $\frac{c^2dx}{y^2}=0$, sarà parimente $\frac{Fc^2dx}{y^2}=0$, e perciò secondo la premessa supposizione $\frac{c^2dy}{y^2}=\frac{Fc^2dx}{y^2}$, e dividendo per $\frac{c^2}{y^2}$, $dy=Fdx$, ed integrando $y+H=Fx$. Si rifletta, che quando $x=ZG=g$, è $y=EF=c$. Il perchè $c+H=Fg$, e quindi $H=Fg-c$. Fatto uso di questo valore, si scoprirà $y+Fg-c=Fx$. E poichè quando $x=0$, esser dee $y=ST=b$, ne risulta $b+Fg-c=0$, e conse-

guentemente $\frac{b-c}{g} = -F$. Troveremo dunque finalmente $y - \left(\frac{b-c}{g}\right).g - c = -\left(\frac{b-c}{g}\right).x$, ossia $\left(\frac{b-c}{g}\right).(g-x) + c = y$, la qual formola si riduce a quest' altra $\left(\frac{b-c}{g}\right).\left(\frac{bg}{b-c} - x\right) = y$. Posti i raggi $SZ = r$, $EG = q$, $MO = p$, onde sieno $b = nr^2$, $c = nq^2$, $y = np^2$, ci si presenterà $\left(\frac{r^2-q^2}{g}\right).\left(\frac{gr^2}{r^2-q^2} - x\right) = p^2$, equazione alla parabola conica, il cui parametro $= \frac{r^2-q^2}{g}$, che girata intorno all' asse ZG genera il gorgo.

X. Ripigliata la formola $\left(\frac{b-c}{g}\right).\left(\frac{bg}{b-c} - x\right) = y$, sostituisco nella formola $\frac{c^2u^2}{2}.\int\frac{dx}{y}$ dinotante la forza viva dell'acqua contenuta nella porzione di gorgo $SMNT$ in cambio di y lo scoperto valore, e trovo

$$\frac{gc^2}{b-c}.\frac{u^2}{2}\int\frac{dx}{\frac{bg}{b-c} - x} = \frac{gc^2}{b-c}.\frac{u^2}{2}.\log.\frac{K}{\frac{bg}{b-c} - x}$$

: ma quando $x = ZO = 0$, $\log.\frac{K}{\frac{bg}{b-c} - x} = 0$; perchè in tal caso è nulla la forza viva dello strato nullo $SMNT$; dunque supponendosi $u = 0$, dovrà essere $K = \frac{bg}{b-c}$, e conseguentemente

$$\frac{gc^2}{b-c}.\frac{u^2}{2}.\log.\left(\frac{\frac{bg}{b-c}}{\frac{bg}{b-c} - x}\right)$$

sarà la forza viva dell'acqua contenuta nella porzione di gorgo $SMNT$. Ponendo $x = g = ZG$,

avremo la forza viva del gorgo intero

$$SMEFNT = \frac{gc^2}{b-c} \cdot \frac{u^2}{2} \cdot \log.\left(\frac{\frac{bg}{b-c}}{\frac{bg}{b-c} - g}\right) = \frac{gc^2}{b-c} \cdot \frac{u^2}{2} \cdot \log.\frac{b}{c},$$ la

qual dovrebbe esser minima nella supposizione, che sieno date le quantità b, c, g, u.

XI. Nelle due formole generali, che si leggono al numero III., si sostituisca in vece di $c^2 \int \frac{dx}{y}$ il rinvenuto valore $\frac{gc^2}{b-c} \cdot \log.\left(\frac{b}{c}\right)$, e prenderanno esse il seguente aspetto

$$\frac{\sqrt{(4\epsilon abs)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2 - gc^2 - sc^2}{b} + bs + \frac{gc^2}{b-c} \cdot \log.\left(\frac{b}{c}\right)\right)}} = u$$

$$\frac{\sqrt{(4\epsilon acz)}}{\sqrt{\left(\frac{ac^2 - gc^2}{b} - \frac{zc^3}{b^2} + cz + \frac{gc^2}{b-c} \cdot \log.\left(\frac{b}{c}\right)\right)}} = u$$

Ho già osservato al numero III. che supposto minimo il foro $EF = c$, e fatto $z = c^{1:2}$, svaniscono i termini $\frac{ac^2 - gc^2}{b} - \frac{zc^3}{b^2}$, ed ora fa d' uopo provare, ch' è parimente trascurabile il termine $\frac{gc^2}{b-c} \cdot \log.\left(\frac{b}{c}\right)$. Per la natura della logistica il logaritmo d' un numero infinito $= \frac{b}{c}$ è immensamente minore d' esso numero. Dimostro presentemente che $\log.\left(\frac{b}{c}\right)$ è più picciolo infinitamente di $\frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$. Si prendano fra 1, e $\frac{b}{c}$ tre medie continue proporzionali $\frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$, $\frac{b^{1:2}}{c^{1:2}}$,

$\frac{b^{1:4}}{c^{3:4}}$, e se fosse $\log.\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$, ai detti numeri dovrebbero adattarsi i logaritmi $\frac{1}{4}.\frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$, $\frac{1}{2}.\frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$, $\frac{3}{4}.\frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$, e perciò il numero infinito $\frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$, ed il logaritmo corrispondente $\frac{1}{4}.\frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$ spetterebbero ad un infinito dello stesso grado, il che si oppone alla natura della logaritmica. Ma quantunque fosse $\log.\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{b^{1:4}}{c^{1:4}}$, e $\frac{gc^2}{b-c}.\log.\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{gc^2}{b-c}.\frac{b^{1:4}}{c^{1:4}} = \frac{gb^{1:4}}{b-c}.c^{7:4}$, questo termine merita di esser negletto a confronto di $cz = c^{3:2}$; dunque tanto più dovrà trasandarsi la quantità immensamente minore $\frac{gc^2}{b-c}.\log.\left(\frac{b}{c}\right)$. Per la qual cosa quando l' acqua uscita dal foro avrà scorso uno spazio $z = c^{1:2}$ proporzionale al diametro del foro stesso, sarà essa pervenuta alla velocità $u = \sqrt{(4\varepsilon a)}$, benchè sia finita l' altezza g del gorgo.

XII. Se frattanto il foro $EF = c$ fosse infinitesimo, l'acqua non uscirebbe dal vaso. Fa di mestieri adunque al minimo matematico sostituire il minimo foro fisico, e s' otterrà che l' acqua dopo avere scorso fuori del buco il picciolo spazio z, abbia fatto acquisto d' una velocità, che molto si accosterà a $\sqrt{(4\varepsilon a)}$. Sia per esempio $b = 3600$, $c = 1$, il che richiede che i diametri di queste sezioni circolari si corrispondano in ragione di $60:1$. Sia in oltre $a = 60$, $g = 40$, $z = 1$. Avremo l' iperbolico $\log.\left(\frac{b}{c}\right) = \log. 3600 = 8,18869$. Nella formola esprimente la velocità u per z, e per le costanti si può fisicamente negligere $-\frac{zc^3}{b^2}$, e supporre $b - c = b$. Sarà dunque sostituendo i valori stabiliti

$$\frac{\sqrt{(4\varepsilon a)}}{\sqrt{\left(\frac{20}{3600} + 1 + \frac{40}{3600}.8,18869\right)}} = u, \text{ e perciò}$$

$$\frac{\sqrt{(4\varepsilon a)}.60}{\sqrt{(3947,5476)}}=\sqrt{(4\varepsilon a)}.\frac{60,00}{62,82}=u,$$

e proſſimamente $\sqrt{(4\varepsilon a)}.\frac{21}{22}=u$. Il perchè nell' eſempio propoſto dopo che l' acqua uſcita pel foro ha ſcorſo lo ſpazio $z=1$, la ſua velocità cala ſoltanto la vigeſima ſeconda parte da quella d' un grave verticalmente diſceſo dall' altezza $a=60$. Se aveſſi ſuppoſto minore l' altezza del gorgo ponendo $g=20$, avrei trovato $\sqrt{(4\varepsilon a)}.\frac{60,00}{61,67}=u$, e proſſimamente $\sqrt{(4\varepsilon a)}.\frac{36}{37}=u$, dimodochè la velocità u ſi approſſimerebbe maggiormente a $\sqrt{(4\varepsilon a)}$.

XIII. Ora ecco ciò che ho raccolto dalla mentovata ſuppoſizione, che $\frac{c^2dx}{y^2}$, $\frac{c^2dy}{y^2}$ ſi riferiſcano in proporzione finita. Ma per dir il vero la forza viva dell' acqua contenuta nel gorgo generato dalla porzione della parabola SME, che s' è girata intorno all' aſſe ZG, non è la minima. Mi ſerva di prova il cercare la forza viva dell' acqua, che riempie il gorgo prodotto dal girare la porzione d' elliſſe conica SME intorno all' aſſe ZG. Ritenute le ſopra ſtabilite denominazioni, onde ſieno le ſezioni circolari $ST=b=nr^2$, $EF=c=nq^2$, $MN=y=np^2$, e di più il ſemiaſſe $ZV=e$, l' altezza del gorgo $ZG=g$, l' aſſiſſa $ZO=x$, la ſua fluſſione $Oo=dx$, oſſervo che per la natura dell' elliſſe abbiamo $\frac{r^2}{e^2}.(e^2-x^2)=p^2=\frac{y}{n}$, e quindi $\frac{nr^2}{e^2}.(e^2-x^2)=b.\left(\frac{e^2-x^2}{e^2}\right)=y$. Ma quando $y=c=EF$, è $ZG=x=g$; dunque $b.\left(\frac{e^2-g^2}{e^2}\right)=c$, e perciò $e^2=\frac{bg^2}{b-c}$, $e=g.\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}}$. Nella formola generale $\frac{c^2u^2}{2}\int\frac{dx}{y}$ eſprimente la forza viva dell' acqua contenuta nella porzione $SMNT$ del gorgo ſi collochi in cambio di y il rinvenuto valore, e ci ſi preſenterà la det-

ta forza viva $= \frac{e^2c^2}{b} \cdot \frac{u^2}{2} \int \frac{dx}{e^2 - x^2} = \frac{ec^2}{2b} \cdot \frac{u^2}{2} \int \left(\frac{dx}{e+x} + \frac{dx}{e-x} \right)$ $= \frac{ec^2}{2b} \cdot \log. \left(\frac{e+x}{e-x} \right) \cdot \frac{u^2}{2}$. Non c' è bisogno di aggiunger costante; perchè supponendosi log. $1 = 0$, quando nel sito ST l' assissa $ZO = x = 0$, ne risulta rettamente la forza viva $\frac{gc^2}{2b} \cdot \log. 1 \cdot \frac{u^2}{2} = 0$.

Sostituito nella nostra formola in luogo di e il suo valore $g \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}}$, scopriremo la mentovata forza viva

$$= \frac{gc^2}{2b} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}} \cdot \log. \left(\frac{\frac{g \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}} + x}{\frac{g \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}} - x} \right) \cdot \frac{u^2}{2},$$

e posta $x = ZG = g$, ne proverrà la forza viva di tutta l'acqua contenuta nel gorgo $= \frac{gc^2}{2b} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}} \cdot \log. \left(\frac{\frac{g \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}} + g}{\frac{g \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}} - g} \right) \cdot \frac{u^2}{2}$

$= \frac{gc^2}{2b} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(b-c)}} \cdot \log. \left(\frac{\sqrt{b} + \sqrt{(b-c)}}{\sqrt{b} - \sqrt{(b-c)}} \right) \cdot \frac{u^2}{2}$, la qual formola vale per qualunque misura del foro c. Che se lo stesso sia minimo o matematicamente, o anche fisicamente in riguardo a b; sarà $\sqrt{(b-c)} = \sqrt{b} - \frac{c}{2\sqrt{b}}$, e la formola si modificherà nel modo seguente

$$\frac{gc^2}{2b} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \frac{c}{2\sqrt{b}}} \cdot \log. \left(\frac{2\sqrt{b} - \frac{c}{2\sqrt{b}}}{\frac{c}{2\sqrt{b}}} \right) \cdot \frac{u^2}{2}$$

$= \frac{gc^2}{2b} \cdot \frac{2b}{2b-c} \cdot \log. \left(\frac{4b-c}{c} \right) \cdot \frac{u^2}{2} = \frac{gc^2}{2b} \cdot \log. \left(\frac{4b}{c} \right) \cdot \frac{u^2}{2}$. Una tal

forza

forza viva è minore di quella $\frac{gc^2}{b} \cdot \log.(\frac{b}{c})$ determinata al numero X; imperciocchè se il foro c è infinitesimo, $\log.(\frac{4b}{c}) = \log.(\frac{b}{c}) + \log. 4$ si eguaglia a $\log.(\frac{b}{c})$, e la forza viva dell' acqua nel gorgo ellittico è la metà di quella nel gorgo parabolico. Che se il foro è minimo fisicamente, la prima forza viva sarà alquanto maggiore della metà della seconda.

XIV. Supposti come sopra al numero XII. $b = 3600$, $c = 1$, $a = 60$, $g = 40$, $z = 1$, ed essendo $\log.(\frac{4b}{c}) = 9,57495$, si troverà $\frac{\sqrt{(4\varepsilon a)}}{\sqrt{(\frac{20}{3600} + 1 + \frac{20 \cdot 9,57495}{3600})}} = u$, e ridotto il computo, $\sqrt{(4\varepsilon a)} \cdot \frac{60}{61,737} = u$, o prossimamente $\sqrt{(4\varepsilon a)} \cdot \frac{35}{36} = u$. Che se fosse $g = 20$, ne risulterebbe $\frac{\sqrt{(4\varepsilon a)}}{\sqrt{(\frac{40}{3600} + 1 + \frac{10 \cdot 9,57495}{3600})}} = u$, e fatte le necessarie operazioni, $\sqrt{(4\varepsilon a)} \cdot \frac{60}{61,12} = u$, o prossimamente $\sqrt{(4\varepsilon a)} \cdot \frac{54}{55} = u$. Le scoperte velocità sono maggiori di quelle, che assegnati alle costanti gli stessi valori, abbiamo rinvenuto nella supposizione del gorgo parabolico; e per conseguenza col mezzo del gorgo ellittico si ottiene una più copiosa uscita d' acqua dal vaso,

XV. Ella è agevole da farsi la riflessione, che quanto più sono grandi le sezioni circolari $MN = y$, altrettanto cala la forza viva dell' acqua nel gorgo. Per restar convinti d' una

tal verità, basta il considerare la formola $c^2 . \int \left(\frac{dx}{y}\right) . \frac{u^2}{2}$. Ascenderebbero adequatamente al massimo le dette sezioni, se la curva SME accettasse l'equazione $\frac{r^\infty}{e^\infty} . (e^\infty - x^\infty) = p^\infty$.

Non tralascio di notare, che la formola $\frac{\sqrt{(4\varepsilon abz)}}{\sqrt{(ac+bz)}} = u$ determinata nel Problema I. della mentovata Annotazione, la quale dipende dalla supposizione, che sia trascurabile la forza viva dell' acqua nel gorgo, è quella appunto, che con somma approssimazione, e salva la legge di continuità, conviene coll' equazione $\frac{r^\infty}{e^\infty} . (e^\infty - x^\infty) = p^\infty$. E vaglia il vero, sintanto che (*Fig.* 2.) $ZO = x$ cala da $ZV = e$ per una quantità finita, ed anche infinitesima dentro certi limiti, come vedremo, sarà sempre x^∞ trascurabile rispettivamente ad e^∞, e perciò essendo $SZ = r = MO = p$, le due linee SC, SM coincideranno, e si potrà supporre, che il gorgo principj ad una distanza picciolissima dal punto G, e che conseguentemente sia trascurabile la forza viva dell' acqua, che lo riempie. Prescindendo adunque dalle resistenze, la sovrascritta formola si dee preferire; perchè, paragonata coll' altre, ci dà più grande il valore della velocità u.

XVI. Sia come sopra al numero XII. $a = 60$, $b = 3600$, $c = 1$, $z = 1$, e dopo che l' acqua uscita dal foro avrà scorso lo spazio $z = 1$, sarà fornita della velocità $\sqrt{(4\varepsilon a)} . \frac{60}{\sqrt{(3660)}} = \sqrt{(4\varepsilon a)} . \frac{120}{121} = u$, la qual è maggiore delle due $\sqrt{(4\varepsilon a)} . \frac{21}{22} = u$, $\sqrt{(4\varepsilon a)} . \frac{36}{37} = u$ dipendenti dalla figura parabolica del gorgo registrate al predetto numero XII., e delle altrettante $\sqrt{(4\varepsilon a)} . \frac{35}{36} = u$, $\sqrt{(4\varepsilon a)} . \frac{54}{55} = u$ dipendenti dalla figura ellittica registrate al numero XIV., che suppongono l' altezza del gorgo, quella posta in primo luogo $= 40$, e quella posta in secondo luogo $= 20$. Ma quand' anche si fosse stabilito $g = 1$, si sarebbe trovato

$\sqrt{(4\varepsilon a)} \cdot \frac{109}{110} = u$ in riguardo alla figura parabolica, e

$\sqrt{(4\varepsilon a)} \cdot \frac{113}{114} = u$ in riguardo alla figura ellittica; velocità

tutte e due minori della $\sqrt{(4\varepsilon a)} \cdot \frac{120}{121}$.

XVII. Vediamo presentemente come dall' equazione $\frac{r^\infty}{e^\infty} \cdot (e^\infty - x^\infty) = p^\infty$ si deduca analiticamente la formola $\frac{\sqrt{(4\varepsilon abz)}}{\sqrt{(ac+bz)}} = u$, che suppone minimo il foro $EF = c$. Poichè $\frac{r^\infty}{e^\infty} \cdot (e^\infty - x^\infty) = p^\infty$, sarà parimente $\frac{nr^2}{e^2} \cdot (e^\infty - x^\infty)^{2:\infty} = np^2$: ma $nr^2 = b$, $np^2 = y$; dunque $\frac{b}{e^2} \cdot (e^\infty - x^\infty)^{2:\infty} = y$. Sia (*Fig.* 3.) $ZV = K$ minima di tal misura relativamente all' infinito ∞, che la sezione circolare $S'T'$ s' adegui colla $ST = b$. Segno $OV = t$, ed essendo $ZV = e$, $ZO = x$, ne proviene $x = e - t$. Supponendosi t infinitesima, avremo $x^\infty = e^\infty - \infty e^{\infty - 1} \cdot t$, e quindi $e^\infty - x^\infty = \infty e^{\infty - 1} \cdot t$, e perciò $\frac{b}{e^2} \cdot \frac{\infty^{2:\infty} \cdot e^2 \cdot t^{2:\infty}}{e^{2:\infty}}$ $= \frac{b \cdot \infty^{2:\infty} \cdot t^{2:\infty}}{e^{2:\infty}} = y$. Sarà pertanto la forza viva dell' acqua contenuta nella porzione $S'MNT'$ del gorgo $= c^2 \int \left(\frac{dx}{y}\right) \cdot \frac{u^2}{2} = e^{2:\infty} c^2 \int \left(\frac{-dt}{b \cdot \infty^{2:\infty} \cdot t^{2:\infty}}\right) \cdot \frac{u^2}{2}$. Passo all' integrazione, e trovo la detta forza viva

$$= \frac{e^{2:\infty} \cdot c^2}{\infty^{2:\infty} \cdot b} \cdot \frac{\infty}{\infty - 2} \cdot \left(K^{(\infty-2):\infty} - t^{(\infty-2):\infty}\right) \cdot \frac{u^2}{2}$$

$= \frac{e^{2:\infty} \cdot c^2}{\infty^{2:\infty} \cdot b} \cdot (K - t) \cdot \frac{u^2}{2}$. Ho aggiunta la costante K, acciocchè si annulli la sommatoria, quando $OV = t = ZV = K$.

Nella formola $\frac{b \,.\, \infty^{2:\infty} \,.\, t^{2:\infty}}{e^{2:\infty}} = y$ si ponga $y = c$, e ne proverrà $t = \frac{ec^{\infty : 2}}{\infty \,.\, b^{\infty : 2}} = GV$. Sostituito questo valore, ci si presenterà la forza viva dell' acqua contenuta nella parte di gorgo $S'MEFNT' = \frac{e^{2 : \infty} c^2}{\infty^{2:\infty} \,.\, b} \,.\, (K - \frac{ec^{\infty : 2}}{\infty \,.\, b^{\infty : 2}}) \,.\, \frac{u^2}{2}$
$= (\frac{e^{2:\infty} c^2 K}{\infty^{2:\infty} \,.\, b} - \frac{e^{1+2:\infty} c^{\infty : 2+2}}{\infty^{1+2:\infty} \,.\, b^{\infty:2+1}}) \,.\, \frac{u^2}{2}$. Ora quando $t = K$, $y = b$; dunque per la formola $\frac{b \,.\, \infty^{2:\infty} \,.\, t^{2:\infty}}{e^{2:\infty}} = y$ avremo $\frac{b \,.\, \infty^{2:\infty} K^{2:\infty}}{e^{2:\infty}} = b$, e perciò $K = \frac{e}{\infty}$. Fatta la sostituzione, la detta forza viva riceverà la seguente espressione $(\frac{c^2 e^{1+2:\infty}}{\infty^{1+2:\infty} \,.\, b} - \frac{c^{\infty : 2+2} \,.\, e^{1+2:\infty}}{\infty^{1+2:\infty} \,.\, b^{\infty : 2+1}}) \,.\, \frac{u^2}{2}$. Supponendosi il foro c minimo, la quantità trascendentemente infinitesima $\frac{-c^{\infty : 2+2} \,.\, e^{1+2:\infty}}{\infty^{1+2:\infty} \,.\, b^{\infty : 2+1}}$ è nulla in paragone di $\frac{c^2 e^{1+2:\infty}}{\infty^{1+2:\infty} \,.\, b} = \frac{c^2 e}{\infty b}$; dunque la mentovata forza viva $= (\frac{c^2 e}{\infty b}) \,.\, \frac{u^2}{2} = \frac{c^2 K}{b} \,.\, \frac{u^2}{2}$. Si aggiunga la forza viva della parte $SS'T'T$ del gorgo, che s' eguaglia ad $(e - K) \,.\, \frac{c^2}{b} \,.\, \frac{u^2}{2}$, o adequatamente a $(g - K) \,.\, \frac{c^2}{b} \,.\, \frac{u^2}{2}$, meritando d' essere trascurata la $GV = \frac{ec^{\infty : 2}}{\infty \,.\, b^{\infty : 2}}$, e ne risulterà la forza viva di tutto il gorgo $SMEFNT$ uguale a $((g - K) \,.\, \frac{c^2}{b} + \frac{Kc^2}{b}) \,.\, \frac{u^2}{2} = \frac{gc^2}{b} \,.\, \frac{u^2}{2}$.

Nella formola generale, che si legge al numero III. $\frac{V(4\varepsilon acz)}{V(\frac{ac^2}{b} - \frac{gc^2}{b} - \frac{zc^3}{b^2} + cz + c^2 \int \frac{dx}{y})} = u$ si sostituisca in cam-

bio di $c^2 \int \frac{dx}{y}$ lo ſcoperto valore $\frac{gc^2}{b}$, e ci ſi preſenterà, traſcurando il termine riſpettivamente nullo $\frac{zc^3}{b}$, e fatte le convenienti riduzioni, $\frac{\sqrt{(4\varepsilon abz)}}{\sqrt{(ac+bz)}} = u$, ch' è quella ſteſſa formola, che ho determinata nel Problema I. della più volte nominata Annotazione, ſupponendo minimo il foro c, e che ſi poſſa negligere la forza viva dell' acqua, dalla quale il gorgo è riempiuto.

XVIII. Ho detto al numero IX., che $\frac{c^2dx}{y^2}$, $\frac{c^2dy}{y^2}$ non poſſono congiuntamente uguagliarſi a nulla. In fatti ſtando $\frac{c^2dx}{y^2} : \frac{c^2dy}{y^2} :: dx : dy$, può accadere, che ſia dy infinitamente minore di dx, o al contrario. Suppongaſi $dy = 0$ riſpettivamente a dx; e poichè $-\frac{c^2dy}{y^2} = 0$, avremo integrando $\frac{c^2}{y} = M$: ma quando $x = 0$, $y = b$; dunque $M = \frac{c^2}{b}$, e perciò ſempre $y = b$, e $dy = 0$, qualunque ſia il valore di x; dimodochè la linea retta SC è il luogo, che ſerve al minimo valore di $c^2 \int \frac{dx}{y}$. Lo ſteſſo intento ottiene adequatamente, come ho fatto vedere, l' elliſſe di grado infinito $\frac{r^\infty}{e^\infty} \cdot (e^\infty - x^\infty) = p^\infty$, la quale di più oſſerva la legge di continuità, e fa tranſito gradatamente dalla ſezione y alla c.

In oltre $y = c$, quando $x = g$; dunque $M = \frac{c^2}{c} = c$, e per conſeguenza $y = c$, qualunque ſia il valore di x, e queſta è la determinazione, che ſerve al maſſimo valore di $c \int \frac{dx}{y}$. Si conſeguirebbe con ſomma approſſimazione lo ſteſſo, ſe la curva (*Fig.* 1.) *SME* foſſe tale, che ſuppoſta minima

$ZO = x$, la ſezione $MN = y$ s'adeguaſſe alla ſezione $EF = c$. In tal caſo per tutto lo ſpazio *OG* ſi potrebbe conſiderar coſtante il valore di $y = c$, e la forza viva dell' acqua nel gorgo adequatamente al maſſimo aſcenderebbe, ſalva la legge di continuità.

XIX. La fluſſione $\frac{c^2 dx}{y^2}$ dedotta anch' eſſa dalla formola indefinita (*B*) ſi può ſtabilire infinitamente minore di $\frac{c^2 dy}{y^2}$. Ciò poſto ſi otterrebbe $c^2 dx = 0$, e quindi integrando $c^2 x = N$, e qualunque foſſe la y, dovrebb' eſſere $x = \frac{N}{c^2}$, cioè uguale ad una coſtante. Richiedono le condizioni del Problema, che x poſſa ricevere due valori coſtanti $x = 0$, $x = g$. Accettato il ſecondo, ad $x = g$ ſi riferirebbe qualunque valore di y fra i limiti b, c: ma per la formola $-\frac{c^2 dy}{y^2} = 0$ a qualſivoglia grandezza di x fra il nulla, e g dee corriſpondere $y = b$; dunque reſta determinato il gorgo (*Fig. 3.*) *ECSTDF*, in cui l' acqua è fornita della minima forza viva. Suppoſta $x = 0$, potrebbe y ricevere tutti i valori fra b, e c. E poichè per la formola $-\frac{c^2 dy}{y^2} = 0$ eſſer dee ſempre $y = c$, aſſegnato ad x qualunque valore fra il nulla e g; ne proviene il gorgo *SeEFfT* (condotte *Ee*, *Ff* parallele a *GZ*) la cui acqua è dotata della maſſima forza viva.

XX. Le due ſuppoſizioni di $-\frac{c^2 dy}{y^2} = 0$, $\frac{c^2 dx}{y^2} = 0$ ci guidano alla concluſione, che ſia nulla quell' altezza, in cui gradatamente ſi paſſa dalla velocità conveniente alla ſezione b alla velocità, che compete alla ſezione c. Succede ciò o nel ſito *CD*, o nel ſito *ST*, ſecondochè la forza viva dell' acqua nel gorgo è minima, o maſſima. Una tal altezza uguale a nulla non appartiene alla Fiſica, la quale può ſoltanto ſupporla minima sì ma finita. Nel Problema I. della

citata Annotazione ho ſuppoſto minima e traſcurabile la forza viva dell' acqua nel gorgo. Un effetto equivalente naſce ammettendo per la curva $SS'ME$, che genera il gorgo, l' equazione $\frac{r^\infty}{e^\infty}.(e^\infty - x^\infty) = p^\infty$, eſſendo traſcurabile la differenza fra le forze vive dell' acqua $SS'MEFNT'T$, e dell' acqua $SCDT$. Se non ſi doveſſero evitare i ſoverchj fregamenti, e le particole acquee foſſero infiniteſime, baſterebbe un menomiſſimo ſpazio $Z'G$, nel quale ſi faceſſe tranſito dalla velocità conveniente alla ſezione $S'T' = ST$ adequatamente a quella che compete alla ſezione EF. Ma tentando la gravità dell' acqua d' eſercitare la maſſima azione, ed eſſendo queſta tanto maggiore, quanto ſono minori le reſiſtenze, ed oltre a ciò eſſendo le particole acquee picciolisſime sì ma finite; egli è neceſſario, che lo ſpazio $Z'G$ ſia tale, che poſſa eſſere compoſto da innumerabili ſtrati d' acqua, la velocità dei quali vada gradatamente creſcendo, e di più la curva $S'ME$ ſia quanto baſta diſtante dalle pareti, e dal fondo del vaſo. Il perchè la natura ſceglierà per la figura del gorgo l' elliſſe SME di quel grado, che laſci un conveniente ſpazio $SMECS'$ fra il gorgo, le pareti, ed il fondo del vaſo, onde minorate le reſiſtenze, eſerciti la gravità dell' acqua la maſſima poſſibile azione.

XXI. Si conchiuda pertanto, che il metodo delle Variazioni ſerve alla ſoluzione del propoſto Problema col mezzo delle formole $-\frac{c^2dy}{y^2} = 0$, $\frac{c^2dx}{y^2} = 0$, preſcindendo dalle reſiſtenze, e ſupponendo infiniteſime le particole acquee, dimodochè lo ſpazio picciolisſimo $Z'G$ baſti, ſalvata la legge di continuità, per paſſare dalla velocità ſpettante alla ſezione $S'T'$ all' altra, che appartiene alla ſezione EF. Il valore coſtante $y = b$ mi dà la minima forza viva dell' acqua nel gorgo, ed il valore coſtante $y = c$ mi dà la maſſima. Ai mentovati minimo, e maſſimo ci poſſiamo accoſtare bensì, ma non giammai pervenirvi, a cagione di dover paſſar l' acqua dalla velocità propria della ſezione $ST = b$ a quella, che conviene alla ſezione $EF = c$ col mezzo d' infiniti inaſſegnabili incrementi. Alla curva $SS'ME$ generante il gorgo, la cui equa-

zione $\frac{r^{\infty}}{e^{\infty}}.(e^{\infty}-x^{\infty})=p^{\infty}$, proccura la natura di accostarsi quanto lo permettono le resistenze, e la grandezza menomissima delle particole acquee, ma dentro i limiti del finito.

XXII. Do compimento alla presente Memoria con una riflessione, che sembrami molto importante. Si può dubitare che sia una continuazione del gorgo la porzione di vena *EFF'E'* situata tra il foro *EF*, e la massima sua contrazione *E'F'*. In questa ipotesi la curva *SME*, che colla sua rivoluzione intorno all' asse *ZG* genera la figura del gorgo, non potrebb' esser un' ellisse: ma io l' ho dimostrata tale; dunque la curva *EE'* non è una continuazione dell'ellisse *SME*. Qual è dunque l' indole della curva *EE'*? Ristrignendosi gli strati acquei procedendo da *ST* verso *EF*, l'acqua guadagna qualche velocità da *M*, e da *N* verso *O*, la quale, non essendo sensibilmente costipabili le particole acquee, ben presto prende la direzione *OG*, onde le velocità degli strati *ST*, *MN*, *EF* per la detta direzione stiano in ragion inversa delle sezioni *ST*, *MN*, *EF*. Dalle velocità per le direzioni *EG*, *FG* nel sito *EF*, e dall' uscir l' acqua rarefatta dal foro *EF*, dipende il ristrignimento della vena. Applicando al foro *EF* un cannone convergente, si suol far retto il lato *EE'*. Se le velocità della particola *E* per le direzioni *EG*, *GG'* fossero costanti, sarebbe *EE'* una linea retta: ma annullandosi nel sito *E'G'* della massima contrazion della vena la velocità per *EG'*, e poco crescendo la velocità per *GG'*; il lato *EE'* è una curva, che volge il convesso *GG'*. Sia giusta il Cav. *Newton* il diametro del foro $EF=\frac{25}{40}$ di dito, ed alla distanza $GG'=\frac{20}{40}$ corrisponderà il più ristretto diametro della vena $E'F'=\frac{21}{40}$. Le velocità dunque della particola *E* per le direzioni *GG'*, *EG* starebbero come 20 : $\frac{25-21}{2}=2$, ovvero come 10:1, se la velocità per *EG* fosse

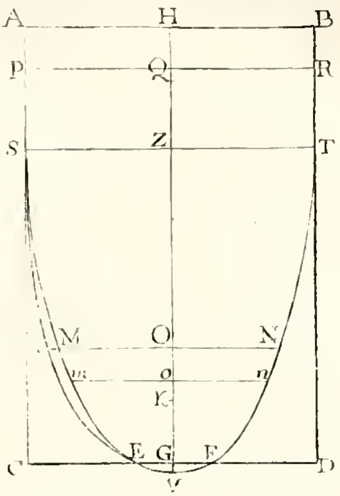


Fig : II.

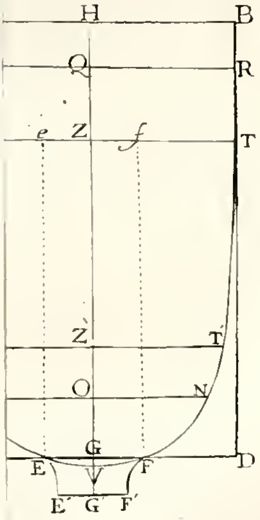


Fig : III.

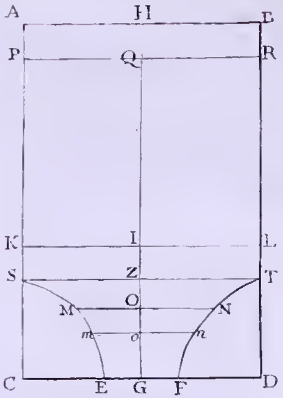


Fig: I.

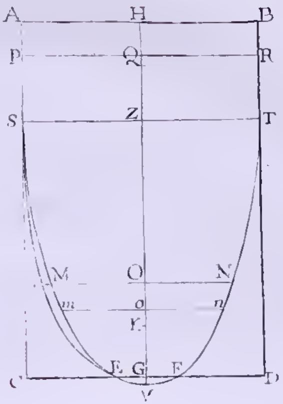


Fig: II.

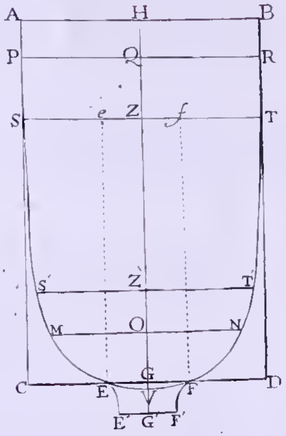
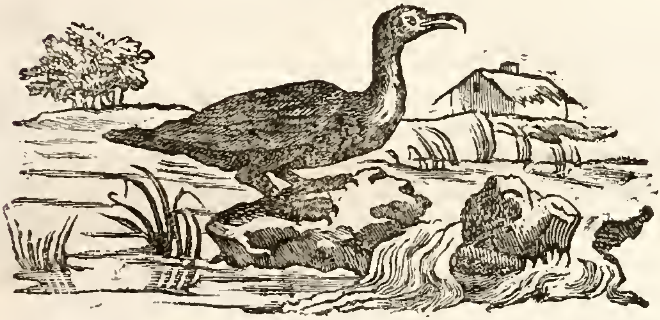


Fig: III.

fosse equabile: ma poichè questa si eguaglia a nulla nel sito *E'G'*; la velocità per *GG'* a quella per *EG* si riferirà in minor proporzione di 10:1.

S' inferisca pertanto, che la curva *EE'* non è una continuazion dell' ellisse *SME*. Volge questa il concavo verso l' asse *ZG'*, e quella tutto al contrario il convesso, così richiedendo la velocità per la direzione *EG*, che s' annienta nel sito *E'G'* della massima contrazion della vena.



OPPOSIZIONE

DEL NUOVO PIANETA

Osservata nel 1783

Dal Sig. GIUSEPPE SLOP DE CADENBERG Pubblico Professore d' Astronomia nell' Università di Pisa.

PEr le continue nuvole, che coprirono il cielo, non fu possibile osservare il pianeta al quadrante *Murale* prima del dì 8 Gennajo 1784, cioè nove giorni dopo dell' opposizione. Susseguentemente il pianeta fu rivisto il dì 21 dell' istesso mese; ma siccome i di lui moti geocentrici sono nelle vicinanze dell' opposizione molto regolari e quasi uniformi, ed inoltre abbastanza conosciuti per le osservazioni degli anni precedenti, abbiam creduto di poter dedurne con sufficiente sicurezza da queste due sole osservazioni il tempo dell' opposizione. Le stelle fisse, alle quali fu paragonato il pianeta erano η, μ, ε e δ della costellazione dei Gemini. I loro luoghi apparenti sono dedotti per il dì 8 Gennajo dai Cataloghi di *Mayer*, *Bradlej*, e dell' Abbate della *Caille*. Noi ci siam serviti di quelli di *Mayer* per le stelle η ed ε, e di quelli di *Bradlej* per le stelle μ e δ, tenendo conto dei piccoli loro moti apparenti per l' osservazione del dì 21.

Dal Catalogo di Mayer.

η dei Gemini Ascensione retta	3^s. 0^g 28'. 3", 4
Declinazione boreale	0. 22. 23. 17, 0
μ dei Gemini Ascensione retta	3. 2. 28. 41, 7
Declinazione boreale	0. 22. 36. 30, 2
ε dei Gemini Ascensione retta . , ...	3. 7. 39. 59, 2
Declinazione boreale	0. 25. 19. 45, 8

δ dei Gemini Ascensione retta . . . . . $3^s.16^g.48'35''$, 2
Declinazione boreale 0. 22. 21. 54, 3

Dal Catalogo di Bradlej.

η dei Gemini Ascensione retta 3. 0. 28. 6, 7
Declinazione boreale 0. 22. 33. 13, 4
μ dei Gemini Ascensione retta 3. 2. 28. 48, 2
Declinazione boreale 0. 22. 36. 26, 5
ε dei Gemini Ascensione retta 3. 7. 40. 3, 2
Declinazione boreale 0. 25. 19. 44, 3
δ dei Gemini Ascensione retta 3. 16. 48. 42, 6
Declinazione boreale 0. 22. 21. 52, 6

Dal Catalogo di Stelle Zodiacali dell' Ab. de la Caille.

η dei Gemini Ascensione retta 3. 0. 27. 56, 5
Declinazione boreale 0. 22. 33. 19, 2
μ dei Gemini Ascensione retta 3. 2. 28. 39, 7
Declinazione boreale 0. 22. 36. 31, 3
ε dei Gemini Ascensione retta 3. 7. 40. 2, 5
Declinazione boreale 0. 25. 19. 41, 8
δ dei Gemini Ascensione retta 3. 16. 48. 29, 6
Declinazione boreale 0. 22. 21. 57, 1

Il dì 8 *Gennajo tempo medio* $11.^{ore}$ 28'. 21''.

Differenza osservata fra il pianeta ed η dei Gemini
Nell' Ascensione retta . . . . + 0. 9. 53. 6, 2
Nella Declinazione . . . . + 0. 0. 56. 46, 7
Differenza nella Declinazione corretta dalla refrazione . . . . + 0. 0. 56. 47, 8
Ascensione retta del pianeta 3. 10. 21. 9, 6
Declinazione boreale 0. 23. 30. 4, 8

8 *Gennajo t. m.* $11.^{ore}$ 28'. 21''.

Differenza osservata fra il pianeta e μ dei Gemini
In Ascensione retta . . . . + 0. 7. 52. 21, 5

In Declinazione	+	0^{s}.	0^{g}.	53'.	30'',	0
L' isteſſa corretta dalla refrazione . .	+	0.	0.	53.	31,	0
Aſcenſione retta del pianeta		3.	10.	21.	9,	7
Declinazione boreale		0.	23.	29.	57,	5

8 *Gennajo t. m.* 11.^{ore} 28'. 21''.

Differenza oſſervata fra il pianeta ed ε dei Gemini

In Aſcenſione retta	+	0.	2.	41.	17,	7
In Declinazione	—	0.	1.	49.	41,	8
L' isteſſa corretta dalla refrazione . .	—	0.	1.	49.	43,	9
Aſcenſione retta del pianeta		3.	10.	21.	16,	9
Declinazione boreale		0.	23.	30.	1,	9

Fatta una giuſta eſtimazione delle deſcritte oſſervazioni (1) ſi ha per l' isteſſo tempo

I luoghi apparenti del pianeta.

Aſcenſione retta	3.	10.	21.	12,	8
Declinazione boreale	0.	23.	30.	1,	4
Longitudine	3.	9.	29.	12,	1
Latitudine boreale	0.	0.	22.	15,	8

Il dì 21 *Gennajo t. m.* 10.^{ore} 35'. 55''.

Differenza oſſervata fra il pianeta ed ε dei Gemini

Nell' Aſcenſione retta	+	0.	2.	6.	27,	8
Nella Declinazione	—	0.	1.	47.	22,	0
L' isteſſa corretta dalla refrazione . .	—	0.	1.	47.	24,	1
Aſcenſione retta del pianeta		3.	9.	46.	27,	8
Declinazione boreale		0.	23.	32.	21,	9

21 *Gennajo t. m.* 10.^{ore} 35'. 55''.

Differenza oſſervata fra il pianeta e δ dei Gemini

In Aſcenſione retta	—	0.	7.	2.	30,	9

(1) Vedi *Novi planetæ obſervationes & theoria* pag. 26.

In Declinazione	+ 0^s.	1^g.	10'.	22",	7
L' istessa corretta dalla refrazione . .	+ 0.	1.	10.	24,	1
Ascensione retta del pianeta	3.	9.	46.	13,	4
Declinazione boreale	0.	23.	32.	16,	8

Preso un medio fra le due osservazioni si avranno per l' istesso tempo

I luoghi apparenti del pianeta.

Ascensione retta	3.	9.	46.	20,	6
Declinazione boreale	0.	23.	32.	19,	3
Longitudine	3.	8.	57.	8,	1
Latitudine boreale	0.	0.	22.	19,	9

Il dì 8 Gennajo per il momento dell' osservazione si trova dalle tavole del *Mayer* la longitudine del Sole 9^s. 18^g. 24'. 53", 7, onde in quel tempo era già stato percorso col moto relativo del pianeta dal Sole un arco di 8^g. 55'. 41", 6 dopo dell' opposizione. Il dì 8 Decembre del 1783 a 11.^{ore} 28'. 21" di t. m. si ha dall' istesse tavole la longitudine del Sole 9^s. 9^g. 14'. 39", 9, ed il suo moto in longitudine dal dì 3 Decembre all' 8 Gennajo 9^g. 10'. 13", 8. Il moto geocentrico del pianeta nell' istesso intervallo di tempo si deduce dalle tavole del pianeta del Ch. Sig. *Barnaba Oriani* inserite nelle Effemeridi di Milano del 1785 0^g. 23'. 22", 3, onde l' arco 8^g. 55'. 41", 6, che dopo seguita l' opposizione il dì 8 Gennajo era stato descritto col moto relativo del pianeta dal Sole, doveva descriversi nell' intervallo di 8 giorni 9.^{ore}. 43'. 30" di tempo medio. L' opposizione apparente seguì dunque il dì 31 Decembre 1783 a 1.^{ora} 44'. 51" di t. m. nel qual tempo la longitudine del Sole si ha dalle tavole 9^s. 9^g. 51'. 3", 0, onde la longitudine geocentrica apparente del pianeta era per il momento dell' opposizione 3^s. 9^g. 51'. 3", 0. Corretta questa dalle due piccole equazioni, che abbiamo altrove descritte, si avrà finalmente per l' istesso tempo dell' opposizione la longitudine eliocentrica vera 3^s. 9^g. 50'. 44", 0, e l' istessa nell' orbita del pianeta 3^s. 9.^{g} 50'. 51", 0.

Opposizione del nuovo pianeta osservata l' anno 1785.

Il Pianeta fu osservato al quadrante *Murale* insieme con le stelle ζ, δ e ρ della costellazione dei Gemini il 26 e 28 Decembre, ed il 10 ed 11 Gennajo, cioè nelle sere in cui il tempo lo permise. Noi riporteremo i luoghi apparenti delle fisse dedotti per il dì 28 Decembre dai cataloghi delle stelle Zodiacali del *Mayer*, dell' Ab. *della Caille*, e da quello di *Bradlej*, che si trova inserito nell' Almanaco Nautico e Astronomico di *Maskelin* per il 1773. Nelle osservazioni degli altri giorni abbiamo tenuto conto dei piccoli moti apparenti delle fisse, facendo sempre uso dei luoghi dedotti dal catalogo di *Bradlej*.

Dal Catalogo di Mayer.

ζ dei Gemini Ascensione retta	$3^s. 12^g. 50'. 45''$, 1
Declinazione boreale	0. 20. 52. 4, 6
δ dei Gemini Ascensione retta	3. 16. 49. 32, 4
Declinazione boreale	0. 22. 21. 47, 4
ρ dei Gemini Ascensione retta	3. 18. 44. 56, 2
Declinazione boreale	0. 21. 52. 14, 8

Dal Catalogo di Bradlej.

ζ dei Gemini Ascensione retta	3. 12. 50. 47, 1
Declinazione boreale	0. 20. 52. 12, 4
δ dei Gemini Ascensione retta	3. 16. 49. 39, 8
Declinazione boreale	0. 22. 21. 45, 7
ρ dei Gemini Ascensione retta	3. 18. 45. 2, 8
Declinazione boreale	0. 21. 52. 11, 1

Dal Catalogo di stelle Zodiacali dell' Ab. de la Caille.

ζ dei Gemini Ascensione retta	3. 12. 50. 24, 7
Declinazione boreale	0. 20. 52. 7, 2
δ dei Gemini Ascensione retta	3. 16. 49. 26, 8
Declinazione boreale	0. 22. 21. 50, 7

ρ dei Gemini Aſcenſione retta . . . . . $3^s. 18^g. 45'. 39''$, 3
Declinazione boreale 0. 21. 52. 10, 1

Il dì 26 Decembre tempo medio 12.^{ore} 39'. 32''.

Differenza oſſervata fra il pianeta e ζ dei Gemini
Nell' Aſcenſione retta . . . . + 0. 3. 12. 19, 1
Nella Declinazione . . . . + 0. 2. 12. 15, 8
L' iſteſſa corretta dalla refrazione . . + 0. 2. 12. 19, 8

Luoghi apparenti del pianeta.

Aſcenſione retta 3. 16. 3. 15, 8
Declinazione boreale 0. 23. 4. 32, 2
Longitudine 3. 14. 44. 23, 2
Latitudine boreale 0. 0. 25. 29, 4

26 *Decembre t. m.* 12.^{ore} 39'. 32''.

Differenza oſſervata fra il pianeta e ρ dei Gemini
Nell' Aſcenſione retta . . . . — 0. 2. 41. 43, 4
Nella Declinazione . . . . + 0. 1. 12. 19, 4
L' iſteſſa corretta dalla refrazione . . + 0. 1. 12. 20, 8

Luoghi apparenti del pianeta.

Aſcenſione retta 3. 16. 3. 18, 9
Declinazione boreale 0. 23. 4. 31, 9
Longitudine 3. 14. 44. 26, 1
Latitudine boreale 0. 0. 25. 29, 4

Preſo un medio fra le due oſſervazioni ſi avrà per l' iſteſſo tempo
Longitudine del pianeta 3. 14. 44. 24, 7
Latitudine boreale 0. 0. 25. 29, 4

Il dì 28 Decembre t. m. 12.^{ore} 31'. 17''.

Differenza oſſervata fra il pianeta e ζ dei Gemini
In Aſcenſione retta . . . . + 0. 3. 6. 54, 6

In Declinazione	+ 0ˢ.	2ᵍ.	13′.	0″, 7
L' isteſſa corretta dalla refrazione ..	+ 0.	2.	13.	3, 4

Luoghi apparenti del pianeta.

Aſcenſione retta	3.	15.	57.	41, 7
Declinazione boreale	0.	23.	5.	15, 8
Longitudine	3.	14.	39.	12, 9
Latitudine boreale	0.	0.	25.	38, 8

28 *Decembre t. m.* 12.ᵒʳᵉ 31′. 17″.

Differenza oſſervata fra il pianeta e δ dei Gemini

In Aſcenſione retta	— 0.	0.	51.	45, 9
In Declinazione	+ 0.	0.	43.	26, 6
L' isteſſa corretta dalla refrazione ..	+ 0.	0.	43.	27, 4

Luoghi apparenti del pianeta.

Aſcenſione retta	3.	15.	57.	53, 9
Declinazione boreale	0.	23.	5.	13, 1
Longitudine	3.	14.	39.	24, 4
Latitudine boreale	0.	0.	25.	37, 4

28 *Decembre t. m.* 12.ᵒʳᵉ 31′. 17″.

Differenza oſſervata fra il pianeta e ρ dei Gemini

Nell' Aſcenſione retta	— 0.	2.	47.	15, 9
Nella Declinazione	+ 0.	1.	13.	0, 4
L' isteſſa corretta dalla refrazione ..	+ 0.	1.	13.	1, 8

Luoghi apparenti del pianeta.

Aſcenſione retta	3.	15.	57.	46, 9
Declinazione boreale	0.	23.	5.	12, 9
Longitudine	3.	14.	39.	18, 0
Latitudine boreale	0.	0.	25.	36, 5

Preſo un medio fra le tre oſſervazioni ſi avrà per l' isteſſo tempo

Longitudine

Longitudine del pianeta	$3^s. 14^g. 39'. 18''$, 4
Latitudine boreale	0. 0. 25. 37, 6

Il dì 10 *Gennajo t. m.* 11.^{ore} 37'. 43''.

Differenza osservata fra il pianeta e ζ dei Gemini

Nell' Ascensione retta	+	0. 2. 30. 18, 9
Nella Declinazione	+	0. 2. 16. 40, 1
L' istessa corretta dalla refrazione . .	+	0. 2. 16. 42, 8

Luoghi apparenti del pianeta.

Ascensione retta	3. 15. 21. 8, 5
Declinazione boreale	0. 23. 8. 54, 6
Longitudine	3. 14. 5. 24, 0
Latitudine boreale	0. 0. 25. 39, 5

10 *Gennajo t. m.* 11.^{ore} 37'. 43''.

Differenza osservata fra il pianeta e δ dei Gemini

Nell' Ascensione retta	—	0. 1. 28. 18, 9
Nella Declinazione	+	0. 0. 47. 7, 9
L' istessa corretta dalla refrazione . .	+	0. 0. 47. 8, 8

Luoghi apparenti del pianeta.

Ascensione retta	3. 15. 21. 23, 6
Declinazione boreale	0. 23. 8. 54, 2
Longitudine	3. 14. 5. 37, 8
Latitudine boreale	0. 0. 25. 40, 6

10 *Gennajo t. m.* 11.^{ore} 37'. 43''.

Differenza osservata fra il pianeta e ρ dei Gemini

Nell' Ascensione retta	—	0. 3. 23. 45, 9
Nella Declinazione	+	0. 1. 16. 40, 1
L' istessa corretta dalla refrazione . .	+	0. 1. 16. 41, 6

Luoghi apparenti del pianeta

Aſcenſione retta	3ˢ. 15ᵍ. 21′. 19″, 9
Declinazione boreale	0. 23. 8. 52, 3
Longitudine	3. 14. 5. 34, 6
Latitudine boreale	0. 0. 25. 38, 5

Preſo un medio fra le tre oſſervazioni ſi avrà di nuovo per l' iſteſſo tempo

Longitudine apparente del pianeta . . .	3. 14. 5. 32, 1
Latitudine boreale	0. 0. 25. 39, 5

Il dì 11 *Gennajo t. m.* 11.ᵒʳᵉ 33′. 38″.

Differenza oſſervata fra il pianeta e ζ dei Gemini

In Aſcenſione retta	+	0. 2. 27. 42, 3
In Declinazione	+	0. 2. 16. 53, 0
L' iſteſſa corretta dalla refrazione . .	+	0. 2. 16. 55, 7

Luoghi apparenti del pianeta.

Aſcenſione retta	3. 15. 18. 32, 1
Declinazione boreale	0. 23. 9. 7, 5
Longitudine	3. 14. 2. 59, 9
Latitudine boreale	0. 0. 25. 37, 3

11 *Gennajo t. m.* 11.ᵒʳᵉ 33′. 38″.

Differenza oſſervata fra il pianeta e δ dei Gemini

In Aſcenſione retta	—	0. 1. 30. 58, 9
In Declinazione	+	0. 0. 47. 19, 0
L' iſteſſa corretta dalla refrazione . .	+	0. 0. 47. 19, 9

Luoghi apparenti del pianeta.

Aſcenſione retta	3. 15. 18. 43, 8
Declinazione boreale	0. 23. 9. 5, 3
Longitudine	3. 14. 3. 10, 4
Latitudine boreale	0. 0. 25. 36, 2

Preso un medio fra le due osservazioni si avrà per l' istesso tempo

La longitudine apparente del pianeta . .	$3^{s}. 14^{g}. 3'. 5'', 1$
Latitudine boreale	$0. 0. 25. 36, 8$

Il dì 28 Decembre per il momento dell'osservazione si ha dalle tavole del *Mayer* la longitudine del Sole $9^{s}. 8^{g}. 1'. 5'', 5$, onde restava un arco di $6^{g}. 38'. 12'', 9$ da descriversi col moto relativo del pianeta dal Sole prima dell' opposizione. Il dì 10 Gennajo la longitudine del Sole si deduce dall' istesse tavole per il tempo dell' osservazione $9^{s}. 21^{g}. 13'. 58'', 7$, il moto dunque del Sole in longitudine dal dì 28 Decembre al 10 Gennajo, cioè in giorni $12. 23.^{ore} 6'. 26''$. di tempo medio, fu di $13^{g}. 12'. 53'', 2$. Il moto del pianeta fu osservato nell' istesso intervallo di tempo di $0^{g}. 33'. 46'', 3$, onde il moto relativo del pianeta dal Sole si ha per l' istesso tempo di $13^{g}. 46'. 39'', 5$. Ciò posto l' arco di $6^{g}. 38'. 12'', 9$, che doveva descriversi col moto relativo del pianeta dal Sole prima dell' opposizione, fu realmente descritto in giorni $6. 5.^{ore} 51'. 56''$ di tempo medio. L' opposizione apparente seguì dunque l' anno 1785. al dì tre Gennajo a $18.^{ore} 23'. 13''$ di tempo medio, nel qual tempo essendo secondo le tavole la longitudine del Sole di $9^{s}. 14^{g}. 23'. 2'', 0$, la longitudine apparente geocentrica del pianeta doveva essere di $3^{s}. 14^{g}. 23'. 2'', 0$. Fatto uso come sopra delle due piccole equazioni, si avrà dunque la longitudine eliocentrica vera del pianeta per il momento della sua apparente opposizione $3^{s}. 14^{g}. 22'. 38'', 1$, e l' istessa longitudine nell' orbita del pianeta $3^{s}. 14^{g}. 22'. 46'', 1$.

CONSIDERAZIONI OTTICHE

Del Sig. Ab. Giambattista Venturi Profeſſore di Filoſofia e Matematica nell' Univerſità di Modena.

ARTICOLO I.

Si dimoſtra la falſità del metodo, che tengono varj Fiſici per miſurare la Diſperſione dei raggi nelle varie ſoſtanze rifrangenti; e ſi ſtabiliſce la vera teoria delle fimbrie colorate del Priſma contro ciò che ha detto il Sig. Beguelin *negli Atti di Berlino* 1764.

1. E' Noto ai fiſici, che un raggio ſolare introdotto nella camera oſcura e rotto nel priſma dipinge ſul muro oppoſto l' imagine del Sole allungata e diſteſa ne' ſuoi colori diverſi; ed è pur noto dopo le eſperienze del *Newton*, che tali colori e tale allungamento d' immagine proviene dalla diverſa rifrangibilità delle fila diverſe, ond' è compoſto il raggio bianco; le quali fila nell' atto della rifrazione rimangono ſeparate e divergenti fra loro per un certo angolo che chiamaſi *l' angolo di diſperſione*. Il determinare con eſattezza la quantità di un tale angolo rieſce di grave importanza nella pratica egualmente che nella teoria dell' Ottica; dipendendo da ciò e la miſura degli errori di rifrangibilità negli iſtromenti diottrici, e la coſtruzione delle lenti acromatiche, e tutto quant' è il preciſo della dottrina Neutoniana intorno alla luce. Ora poichè le fimbrie colorate, di cui s' adornano gli orli di un corpo guardato attraverſo del priſma, ſono un fenomeno analogo al primo dell' immagine variotinta del Sole entro la camera oſcura; e poichè la ſteſſa diſeguale rifrangibilità ſi è la cagione dell' un fenomeno e dell' altro egualmente; quindi era facile a conchiudere, che la grandezza apparente delle fimbrie colorate è eguale all' angolo di diſperſione dei raggi paſſati attraverſo del priſma, e che però la grandezza ſuddetta apparente può ſervir di mi-

ſura a queſt' angolo. Così han conchiuſo di fatti, e ne hanno anche applicato la concluſione alla pratica varj di quei moderni filoſofi, i quali dopo la ſcoperta di *Dollond* ſi ſono accinti a dare la teoria delle lenti acromatiche. Tra queſti ſingolarmente il Sig. *Beguelin* oltre ad avere nelle Memorie dell' Accademia Real di Berlino degli anni 1762, e 1763 data la ſpiegazione dei priſmi acromatici, e la coſtruzione delle lenti ſimili dipendentemente dall' eguaglianza dell' angolo ottico, che forman nell' occhio le fimbrie colorate coll' angolo di diſperſione nell' eſperienza della camera oſcura; ha poi nelle ſteſſe Memorie all' anno 1764 fondato ſulla medeſima ſuppoſizione una analiſi delle ſteſſe fimbrie colorate, e varie conſeguenti oſſervazioni, le quali ſe foſſer vere, riuſcirebbono di non leggero incomodo ai dogmi comunemente adottati nell' Ottica. Ad una tale, ſe mi è lecito dirla, o imperfezione della teoria, o inavvertenza degli ottici, mi propongo io qui di ſupplire con due Teoremi, che pongano nel ſuo vero lume l' affare, e la teoria in ſicurezza.

TEOREMA I.

2. *Se un faſcetto di raggi omogenei uſciti da* A (*Fig.* I.) *infinitamente vicini tra loro ſoffre nel priſma* PMN *la rifrazione minima; l' angolo* F, *che forman tra loro i raggi eſtremi del faſcetto dopo l' intera rifrazione, pareggia l' angolo* A *che formavano prima di cadere ſul priſma.*

DIMOSTRAZIONE.

Il Sig. *Barrow* ha provato, che i raggi *AB* dopo la prima rifrazione in *B* vanno divergenti da un punto *Q* con un certo angolo *Q*. Qualunque ſia queſto punto e queſt' angolo, s' intenda condotta per lo punto *B*, che è il medio del faſcetto *QB*, un altra ſuperficie *XZ* d' egual forza rifrangente con *PM*, e poſta in guiſa, che l' angolo $QBX = QBM$. Poi prendaſi un altro punto raggiante *V* tale, che ſia $VB = AB$ e l' angolo $VBX = ABM$; e da queſto punto vada il faſcetto *VB* a rifrangerſi nella ſuperficie *XZ* con un angolo $V = A$. E' evidente, che il foco e la diver-

genza di questo nuovo fascetto VB dopo la rifrazione in XZ sarà il punto e l' angolo Q, quel medesimo, che apparteneva prima al fascetto AB rifratto dalla superficie PM. Ora essendo BC per l' ipotesi la via della minima rifrazione, sarà PBC un triangolo isoscele; e però l'angolo $QBX = QBM = PBC = PCB$; onde sarà XZ parallela a PC. Dunque i raggi usciti da V dopo essersi rifratti in B ed in C usciranno per la via CD paralleli a se medesimi; e però l' angolo $F = V = A$. Ma per la rifrazione in C è indifferente, che i raggi sieno usciti da V o da A, giacchè la loro direzione e divergenza per QBC è la medesima in ambidue i casi. Dunque ecc. *C. D. P.*

TEOREMA II.

3. *La grandezza apparente delle fimbrie colorate, che l'occhio vede in un oggetto attraverso il prisma, sta alla dispersione dei raggi prodotta nel medesimo prisma, prossimamente come la distanza dell' obbietto dal prisma sta alle due distanze insieme dell' obbietto e dell' occhio dal prisma: posta sempre nel prisma la rifrazione minima.*

Sia un punto visibile A (*Fig. II.*), da cui uscendo un raggio bianco AB mandi attraverso il prisma PMN il suo filo di rifrazion media ossia il verde per la via BCD a ferir l' occhio posto in D; e sia ABC la via della rifrazion minima per lo raggio verde, cioè sia PBC un triangolo isoscele. Il raggio violetto uscito da A per la direzione AB volgerà per BEO, facendo col raggio verde l'angolo DLO, il quale sarà la misura della dispersione tra il raggio medio ossia verde, e l' estremo violetto. Ma esso raggio EO non potrà entrare insieme col suo verde entro la pupilla dell' occhio posta in D: bensì vi entrerà un altro raggio violetto AG, il quale cadendo più verso l' angolo rifrangente del prisma volgerà per GHD, e verrà a fare nell' occhio col raggio verde l'angolo D; il quale angolo sarà la misura della grandezza apparente della linea colorata, in cui l'occhio D vedrà allungato l' oggetto A dalla rifrazione del prisma. Ora si prolunghino AB, DC fino ad incontrarsi dentro il prisma in T. Dico essere prossimamente l'angolo $D : DLO = AT : AT + TD$.

Dimostrazione.

Si prolunghi il raggio violetto *HD* fino ad incontrare il suo incidente in *R*, e l' altro violetto *EO* in *F*. Si conduca *RT*. E poichè i tre raggi *ABCD*, *ABEO*, *AGHD* forman l' uno coll' altro angoli assai piccoli, si potranno considerar questi come angoli minimi; e però la retta *RT* si potrà considerare come formante angoli eguali colle due rette *TA*, *TD*. Sarà dunque $D : A = AT : TD$. Ma $A = F$ (Teor. I.). Dunque $D : F = AT : TD$. E però $D : D + F = AT : AT + TD$. Ma nel triangolo *FDL* l' angolo esterno $DLO = D + F$. Dunque $D : DLO = AT : AT + TD$. Come D. P.

Corollario I.

4. Se $AT = TD$, sarà $D = \frac{1}{2} DLO$. E questa dovette essere all' incirca la circostanza con cui il Sig. *Lambert* instituì le sue esperienze, quando con un prisma di 60° non trovò la grandezza delle fimbrie se non di $0°.52\frac{1'}{2}$; mentre il Sig. *Newton* trova la dispersione dello stesso prisma di $1°.48\frac{1'}{2}$. (*Beguelin* ibid. §. 30).

Corollario II.

5. Se l' oggetto tocca il prisma in *B*, e l' occhio ne è lontanissimo; in tal caso la ragione $\frac{AT}{AT + TD}$ svanisce, e svaniscono anche le fimbrie colorate, il quale è uno dei fenomeni, che il Sig. *Beguelin* non sa combinare colla teoria (*Beguelin ib.* §. 34). Ben è vero, che se il punto *B* è assai discosto dall' angolo rifrangente *P*, e l' occhio assai vicino al prisma, le fimbrie compariscono anche nell' oggetto che tocca il prisma; ed io difatti, usando la debita attenzione, ve le ho rinvenute. Ma siccome i prismi consueti di

criſtallo non ſogliono permettere molta diſtanza tra *P* e *B*; e ſiccome un occhio, il quale non ſia aſſai miope, non può accoſtarſi molto al priſma ſenza conſonder l' immagine dell' oggetto poſto in *B*; così può avvenire, che a taluno ſembrino in tal caſo ſvanite le fimbrie. Tanto più, che eſſendo $AT < TD$, la retta *TR* piega un poco verſo *F*; onde rimane *D* minore ancora un poco oltre a quanto importerebbe la proporzione del Teorema.

COROLLARIO III.

6. Non può eſſere ſtata altro che inavvertenza quella la quale ha fatto chiedere il Sig. d' *Alembert* (Opuſcul. tom. 3. n. 963), perchè noi non veggiamo colorato l' orlo degli obbietti poſti ſott' acqua, " ſur tout ſi l' oeil eſt.... à une „ aſſez grande diſtance de la ſurſace refringente, pour que „ l'écartement des rayons produiſe un effet ſenſible? „ Giacchè la diſtanza dell' occhio è appunto quella che fa ſvanire le fimbrie.

ARTICOLO II.

Si eſamina coll' eſperienza, ſe gli umori dell' occhio formino una combinazione acromatica; e ſi dà la miſura della loro aberrazione di rifrangibilità.

7. Quando nel 1747 il Sig. *Euler* (*a*) a perfezionare gli iſtromenti diottrici moſſe quei primi sforzi, i quali fra il contraſto delle opinioni fecero poi naſcere le lenti acromatiche; partì egli da queſto principio: " che gli umori dell' „ occhio erano dalla natura diſpoſti in guiſa di riunir tutti „ i raggi partiti da un ſol punto luminoſo in un ſol punto „ della retina, quantunque foſſero i medeſimi raggi diverſi „ fra loro di rifrangibilità „. E con queſto principio medeſimo ſi tenne poi egli forte nella lite agitata con *Dollond* (*a*); ſenza

(*a*) Mem. de Berlin 1747.

(*a*); senza che i suoi avversarj ardissero contrastargli un tale assunto. Anzi degli Ottici posteriori alcuni hanno adottato senz' altro questo acromatismo dell' occhio, come il Conte di *Rederu* (*b*), *Beguelin* (*c*), ed *Hennert* (*d*): altri ne hanno ommesso l' esame, come *Boscovich* (*e*), *Clairaut* (*f*): e finalmente il Sig. *d' Alembert* (*g*) dopo avere proposti alcuni mezzi per assicurarsi del fatto, gli confessa poi egli stesso mezzi intentabili in pratica; e si riduce a concludere, che qualunque sia l' aberrazione dei colori nell' occhio, essa deve essere insensibile e incomparabilmente minore di quella aberrazione, a cui andrebbe soggetta una lente di vetro, la quale volesse sostituirsi agli umori dell' occhio stesso. Quanto ciò sia vero, lo vedremo fra poco. Intanto osservo che il *Newton* avea già nelle lezioni ottiche (Par. 1. Sez. 2. verso la fine) dubitato di questa vantata prerogativa dell' occhio; e quantunque confessi di non sapere alcun fatto, il quale dimostri negli umori di quell' organo la separazione prismatica de' colori; pure egli indica ivi la strada da tenersi per decidere la quistione, strada assai più sicura e più facile della proposta dal Sig. *d' Alembert*. Dirò qui, che siami riuscito di osservare intorno a ciò, e quali conseguenze derivino da tali osservazioni.

ESPERIMENTO I.

8. Ho posto in *A* (*Fig. III.*) (*h*) un obbietto illuminato, per es. il lume d' una piccola candela, o un piccolo foro in una camera oscura. Davanti all' occhio, e aderente a lui ho posto una sottil laminetta di piombo o di cartoncino *BC* traforata con due piccoli pertugi *M*, *N*; lasciando tra questi una

(*a*) Transact. Vol. 48. n. 43.

(*b*) Accad. de Berlin 1759.

(*c*) Accad. de Berlin 1764. n. 38.

(*d*) Differt. sur les Moyens de perfectionner la lunette, qui a remporté le prix a Berlin en 1771 n. 27.

(*e*) Mem. sui Cannoch. diottrici n. 12.

(*f*) Accad. de Paris 1756.

(*g*) Opusc. tom. 3 ch. 3.

(*h*) Nel ripetere questi ed i seguenti esperimenti abbiasi riflessione, che la posizione dell' obbietto visibile è sempre rovescia dell' immagine formata sulla retina.

diſtanza di due linee circa, che tanta e più ancora è l' apertura della mia pupilla nella poca luce. In tal guiſa l'obbietto *A* mandava entro il mio occhio due faſcetti di raggi *AM*, *AN* nel medeſimo tempo. Ho cominciato dal riguardare con queſti due fori inſieme l' obbietto *A*, quando la diſtanza del medeſimo dal mio occhio era di 10, o 12 piedi, cioè quando eſſa era aſſai più in là del termine della viſione diſtinta, il quale per me che ſon miope ſuol eſſere al di qua di un piede. In queſta poſitura ſi ſa che i raggi uſciti dal punto luminoſo *A* ſi raccolgono entro l' occhio in un foco più vicino alla pupilla di quel che ſia la retina medeſima. Nel noſtro caſo ſi univano per eſ. in *XZ*, e divaricando di nuovo andavano a dipingere ſulla retina due immagini dell' obbietto *A* una in *OR*, e l' altra in *SQ*. Or ſe gli umori dell' occhio mandano alla retina uniti i raggi tutti dello ſteſſo faſcetto, quantunque eterogenei; dovrebbero le due immagini *OR*, *SQ* eſſere bianche per tutto, come già ſupponiam che lo ſia l' oggetto *A*. Pur realmente le due immagini non rieſcono di un color uniforme; ma roſſeggiano evidentemente in *R*, *S*, e volgono all' azzurro in *O* e *Q*. Lo che dimoſtra, che il faſcetto *AM* nel rifrangerſi entro l' occhio divideſi ne' ſuoi colori, in guiſa che l' azzurro torcendo più forte dirigeſi in *DQ*, mentre il roſſo ſi rimane in *DS*. Lo ſteſſo fa duopo dir che ſucceda al faſcetto *AN*, ſicchè ne rieſcano poi le due immagini colorate *OR*, *SQ* tali quali ſono ſtate oſſervate da me e da chiunque altro ho eccitato a ripetere l' eſperimento.

9. Veggo, che coſa addur ſi potrebbe contro la forza del recato eſperimento. Potrebbe dire taluno, che l' occhio preſenta bensì alla retina diſperſi e ſeparati i raggi eterogenei, quando queſta è fuori del foco dell' occhio, quando è fuori del punto della viſione diſtinta; ma che nel foco e nel punto della viſione diſtinta eſſo li preſenta raccolti ed uniti. Come una lente poſta in ſito opportuno dietro ad un priſma raccoglie di nuovo i raggi diſperſi dal medeſimo priſma, e li riuniſce bensì nel foco a formar la bianchezza, ma in qualunque altro luogo fuori del foco gli laſcia ſeparati e tinti dei diverſi colori. Così potrebb' eſſere, che per eſ. il criſtallino concentri nel ſuo foco quei raggi eterogenei che la cornea

avea divisi, lasciandoli poi in tutto il rimanente del viaggio separati or più or meno di prima. Se così fosse, dovrebbero i colori apparire qualunque volta il punto raggiante *A* è fuori del termine della visione distinta, e svanire poi in un tal termine. Or di fatti succede, che quando il punto *A* si trova alla distanza richiesta per la visione distinta, vale a dire quando la retina corrisponde al foco *XZ*; in tal caso una sola immagine si vede del punto *A*, e questa vestita di un color bianco uniforme. La risoluzione di questo dubbio nascerà dal seguente

Esperimento II.

10. Ho portato l'occhio munito dei due forellini *M*, *N* vicino all' obbietto *A* più di quel che importi il termine della mia visione distinta, alla distanza per es. di soli due o tre pollici. In tal positura il foco *XZ* delle lenti dell'occhio cadeva al di là della retina; onde supponendo la retina portata in *TV*, l' immagine dell' oggetto si raddoppiava di nuovo in *TH* ed *IV*: ed ambedue le immagini erano tinte agli orli come nel primo esperimento; ma qui erasi rovesciato l'ordine dei colori, e il rosso facevasi vedere in *T*, ed *V*, mentre l' azzurro manifestavasi all' interno verso l'asse dell' occhio in *H*, ed *I*.

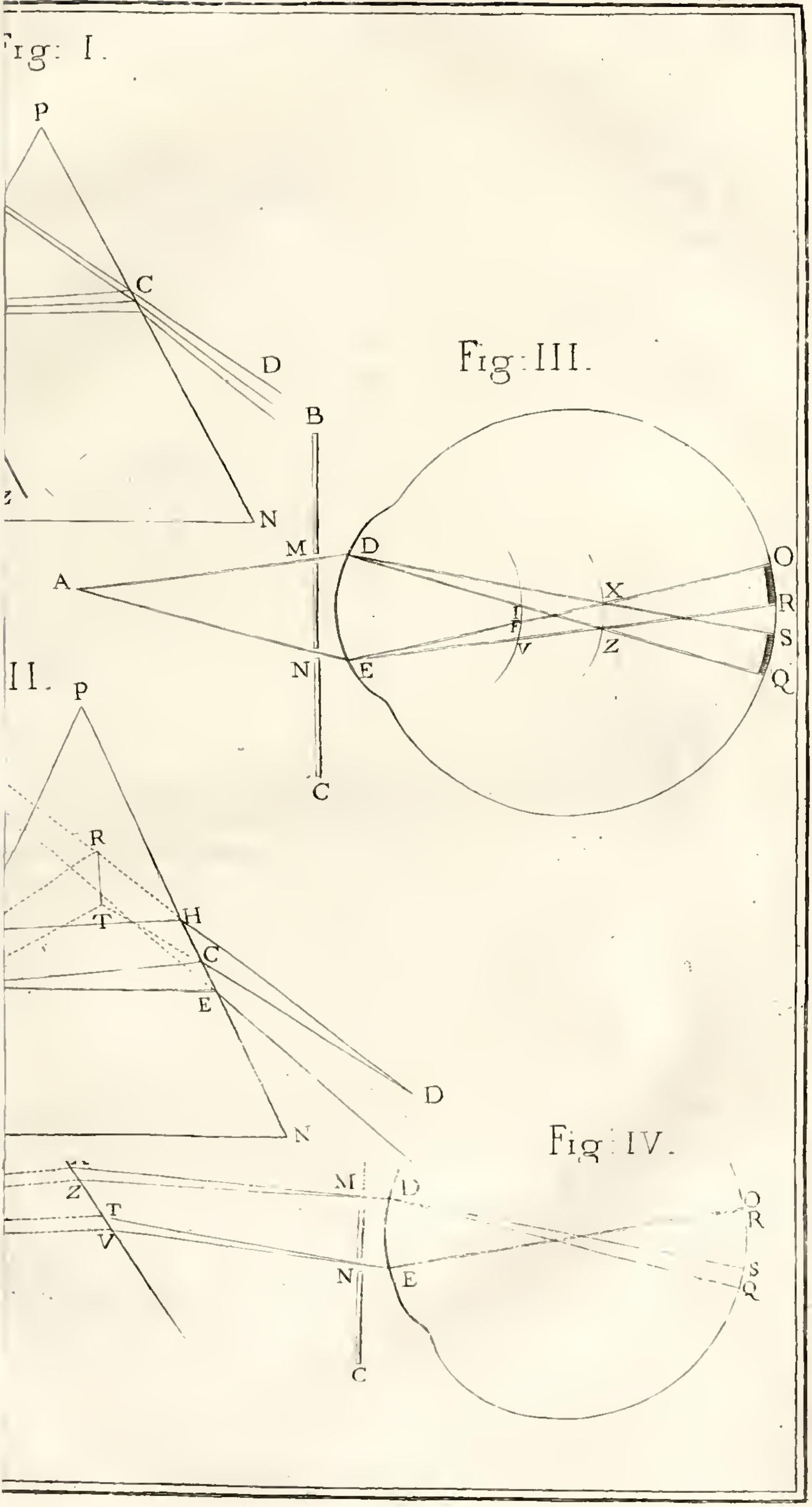
Combiniamo questo esperimento col primo, e vedremo che dopo la rifrazione dell'occhio il raggio rosso del fascetto *AM* scorre al di sotto nella linea *DHQ* sì prima di giungere al foco in *XZ*, che dopo esservi trapassato; ed al contrario il raggio azzurro del fascetto medesimo scorre alla parte superiore nella linea *TXS* sì prima che dopo del foco. Donde si fa chiaro, che dunque i due raggi rosso ed azzurro del medesimo fascetto *AM* non hanno potuto riunirsi nel foco dell' occhio: perchè in tal caso le loro vie si sarebbono ivi incrocicchiate, ed il raggio azzurro da *H* sarebbe andato in *S*, ed il rosso da *T* in *Q*: lo che è contrario all' esperienze precedenti. Quando poi l' obbietto *A* si trova nel punto della visione distinta, e la retina corrisponde al luogo *XZ* del foco; allora una sola immagine si vede e tutta bianca: perchè il raggio rosso *ER* del fascetto *AN* va ad incontrare

in *Z* l'azzurro *DQ* del fafcetto *AM*; e fimilmente in *X* s'incontrano gli altri due raggi eterogenei dei due fafcetti diverfi. Una tal mefcolanza rifufcita il color bianco o quafi bianco; appunto come fuccede ad una lente di vetro, in cui fi prenda per foco totale quello dei raggi di rifrangibilità media.

Pofta così fuor d' ogni dubbio (per quanto a me fembra) la difperfione dei raggi eterogenei entro dell' occhio, mi fono indi accinto a prenderne la mifura, per vedere fe effa almeno fia tanto piccola e difprezzabile, quanto porta l'opinione del Sig. *d' Alembert*.

ESPERIMENTO III.

11. Per un prifma di criftallo, il di cui angolo rifrangente era di 43°. 36′, ho fatto raggiare un punto luminofo *A* (*Fig. IV.*), e ponendomi coll'occhio nella direzione della minima rifrazione del prifma, ho guardato per i due foliti forellini *M*, *N* l' obbietto *A* rifratto dal prifma. Venivano dunque al mio occhio due fafcetti diverfi *AXM*, *ATN*; nel primo de' quali il raggio azzurro veniva per la direzione *XMD*, ed il roffo per *ZMD*, a norma di quanto fi è detto al §. 3. Quefti due raggi fi incrocicchiavano in *D*; ed anche prefcindendo dalla rifrazione dell' occhio, farebbe, dopo il punto *D*, il raggio roffo paffato all' alto, e l' azzurro al baffo, profeguendo così a divergere entro dell' occhio. La rifrazione poi degli umori dell' occhio, operando più forte full' azzurro, che ful roffo, non fa che aumentar vie più la divergenza degli fteffi due raggi, portandoli a formare l' immagine *SQ* roffa in *S* ed azzurra in *Q* con una feparazion di colori più notabile di quel che ebbefi nel primo efperimento, in cui mancava la rifrazione del prifma. Ma nel fecondo fafcetto *ATN* la difperfione dei colori prodotta dall' occhio fi fa in un verfo oppofto alla difperfione prodotta dall' angolo *P*. Onde l' altra immagine *OR* rimane più o men colorata, o colorata anche in ordine rovefcio, fecondo che l' azione difperfiva dell' occhio è minore eguale o maggiore di quello che importi l' angolo *TEV*. Ora l' angolo *TEV*, il quale mifura ora la forza difperfiva dell' occhio in



fi
ungi
çalcoli,

Fig: I.

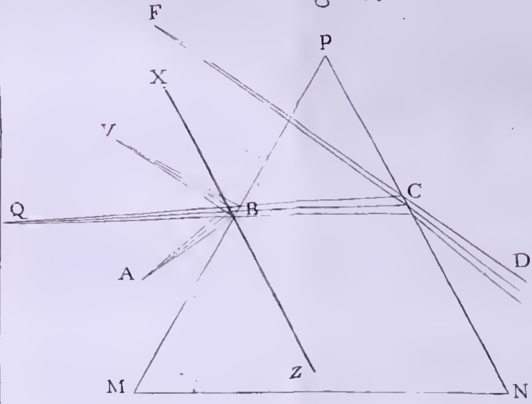


Fig: III.

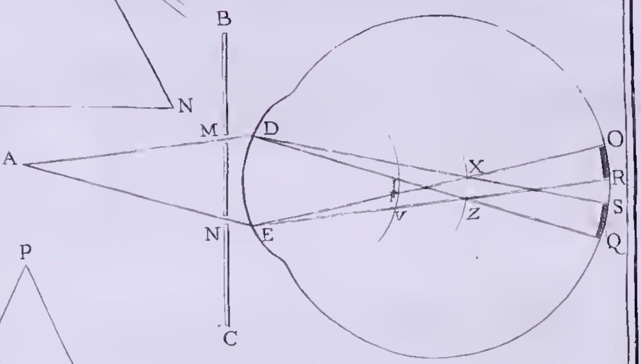


Fig: II.

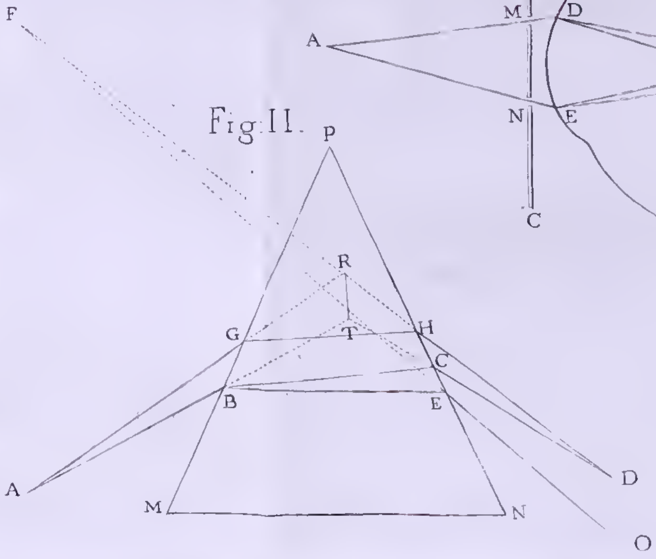
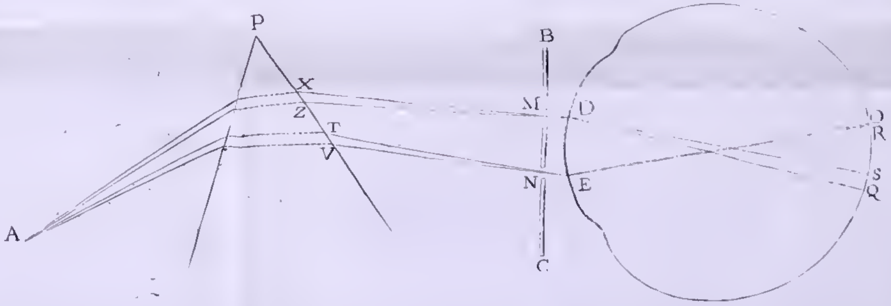


Fig: IV.



E, è pur quel desso che abbiam veduto (§. 3.) misurare la grandezza apparente delle fimbrie colorate, e variare secondo la diversa proporzione, che passa tra le due distanze *AT*, *TE* dell' oggetto e dell' occhio dal prisma. Stando adunque il prisma alla distanza fissa di 9 pollici dalla candela *A*, ed allontanando successivamente l' occhio dal prisma stesso, ho trovato: che l' orlo era azzurro in *R* finchè la distanza dell' occhio dal prisma era minore di 16 pollici; che lo stesso orlo *R* ricompariva tinto in rosso, quando la distanza eccedeva i 36 pollici; e che i colori al senso svanivano tra i 16 e 36 pollici. Prendiamo un termine medio fra i due estremi; e potremo assumere la distanza di 26 pollici quella, in cui i colori svaniscono perfettamente, ed in cui la dispersione dell' occhio corregge affatto l' angolo *TEV* prodotto dal prisma.

12. Calcolando ora da questo esperimento la dispersione che l' occhio cagiona ai raggi eterogenei nel punto *E*, trovo che la dispersione dei raggi estremi tra loro nell' angolo rifrangente *P* riesce di 62'. 26". E l' angolo *TEV* a norma del §. 3. riesce di 16'. 3". Però se il raggio *RE* venisse bianco dall' interno dell' occhio, esso nell' uscire soffrirebbe la dispersione *TEV* di 16'. 3". Supponendo che *DE* sia la superficie di una sfera di vetro comune, e tale che raccolga i raggi alla distanza di 8 pollici, a quanta incirca si raccolgono per gli umori dell' occhio, trovo che il semidiametro di una tale superficie vitrea riesce di poll. 2, 84. E prendendo la *DE* di due linee, riesce nella stessa superficie l' arco *DE* 40°. 40'. Donde computando ricavo, che un raggio bianco, il quale uscisse dalla medesima sfera vitrea nella linea *RET*, soffrirebbe in *E* una dispersione di 16'. 26", che è allo incirca la medesima dispersione, che abbiam trovata negli umori dell' occhio. E però fa duopo dire che l' aberrazione di rifrangibilità nell' occhio non è minore di quella, che si osserva nel vetro; e che per conseguenza essa è ben lungi da quell' insensibile errore che possa non curarsi nei calcoli, e nelle macchine ottiche, come si è fatto finora.

MEMORIA I.

Sulla vera densità de' Pianeti, sulla riduzione de' loro semidiametri, e sull' ipotesi de' loro nuclei.

Del Sig. Ab. LEONARDO XIMENES Matematico di S. A. R. il Granduca di Toscana.

Introduzione, e prospetto delle due Memorie.

1. L' Idea, che mi ha fatta scrivere la presente Memoria, era quella di ben rettificare la densità de' pianeti, che sono corteggiati di satelliti, quali sono Giove, e Saturno: poichè da una parte discordano gli Astronomi nel determinare la caduta de' gravi alla loro superficie, e tal caduta è quella, che ci discuopre la densità, e dall' altra la precisa misura di tal densità era un elemento molto importante per la soluzione di molti Problemi appartenenti alla Fisica celeste. Tali sono le perturbazioni vicendevoli di Giove, e di Saturno, che dipendono dalle loro masse paragonate tra di loro, e riferite ancora alla massa solare. Tali similmente le perturbazioni, che soffrono le comete passando a qualche vicinanza di que' due insigni pianeti, come accadde alla cometa del 1759, che ritardò di più mesi il suo ritorno per tali perturbazioni calcolate con gran profondità dall' insigne Geometra il Sig. de *Clairaut*. L' importanza adunque di questa ricerca mi eccitava a determinare colla maggior precisione possibile la densità di que' due pianeti.

2. Vi era pure un altro scopo per entrare in questa carriera, ed era quello di ridurre a nuovo esame l' ipotesi delle densità de' pianeti adottata dall' insigne *Eulero* l' anno 1754, come leggesi in una sua Memoria inserita negli Atti dell' Accademia di Berlino l' anno sopraddetto 1754. Di tale ipotesi io ho ragionato nel Tomo II. di questa Società

facendo vedere, che detta teoria, secondo la quale le densità de' pianeti esser dovevano in ragion reciproca sudduplicata de' tempi periodici, si allontanava dalla verità, e dal fatto medesimo. Poichè calcolando noi la densità de' detti pianeti independentemente da quella ipotesi coll' uso de' tempi periodici, e delle distanze de' satelliti, e facendo il paragone di detta teoria col calcolo de' satelliti, non poco vi correva tra l' uno e l' altro risultato, come è dimostrato in detta mia Memoria alla pag. 304, e 305 di detto Tomo II. Dove per la combinazione prima vi è la differenza, che passa tra 'l 23 ed il 29, e per la seconda vi è l' altra tanto maggior discrepanza che corre tra 'l 10 ed il 18. Tali differenze, come ognun vede, ci persuadono che le densità, che si deducono dall' ipotesi Euleriana, non possono adoperarsi ne' problemi dell' Astronomia fisica senza errori considerabili: ma avendo io avvertito, che quelle densità, che erano calcolate da diversi Astronomi coll' uso de' satelliti, erano fra loro discrepanti, ho creduto di risalire a tutti gli elementi di detti calcoli, ed a' metodi di eseguirli, da' quali molto dipende.

3. Entrato appena in questo difficil sentiero, conveniva prima d' ogn' altro calcolare la caduta della nostra luna nella sua orbita alla sua media distanza dalla terra. Essendo tal caduta originata dal volume, e dalla densità della nostra terra, essa era la base, sulla quale doveva appoggiarsi il calcolo comparativo della densità degli altri pianeti. Inoltrandomi adunque in questo calcolo, mi si fece innanzi una grave difficoltà, cioè, che la caduta lunare nella sua orbita paragonata alla caduta de' gravi sulla superficie terrestre non era quella, che viene in conseguenza della legge generalissima, ed indubitata de' gravi in ragion reciproca duplicata delle distanze. Gli Autori di Fisica Astronomica mettono una perfetta concordia tra la caduta lunare nella sua orbita e la caduta de' gravi sulla terrestre superficie, supponendo, che la media distanza lunare dal centro terrestre sia di 60 semidiametri terrestri, e che a tal distanza la caduta lunare in 1' di tempo sia appunto di piedi 15. 10 centesime, come accade in 1'' sulla terrestre superficie. Ma per quanto questo conteggio possa passarsi, trattando tal Problema grossolanamen-

te, non può nondimeno accettarsi, volendo procedere con precisione. Essi suppongono due elementi difettosi. Il primo, che la media distanza lunare sia di 60 semidiametri terrestri, quando essa in realtà è minore. Il secondo, che la caduta lunare a tal distanza è di piedi 15. 10 centesime in un minuto di tempo, quando è sensibilmente minore, e per farla giungere a tal valore conviene trasportare la luna alla distanza minore di 59 semidiametri.

4. Non vi era adunque altro compenso per concordare insieme le osservazioni, e la precisione della legge universale della gravità, se non che riportare i moti lunari ad una terra alquanto minore della nostra, riducendo il suo semidiametro ad un altro minore, il quale facesse ben concordare la legge dell' universal gravità.

Si sa, che le dimensioni della terra degli antichi Geografi, che erano troppo grandi prima del Picard, tennero in sospetto il Sig. *Newton* sulla legge medesima, ed egli tardò a pubblicare anzi ancora a compiere il famoso libro dei Principj matematici della naturale Filosofia, finchè non trovò nelle misure del detto Picard un elemento più giusto, che potesse ben corrispondere co' fenomeni delle cadute lunari.

Una nuova ma piccola riduzione del terrestre semidiametro finirebbe di perfezionare il sistema Neutoniano, facendo osservare esattamente la legge del medesimo.

Formati i debiti conteggi ho ritrovato, che impiccolendo tal semidiametro di $\frac{1}{32}$ incirca dell' attuale, e riportando le cadute lunari a tal semidiametro ridotto, il tutto veniva a concordare, e la stessa gravità, che animava i corpi gravi a cadere sulla superficie terrestre, la stessa diminuita in ragion reciproca duplicata delle distanze, farebbe cadere la luna nella sua orbita a tenore delle osservazioni, e misure.

5. Ma per qual ragione, e con quali principj potremo noi ridurre a minor dimensione il terrestre semidiametro? Eccolo brevemente, per dimostrarlo poi a suo luogo. Se la terra invece di avere in tutti i suoi strati dalla superficie sino al centro una costante, ed uniforme densità, come si suppone ne' fenomeni terrestri, e celesti, andasse addensando detti suoi strati tanto più, quanto essi si avvicinano al centro; allora converrebbe immaginare come più addensati gli

strati

strati superiori, per avere una densità uniforme, secondo la quale fosse formata una terra fittizia. Or questa terra sarebbe minore della terra attuale, e questa appunto sarebbe quella, alla quale dovessero riferirsi le cadute lunari.

E se la stessa terra avesse nelle sue viscere delle vaste caverne o piene d'aria, o di vapori, o di acqua, o di un foco centrale, le quali restassero sparse in qua, ed in là, queste vaste caverne gonfierebbero la terra più, che essa non sarebbe senza le medesime. Le materie delle caverne sono di tanta minor densità della terra solida, quanto più leggieri que' fluidi aeriformi, o aquei, o ignei, di cui esse sono ripiene. Per ridurre adunque questa terra ad un'altra tutta ripiena di materia uniforme, e di costante densità bisognerebbe impiccolirla. Ecco intanto due principj certissimi per ridurre a minor valore il terrestre semidiametro.

E se nel centro terrestre vi fosse un ampio nucleo, ripieno esso pure di materia di piccola specifica gravità, esso pure esiggerebbe, che si fingesse un'altra terra tutta ripiena di materia omogenea. Ed ecco un altro principio per impiccolirne il diametro. Onde non solo per le ragioni astronomiche, ma ancora per le fisiche, e geografiche, conviene immaginare una terra alquanto minore della nostra, la quale supponendola tutta ripiena di materia omogenea, e alla medesima riportando i fenomeni della lunar gravità, essi ben corrispondano alle inviolabili leggi della natura.

6. Rettificato, per così dire, il volume terrestre, che era la base delle cadute lunari, ho poi continuato il mio viaggio, salendo prima a' satelliti di Giove, e poi a quelli di Saturno. Calcolando ad una ad una le cadute de' satelliti di Giove restai sorpreso, che il risultato del primo satellite non si accordava co' risultati degli altri tre. La caduta de' gravi alla superficie di Giove non era la medesima secondo il calcolo del primo satellite, e poi degli altri. E similmente la densità di Giove indi dedotta veniva mutando dall' un satellite all' altro, quando, regnando per tutto la stessa legge della gravità, da' quattro satelliti doveva calcolarsi la stessa caduta de' gravi alla superficie di quel pianeta. Prima d' ogn' altro sospettai di qualche errore ne' conteggi di qualche frazione trascurata. Ma ritessendo i detti calcoli con mag-

gior precisione di frazioni, il risultato era come prima, cioè che le cadute de' gravi alla superficie di Giove, e la di lui densità andava cambiando dall' un satellite all' altro. Indi mi cadde in sospetto il metodo di calcolare.

7. Il primo metodo consisteva nel cercare la terza proporzionale tra 'l diametro medio dell' orbita di un satellite ed il seno dell' arco trascorso in un certo tempo, per ottenere il seno verso, che rappresenta la caduta del satellite nell' orbita sua. Benchè in tal metodo dovesse adoperarsi per il primo termine, non già tutto il diametro, ma la sua porzione tagliata dal seno; pure era così tenue il seno verso, che doveva sottrarsi, che il trascurarlo non induceva errore sensibile.

Passai nondimeno al secondo metodo di calcolare il detto seno verso per mezzo della corda dell' arco, il qual arco essendo quasi *nascente* poteva confondersi colla sua corda. Onde formando la terza proporzionale tra 'l diametro e la corda, questo era il seno verso, che ridotto poi in parti reali ci palesava la caduta del satellite nel dato tempo, che doveva esser piccolo.

Fu ritessuto il calcolo, assumendo il tempo maggiore di 1'', per esempio di 10', ed ancora più, affinchè poi l' arco trascorso in 1'' potesse dedursi colla solita analogia de' quadrati delle corde proporzionali a' seni versi. In somma per quanto io mutassi, e perfezionassi il metodo, sempre appariva una gran discordia ne' risultati della caduta de' gravi alla superficie di Giove, e della sua densità.

8. Finalmente fu da me praticato il metodo di assumere immediatamente in tese parigine gli archi trascorsi da' satelliti in 1'' di tempo, e ciò secondo le tavole compilate dal Sig. *Brisson*, e dedotte dalle migliori, e più moderne osservazioni. E succedendo ancora in tal metodo, che mi parve più breve, o più preciso, quella variazione trovata ne' primi metodi, ma molto più regolare, e precisa, posso assicurare, che quanto più i satelliti si allontanano dal centro di Giove, tanto più scema la caduta de' gravi, e la densità di

Giove indi dedotta (*a*). Allora mi venne in pensiero, che quanto mi era occorso nelle cadute lunari, altrettanto succedesse nelle cadute de' quattro satelliti di Giove, cioè, che le loro cadute dovessero riportarsi, non già all' attual semidiametro di Giove, ma ad un altro semidiametro ridotto, come era stato ridotto il terrestre.

Vi possono essere, e vi saranno nel vastissimo corpo di Giove, che è maggiore 1281 volta della nostra terra, caverne tanto più spaziose delle nostre. La densità de' suoi strati dalla superficie al centro esser doveva eterogenea. Chi sa, che un grandissimo nucleo di materia leggiera non sia collocato al centro di Giove?

Or queste naturalissime circostanze unite a' fenomeni de' quattro satelliti potevano indurre una riduzione del semidiametro di Giove, come era succeduto nella terra per le stesse ragioni, e per i medesimi principj.

9. Oltrepassando collo stesso metodo a' satelliti di Saturno, e deducendo da' loro tempi periodici, e loro distanze tanto la caduta de' gravi alla superficie di quel pianeta, quanto la sua densità, l' una e l' altra misura fu trovata variabile, come appunto ne' satelliti di Giove, e ciò che sarà maraviglia si è, che la varietà rilevasi per il medesimo verso, cioè sempre decrescente, quanto più i satelliti si scostano dal centro di Saturno.

10. Pare adunque che possa concludersi, che i pianeti superiori abbiano colla nostra terra la stessa analogia o di vaste caverne ripartite pe' loro corpi, o di strati variabili di densità dalla superficie sino al centro, o di qualche nucleo centrale, che ne aumenti il volume senza accrescerne la massa. Pare che la riduzione del semidiametro sia comune alla Terra, a Giove, ed a Saturno, e che con tal compenso possa felicemente spiegarsi quella differenza di risultati, che turberebbe il sistema inviolabile dell' universal gravità.

Le densità de' due pianeti riescono minori di quello, che

(*a*) La diminuzione della caduta intendesi in paragone di quella, che si calcola colla legge della ragione inversa duplicata delle distanze.

si era stabilito dal Sig. *Eulero*. La caduta de' gravi alla superficie di Giove si calcola minore di quella adoperata da' moderni Astronomi. Essendo sottilissima la presente ricerca, ed occorrendo, per assicurarla, frazioni assai minute di centesime, millesime ecc. io ho preso il partito d' inserire nel calcolo di ciascun satellite, non solamente gli ultimi risultati, come assai spesso si fa per ragion di brevità, ma eziandio tutti gli elementi de' detti calcoli, e tutta la loro tessitura, affinchè sia in potere degli Astronomi di esaminare il tutto, e di riscontrare le operazioni fatte, ed i corrispondenti risultati.

P A R T E I.

Della caduta lunare nella sua orbita, e delle sue conseguenze.

11. Il primo calcolo, che conviene intraprendere per la presente Memoria, si è quello di determinare più accuratamente, che si possa, la caduta lunare nell' orbita sua alla media distanza dal centro terrestre. E siccome tale accuratezza dipende primieramente dagli elementi, che si trascelgono, e poi dal metodo, col quale essi vengono maneggiati; così io procurerò gli elementi delle Tavole più moderne astronomiche, e seguiterò quel metodo, che già è stato accennato nell' introduzione. La sopraddetta precisione è necessaria perchè appunto dalla caduta lunare nell' orbita sua deve desumersi il conteggio intorno alla densità de' pianeti, Giove, e Saturno, che sono stati dalla natura dotati di più satelliti, e questi sono appunto quelli, che colla combinazione della caduta lunare ci palesano la vera densità de' loro primarj, la qual convien paragonare alla terrestre densità, la quale dee riguardarsi, come la base di tutte le altre.

Ora per ottenere un tal fondamento generale, io ho dovuto incominciare dalla terrestre densità, e questa non si può meglio desumere, se non che dalla caduta lunare nell' orbita sua alla media distanza dalla terra. Quando questa sia ben calcolata, noi sapremo, che se Giove, e Saturno fossero dotati della stessa densità, e se un satellite si fingesse, che fosse

diſtante dal centro del ſuo primario, quanto lo è la luna dalla terra, allora la caduta di quel ſatellite eſſer dovrebbe tanto maggiore, quanto lo è il volume di quel pianeta riſpetto al volume terreſtre, giacchè in queſta ipoteſi il volume, e la maſſa ſarebbe la ſteſſa coſa. Sappiamo per eſempio, che il volume di Giove ſupera 1281 volta il volume terreſtre. Onde, eſſendo le gravità in ragion diretta delle maſſe, quando le diſtanze ſiano uguali, in tal caſo la caduta di quel ſatellite di Giove, ſupponendolo alla medeſima diſtanza, dovrebbe godere di una caduta 1281 volta maggiore, che non è la caduta lunare. E così ſupponendo per ora, che la caduta lunare in un minuto nella ſua orbita foſſe di piedi 15, allora la caduta di quel ſatellite fittizio dentro il medeſimo tempo caderebbe verſo Giove piedi 19215.

12. Dal ſatellite fittizio poi ſi fa paſſaggio ad un ſatellite vero, la cui diſtanza dal centro di Giove ſia ben conoſciuta, ed in tal caſo eſſendo la gravità in ragion reciproca duplicata delle diſtanze, dedurremo col ſolito conteggio, qual ſarebbe la caduta del vero ſatellite, ſul ſuppoſto, che la denſità di Giove foſſe uguale alla terreſtre.

Ma per la rivoluzione periodica di tal ſatellite combinata colla ſua media diſtanza, potremo noi calcolare la caduta vera di tal ſatellite, la qual corriſponde alla vera denſità di Giove, e perciò paragonando queſta caduta alla prima, ci faremo ſtrada per dimoſtrare, qual ſia la proporzione tra la terreſtre denſità e quella per eſempio di Giove. Supponendo, che la denſità terreſtre ſia rappreſentata da un numero coſtante, qual ſarebbe il 10000, nelle parti di tal numero potremo noi rappreſentare la denſità di que' pianeti. Ecco adunque, che con quanto maggior preciſione da noi ſarà conteggiata la caduta lunare nella ſua orbita, con tanto maggiore eſattezza rappreſenteremo ancora la denſità di quei pianeti.

Generalmente gli Autori di Fiſica aſtronomica, trattandoſi del preſente Problema, aſſeriſcono, che tanto cade la luna dentro un minuto nella ſua orbita, quanto cadono i gravi circumterreſtri dentro 1″ ſulla ſuperficie della terra. Una tal ſoluzione non è eſattamente vera per il difetto degli elementi, com' è ſtato già rilevato nell' introduzione.

13. La diſtanza media lunare, dedotta colla ſua parallaſſi, batte verſo i 59 ſemidiametri terreſtri. E con preciſione maggiore, ſupponendo la parallaſſi lunare media orizzontale di 58′. 22″, la media diſtanza ſi calcola di ſemidiametri 59. 08 cent. E' bensì vero, che il Sig. Ab. *la Caille* nelle ſue Lezioni d' aſtronomia fa la media diſtanza lunare di ſemidiametri terreſtri 60. 20 cent. (*a*). Ma ſieguono i moderni aſtronomi con piccol divario la ſopraccennata diſtanza di 59 ſemidiametri terreſtri. Ed inoltre, quando ancora voglia aſſumerſi la diſtanza maggiore di ſemidiametri 60, non concorderebbe poi la caduta lunare, la quale ancora a 59 ſemidiametri è minore di piedi 15 incirca, quale ſi oſſerva nella caduta de' corpi terreſtri, come ſi manifeſta da' calcoli ſeguenti. Onde, ſe ſi calcolaſſe la caduta alla diſtanza maggiore di 59 ſemidiametri, molto più eſſa reſterebbe inferiore di prima.

Io adunque aſſumerò la media diſtanza lunare, che trovo regiſtrata dall' inſigne M. *de la Lande*, di leghe franceſi . . . . 84515 (*b*).

14. Il ſemidiametro terreſtre nella ſteſſa Tavola ſi ſuppone di leghe 1432. $\frac{1}{2}$, onde dividendo la diſtanza per il ſemidiametro, la prima tornerebbe di ſemidiametri terreſtri 58. 99 cent., e può farſi di 59. 00 ſenza errore ſenſibile. Il che comprova quanto dianzi ho aſſerito, che i più recenti, e più abili Aſtronomi ritengono la media diſtanza di 59 ſemidiametri terreſtri.

L' altro elemento neceſſario a queſta ricerca ſi è lo ſpazio, che percorre il centro lunare nella ſua orbita dentro 1″ di tempo, che ſecondo il moto periodico lunare, e la ſopraddetta diſtanza ſarà di teſe parigine . . . 513. 75 cent.

(*a*) Nelle dette Lezioni alla pagina 297 al §. 685.

(*b*) Il Sig. *de la Lande* nella ſua Tavola aſtronomica inſerita nel Tomo II. della ſua aſtronomia libro VI. N. 1398 pag. 158, regiſtra la minima diſtanza lunare di leghe franceſi 77577
La maſſima diſtanza di leghe 91454
La media tra queſte due diſtanze è di leghe . . . . 84515. $\frac{1}{2}$

Metodo per dedurre la caduta lunare nell' orbita alla ſua media diſtanza.

15. Il metodo, che a prima viſta ſi preſenta, ſi è quello di calcolare la corda di quell' arco che la luna deſcrive in un dato tempo, per eſempio in un minuto, come è ſtato accennato nell' introduzione. Poichè ſi ſa, che detta corda è la media proporzionale tra 'l diametro dell' orbita ed il ſuo ſeno verſo. Eſſendo adunque tal ſeno lo ſpazio della caduta dentro il dato tempo, di eſſa verremo in cognizione dividendo il quadrato della corda per il diametro dell' orbita. Ma non avendo noi frazioni così minute nelle Tavole aſtronomiche, nè nei logaritmi, corriſpondenti, e dall' altra parte non potendo aſſumere la caduta di un tempo più lungo, per non inciampare in nuove difficoltà, io colla lunghezza de' calcoli mi ſono avveduto, che il metodo più preciſo ſi è quello di aſſumere come uguale alla corda l' archetto, che la luna percorre in 1″ di tempo. E così mi è riuſcito di determinare con ſottigliezza la caduta lunare dentro 1″ di tempo, ed ancora dentro un ſemplice minuto come ſi paleſerà col calcolo.

16. Eſſendo adunque l' arco percorſo in 1″ dal centro lunare di teſe . . . . 513. 75 cent.

Sarà il ſuo logaritmo	2. 7107518
Volendo l' arco percorſo in 60″, ſarà il ſuo logaritmo	1. 7781512
La ſomma ſarà	4. 4889030
E raddoppiando tal logaritmo per il quadrato di detto arco ſarà	8. 9778060
Eſſendo la diſtanza lunare di leghe . .	84515,
Avremo il ſuo logaritmo di	4. 9269338

Or dovendoſi raddoppiare tal diſtanza, e poi ridurla in teſe parigine, delle quali la lega ne contiene 2283, raddoppiandola ſaranno teſe 4566

Il ſuo logaritmo ſarà	3. 6595359
Ed aggiungendovi il logaritmo . . .	4. 9269338

Avremo la fomma di 8. 5864697

La qual fomma detraggafi dal logaritmo dell' arco, e così refterà il logaritmo 0. 3913363

Al qual logaritmo debbonfi tefe parigine 2. 4624,

che fi riducono a piedi 14. 7744,

i quali effendo la caduta lunare alla fua media diftanza in 1' indi è, che la caduta in 1'' fi avrà dividendo per 3600, che è il quadrato di 60'', e farà di piedi . . 0. 004104.

I fopraddetti piedi 14. 7744 fono lontani dalla caduta de' gravi fulla fuperficie terreftre, che fi fa di piedi $15.\frac{1}{12}$. cioè 15. 08.

Che fe dalla lunghezza de' pendoli attuali, da' quali deducefi la caduta, voleffe conteggiarfi un' altra caduta libera dalle forze centrifughe della terra, allora la caduta primitiva de' gravi, cioè quella, che non è affetta alle forze centrifughe, farebbe alquanto maggiore. La caduta lunare nulla dipende dal moto della terreftre rivoluzione attorno al fuo affe, come ne dipendono i corpi gravi, che fon trafportati dal moto diurno. E perciò la vera regola farebbe di prevalerfi della caduta libera da detto moto, per fare il fuo paragone colla caduta lunare. Ben però è vero, che quefta frazione additiva non altera fenfibilmente tutta la ferie del calcolo, e perciò farà da me adoperata la caduta de' gravi fulla terreftre fuperficie di piedi 15. 08.

Diftanza lunare in quel punto, nel quale la fua caduta in un minuto fia uguale alla caduta terreftre in un fecondo.

17. Sarà ben ora determinare qual fia quel punto della diftanza lunare dalla terra, nel quale la fua caduta in un minuto fia precifamente di piedi 15. 08, quale fi offerva nel moto de' gravi fulla noftra fuperficie. Rifolvefi un tal Problema col noto Teorema, che le cadute de' gravi a diverfe diftanze da un pianeta, o dal Sole medefimo, fiano fecondo la ragione reciproca duplicata delle refpettive diftanze. Sarà pertanto, come la caduta di piedi 15. 080 millefime alla caduta di piedi 14. 775, così il quadrato della diftanza media al quadrato della diftanza domandata.

Il

Il logaritmo del quadrato della diſtanza media in leghe ſarà	9. 8538676
Il logaritmo di 14. 775	4. 1696744
Somma de' due logaritmi	14. 0235420
Logaritmo di 15. 080	4. 1784013
Che detratto laſcia il reſiduo di . .	9. 8451407.
La cui metà, cioè la radice della nuova diſtanza ſarà	4. 9225703,
a cui corriſpondono leghe	83671.
Eſſendo adunque la media diſtanza lunare di leghe	84515
La differenza ſarà di leghe	844,

che ſarà il punto inferiore alla diſtanza media lunare, dove la ſua caduta in 1′ uguaglia la caduta terreſtre in 1″.

Or dividendo le dette leghe 83671 per 60; ne verrà il ſemidiametro ridotto della terra di leghe 1394. 51 cent.

Eſſendo il ſemidiametro attuale di . .	1432. 50,
La differenza ſarà di leghe franceſi . .	37. 99,

e può farſi di leghe 38 ſenza divario ſenſibile.

Queſte leghe formano la groſſezza di quello ſtrato terreſtre per giugnere al ſemidiametro ridotto. E ſiccome le leghe 38 moltiplicate in ſe medeſime fanno aſſai proſſimamente la grandezza dell' attual ſemidiametro di 1432. 50; così immaginando, che tal ſemidiametro reſti diviſo in 38 parti uguali, ciaſcuna di queſte parti agguaglierà proſſimamente le dette leghe 38. E da queſto poi naſce la proporzione del ſemidiametro attuale al ſemidiametro ridotto, come il 38 al 37.

18. Col vocabolo di *ſemidiametro ridotto* io intendo quello che moltiplicato 60 volte giugne a quel punto della diſtanza lunare, dove la caduta di queſto pianeta rieſce di piedi parigini 15. 08 in un minuto, quanta è in 1″ la caduta de' gravi ſulla terreſtre ſuperficie. Tal riduzione però rieſce indiſpenſabile, non ſolamente per queſto titolo, in cui la legge dell' univerſal gravità viene a corriſpondere con preciſione alle cadute lunari, ma eziandio per altre ragioni, le quali ſoggiugnerò.

19. Prima però di produrre tali ragioni, mi conviene avvertire, che vi è un altro metodo molto più breve per

ridurre detto femidiametro terreftre. Poichè noi fappiamo la caduta de' gravi alla diftanza media lunare, fecondo il calcolo fatto. Sappiamo quella della terreftre fuperficie, e la media diftanza lunare dalla terra. Onde fecondo il Problema III. inferito nella mia Differtazione ftampata a Livorno nel 1776 alla pag. 119, potremo immediatamente determinare il femidiametro terreftre ridotto, il quale, fecondo l' anneffa nota (*a*), tornerà di leghe 1394. 30 cent. come nel primo calcolo, colla tenue differenza di 31 centefimo.

Ma il femidiametro attuale è di leghe . .	1432. 50.
Onde la differenza farà di leghe	38. 20.

Ed ancor quefto confronta col primo calcolo.

Non faccia maraviglia, che nella foluzione di detto III. Problema la differenza fia di $\frac{1}{64}$, e qui torni di $\frac{1}{11}$. Poichè ivi la caduta lunare in 1′ fi fa di piedi 14. *966* parti millefime, ma in realtà effa è di 14. 774 millefime. Effendo adunque verificata la differenza di leghe 38, di effa mi fervirò ne' calcoli di quefta materia.

Della riduzione del femidiametro, e dello sferoide terreftre, e fue ragioni.

20. A quanto è ftato accennato nell' introduzione aggiungerò, che confiderando la noftra terra non folamente fulla fua fuperficie, ma ancora nelle fue vifcere findove può giugnere l' umano intendimento, rileveremo primieramente le

---

(*a*) Logaritmo della diftanza lunare in leghe di 2283 tefe, la qual diftanza è di leghe 84515 . . . . 4. 9269338

Suo doppio	9. 8538676
Per ridurre la caduta lunare in fecondi fi detragga il log. di 3600, cioè	3. 5563029
Refiduo	6. 2975647
Logaritmo additivo	1. 1694981
Somma	7. 4670628
Log. fottrattivo del 15. 08	1. 1784015
Refiduo	6. 2886613
Metà	3. 1443306,

A cui fi devono leghe 1394. 30 cent. Ma il femidiametro attuale è di leghe . . . . 1432. 50; Onde la loro differenza farà di leghe . . . . 38. 20, come nel primo calcolo.

vastissime caverne, che da pertutto si trovano, e che pur si argomentano dal frequente fenomeno di tanti terremoti. Le vaste eruzioni de' vulcani, che da tempo immemorabile vanno minando i profondi strati della terra, ci fanno ben comprendere le immense caverne sotterranee, dalle quali è stata rapita la materia combustibile, formandone de' monti altissimi, e di ben ampia circonferenza. Il solo monte Etna nella Sicilia ce ne porge una qualche idea. Poichè esso sorge ad altezza prodigiosa, che dicesi esser di miglia 3 sopra la superficie del mare. La sua base oltrepassa notabilmente le 20 miglia, e questo grandissimo cono talmente posa sopra una vasta pianura, che ci fa congetturare esser composto della stessa materia scavata nelle sottoposte viscere della terra. Ed ecco così indicata una delle più grandi caverne, che sono sparse nel corpo terrestre a più, e diverse distanze, e profondità. Altre caverne poi sono indicate dalle acque, che da esse sgorgano, come succede nel territorio Modanese. E non mancheranno pure altre caverne ripiene di pura aria, e collocate qua e là a diverse profondità dello sferoide terrestre. Or questi spazj cavernosi ingrandiscono il volume terrestre più, che non richieggono i suoi pesanti fossili, e minerali, i quali, se dovessero tutti addensarsi, senza frapporre tanti spazj vacui disseminati qua e là nelle viscere della terra, certa cosa è, che detta terra diventerebbe più piccola, e se essa si concepisse di una densità uniforme in tutte le sue parti uguale alla massa presente, ma senza le interposte caverne, tanto più scemerebbe il terrestre semidiametro ridotto. Dall' altra parte finora i fenomeni celesti, e specialmente i moti lunari sono stati tacitamente considerati, come originati da una terra di costante ed uniforme densità. Onde pare indispensabile, che sia ideata un' altra terra senza parti cavernose, e tutta manipolata con materia uniformemente densa dalla superficie fino al centro.

21. Oltre a questa prima ragione delle parti cavernose, una seconda può rilevarsi dal sentimento di alcuni moderni Filosofi, che alla terra attribuiscono un fuoco centrale, vale a dire un nucleo concentrico alla superficie terrestre, che somministri alla terra il suo calore, il quale non può essere certamente prodotto in quelle insigni profondità di centina-

ja di piedi dalla luce, e riscaldamento solare, e dall' altra parte si osserva il calor profondo sotterraneo di 10, e più gradi da M. *Reaumur*. Una cagione certamente va destinata a questo general fenomeno sotterraneo, il quale secondo alcune sperienze nelle maggiori profondità si osserva maggiore, e non vi è cagione più naturale di quella del fuoco centrale. Qualunque siasi quel vasto nucleo, non può dubitarsi, che quando si concepisce riempito colle materie superiori della terra, esso ne minorerebbe il semidiametro.

22. Altri poi potrebbono ricorrere a que' grandi abissi di acque, nominati nella Sacra Genesi, nella quale si dice in occasione del diluvio, che si aprirono le cateratte del grande abisso della terra. Le acque ancora sono di piccola specifica gravità rispetto a' fossili terrestri, e perciò ancora in questa ipotesi la total pienezza della terra, e la uniforme densità de' suoi strati esiggerebbe un minor diametro. Tutto questo è stato indicato nell' Introduzione, ma bisognava provarlo, come ora si è fatto.

23. Non deve inoltre omettersi una nuova considerazione sulla teoria della terra. Quando ancora non vi fossero nè le vaste caverne, nè il fuoco centrale, nè gli abissi delle acque, è cosa assai naturale a credere, che gli strati terrestri concentrici alla superficie, e considerati a diverse profondità fino al centro, non siano di una costante densità, ma che essendo i punti inferiori tanto più aggravati dalle colonne superiori, quanto i primi più si accostano al centro terrestre, la loro densità vada gradatamente crescendo, non essendovi tra' nostri solidi alcuno, che non abbia elasticità, e compressibilità.

In tal considerazione vi sarà una scala di densità, in qualunque modo essa possa idearsi, nella quale le densità vadano crescendo dalla superficie terrestre fino al suo centro. E le semiordinate alla detta curva, benchè variabili, possono però avere una tal semiordinata, che sia media, e ragguagliata tra le altre infinite. E così l'area di quella curva sarebbe uguale al rettangolo composto della media semiordinata, e del terrestre semidiametro. Non altrimenti accade in questa materia, che in molti altri casi della Fisica, ne' quali ha luogo la presente teoria. Se per modo di esempio un

corpo elaſtico, qualunque eſſo ſiaſi, reſti aggravato da' peſi ſuperiori, ſempre maggiori all'infinito, non vi è dubbio, che le inferiori denſità del corpo elaſtico debbano eſſere rappreſentate da ſemiordinate maggiori, che poi vadano decreſcendo ne' punti di minor carico, e perciò di minor compreſſione. Se il corpo ſia di perſetta elaſticità, allora la linea delle compreſſioni, o ſiano denſità ſarebbe eſpreſſa da una ſerie di ſemiordinate triangolari, e così potremo concepire le compreſſioni della noſtra aria atmosferica, che è di grande elaſticità. Ed in fatti così lo perſuadono le ſperienze, riſtringendoſi l' aria in uno ſpazio reciprocamente proporzionale al peſo, che le ſovraſta.

24. Quando però detta elaſticità, e compreſſibilità ſia del tutto imperſetta, come nelle materie terreſtri, allora la curva delle denſità ſarà differentiſſima dalla ſcala triangolare. Sempre però ſarà vero, che di qualunque natura, e proprietà rieſca detta curva, eſſa avrà una media ſemiordinata, la quale ſia inferiore alla ſuperficie terreſtre, o che poſſa bene rappreſentarci l' uniforme denſità di una terra fittizia, la quale abbia la medeſima maſſa diverſamente diſpoſta nel noſtro sferoide.

Ma ſe tutto lo sferoide voleſſe immaginarſi della ſteſſa denſità del ſuo centro, che è la maſſima, allora non deve queſta ricerca regolarſi colla media denſità, ma deve di tanto ſcemarſi il primo ſtrato della ſuperficie ſino ad una certa profondità, che con eſſo ſtrato addenſandoſi le maſſe meno denſe, venga a formarſi una uniforme denſità. E queſto è il caſo preſente. Per adoperare la media denſità verrebbe ad accreſcerſi la denſità degli ſtrati ſuperiori, e diminuirſi quella degl' inferiori. Ma laſciando tali ſtrati inferiori nella loro maggior denſità, che diminuiſce il volume dello sferoide, e quel volume, che ſi toglie nel primo ſtrato di un trenteſimo ottavo del raggio, ſia immaginato, come diſtribuito per il reſiduo della materia meno denſa, allora la maſſa terreſtre ſarà ridotta a quella coſtante denſità, che ſi deſidera.

25. Ora le cadute lunari appunto ci accennano, che diminuendo il volume terreſtre collo ſtrato ſuperiore di profondità di leghe 38, e diſtribuendo la materia di tal volume per gli altri ſtrati meno denſi, poſſa concepirſi una ter-

ra fittizia di densità costante di semidiametro minore di dette leghe 38, la qual corrisponda alla caduta lunare.

Ritornando ora all' ipotesi de' nuclei centrali, la quale non senza motivo piace a' moderni Filosofi, potrebbe determinarsi il loro semidiametro nella maniera seguente.

Dimensione del nucleo centrale vacuo secondo le predette ipotesi.

26. E' stato adunque dimostrato, che per far concordare insieme le cadute lunari colla precisa legge dell' universal gravità, potrebbe idearsi una terra fittizia, il cui semidiametro fosse minore del semidiametro attuale di una parte trentottesima del medesimo. E perciò, come è stato detto, sarebbe 'l primo semidiametro al secondo, come il 38 al 37. Si sa dall' altra parte, che tutti i solidi somiglianti, come sono gli sferoidi del nucleo, e della superficie terrestre, sono in ragion triplicata de' loro semidiametri, o generalmente de' lati omologhi. Sarà pertanto il cubo delle

parti 38. di 54872

E il cubo del 37 50653

Sarà la loro differenza di parti . . . . 4219.

E tal differenza ci esprime la ricubatura di quello strato terrestre della grossezza di leghe 38, il qual ricuopre tutto il solido della terra ridotta. Ma questo solido deve essere uguale al volume del nucleo centrale. Onde, calcolando la radice cubica del medesimo, essa rappresenterà il suo semidiametro. Essendo pertanto tal radice cubica di parti 16. 16 cent., avremo così rinvenuto il semidiametro del nucleo paragonabile al semidiametro della terra presente, che qui è rappresentato dalle parti 38. 00

Perciò saranno dette parti 38. 00 alle parti 16. 16, come il semidiametro del nostro sferoide a quello del nucleo.

Se ora si desiderasse lo stesso nucleo in parti millesime, si calcoli l' analogia, come il 38. 00 al 16. 16, così il 1000 al quarto proporzionale, che sarà di parti . . . 425.

27. Riesce adunque di gran vastità il detto nucleo centrale, il cui semidiametro è di parti millesime 425, cioè prossimamente $\frac{2}{5}$ del semidiametro attuale della terra.

Se il fuoco centrale fosse racchiuso in questo vastissimo nucleo, non solamente potrebbe tramandare quel calore, che si sperimenta nelle parti superiori della terra nelle grandi profondità, ma ancora potrebbe servire per la spiegazione di altri più insigni fenomeni, che non appartengono al presente argomento. Ma comunque siasi, o questo nucleo sia una figura reale, o esso sia una figura ideale, per racchiudervi coll' immaginazione tutte le cavità della terra, sarà sempre vero, che la terra attuale sarà di volume maggiore di quella, che è necessaria per la spiegazione de' celesti fenomeni della gravità.

Ma nell' altra ipotesi della densità variabile degli strati terrestri senza alcun nucleo potrà benissimo rappresentarsi la terra ridotta ad una costante densità, la qual costanza faccia impiccolire il terrestre semidiametro nella già riferita proporzione del 38 al 37.

Deve ancora rilevarsi, che secondo i numeri già descritti la media distanza del centro lunare dalla terra sta alla distanza di 60 semidiametri ridotti assai prossimamente, come il 100 al 99. Poichè paragonando la differenza delle due distanze, che è di leghe 844 colla distanza media lunare, tal differenza riesce molto vicina ad una parte centesima della media distanza. E perciò sarà la distanza media lunare alla distanza ridotta, come il 100 al 99.

28. Concluderemo adunque, che tal semidiametro terrestre ridotto non solamente corrisponde alle cadute lunari, secondo il sistema dell' universal gravità, ma corrisponde ancora alle fisiche considerazioni della terra medesima, cioè alle sue concavità, a' suoi nuclei, alle sue variabili densità.

Curioso sarebbe il risultato, se quanto è stato detto, e provato finqui su i fenomeni terrestri, e sulla riduzione del suo attual diametro, si trovasse ancora verificato nelle cadute de' satelliti di Giove, e di Saturno, come pure ne' nuclei de' detti pianeti, ovvero nelle variabili densità degli strati concentrici, o al centro di Giove, o di Saturno. Converrà adunque premettere il calcolo delle cadute de' detti satelliti, converrà paragonare i risultati di un satellite con quegli di un altro, per osservare, se essi siano omogenei, o eterogenei. Converrà finalmente dedurre, che una riduzione

di ſemidiametro di que' pianeti competa aſſai bene ad eſſi, come alla terra. Il primo oggetto è ſtato quello di fiſſare con preciſione la denſità di detti pianeti. Il ſecondo di eſplorare la caduta de' gravi alla lor ſuperficie. Non meno però è intereſſante la terza ricerca di rinvenire all' incirca qual ſia la teſſitura interiore di detti pianeti, che potrà eſſere indicata da' moti de' loro ſatelliti.

Il penſiero, col quale ſi entra in detti calcoli, ſi è ſempre quello di ritrovare la ſteſſa denſità, la ſteſſa caduta de' gravi per mezzo de' quattro ſatelliti di Giove, e de' cinque di Saturno. Ma a' primi paſſi di queſto ſentiero mi ſono accorto, che co' moti periodici, e diſtanze di diverſi ſatelliti, diverſa ſi conteggiava la denſità del pianeta principale, come pure la caduta de' gravi alla ſua ſuperficie. A queſti primi paſſi dubitai da principio, che l' inugualtà naſceſſe dalle frazioni traſcurate. Onde incominciai ad introdurre ne' calcoli le più ſottili frazioni, che molto più mi dimoſtravano l' inugualtà de' riſultati. Diverſi pure ſono ſtati i metodi di calcolare, ed in ogni metodo paleſavaſi la ſopraddetta varietà de' fenomeni. Alla fine mi è caduto in penſiero, che potevanſi ridurre i ſemidiametri di que' pianeti all' incirca, come ſi è fatto nel terreſtre ſemidiametro, ed allora apparve tutta l' uniformità, benchè i riſultati ſiano diſcordi tra di loro. Tutto ciò ſi renderà paleſe nella parte II., III., e IV. della ſeconda Memoria.

DI VARIE MINERE

Di metalli, e d' altre ſpecie di foſſili delle montane provincie Venete di Feltre, di Belluno, di Cadore, e della Carnia, e Friuli; e ſpecialmente del ſale catartico amaro a baſe di magneſia ſcoperto recentemente in quelle montagne.

MEMORIA MINERALOGICA E CHIMICA

Del Sig. GIOVANNI ARDUINO Profeſſore di Mineralogia, e di Chimica metallurgica, e Pubblico ſopraintendente alle coſe Agrarie dello Stato Veneto.

LE minere di metalli, e d' altri foſſili che ſervono agli uſi umani, prodotti dalla natura nelle parti interne dei monti, ſono il ſuggetto d' un ramo molto eſteſo ed utile dell' induſtria e commercio di moltiſſimi paeſi d' Europa e d' altre regioni. Grande e perenne profitto ſe ne trae nel vaſtiſſimo Impero di Ruſſia, particolarmente nella Siberia; e e nei Regni di Svezia, di Danimarca, nella Novergia, di Pruſſia, di Polonia, Boemia, e Ungaria: e così pure nell' Annovereſe, nella Saſſonia, nel Bannato di Temiſvar, nella Tranſilvania, e nella Stiria, Carniola, Carintia, Tirolo, Salisburgheſe, e nell' Auſtria; ed in altri molti Stati della Germania, e nell' Inghilterra.

Non trovandoſi la Metallurgia molto coltivata nelle vaſte provincie del Regno di Francia, quell' illuminato Regio Governo, contemplando i vantaggi di quegli Stati, ne' quali tal arte con ben inteſa pratica proſperamente ſi eſercita, ha con Reale Decreto del Conſiglio di Stato del dì 16 Marzo 1783 fondato un Collegio minerale per l' iſtruzione di parecchi Giovani nelle Scienze e Arti biſognevoli a poter divenire abili Metallurgi. Dopo che delle medeſime trovanſi a ſuf-

ficienza inſtruiti, vengono inviati ad apprendere la pratica delle arti *Montaniſtica* (*a*), e *Metallurgica* (*b*) ne' luoghi della Germania, dell' Ungaria, e d' altre provincie, dove le arti ſteſſe da gran tempo con iſquiſita eſperienza lucroſamente ſi eſercitano. Di quel Regio Inſtituto, già dettagliatamente riferito nel Tomo ſettimo del nuovo Giornale d' Italia, che qui ſtampavaſi dal fu Librajo *Benedetto Milocco* (pag. 407 e 408), io n' ebbi informazione nell' autunno di detto anno 1783 dal Sig. Capitano *Stoutz* di Naſſau, Ingegnere delle Minere di S. M. Criſtianiſſima, mentr' egli, inviato dal prefato Collegio con altri due Alunni dello ſteſſo, *Lefebre*, e *Haſſefratz*, alle Minere di Carintia, Stiria, Ungaria ecc., venne a vedere i Minerali da me raccolti.

La fondazione di tale Collegio ha il provvido oggetto d'avere nel Regno ſoggetti inſtrutti e pratici di quanto abbiſogna alla buona condotta delle impreſe minerali, ſenza uopo di Mineriſti foreſtieri, troppo diſpendioſi, e non di rado mancanti di probità, o di quelle cognizioni, che al buon eſito delle montaniſtiche e metallurgiche operazioni ſono neceſſarie. Affinchè però gli Alunni, inviati ad apprendere la pratica delle arti dianzi nominate in eſteri paeſi, non poſſano abuſare del tempo, e del danaro, che loro ſi dà, viene a' medeſimi limitato il periodo della loro dimora in ciaſcuno dei luoghi a' quali vengono diretti; e debbono in capo a ciaſcun meſe dar conto a' Preſidenti del Reale Collegio minerale del da loro oſſervato, delineato, ed appreſo; traſmettendo anche a' medeſimi li da loro rilevati diſegni delle fabbriche, macchine e ſtrumenti, sì dei lavori ſotterranei, ed aggiacenze eſteriori, che dei forni, e delle altre coſe appartenenti alle ſcavazioni, ed ai preparamenti, fuſioni, e purificazioni dei minerali.

Tali ſono le provvidenze, ch' io inteſi dal prefato Capitano *Stoutz* eſſere ſtate inſtituite dal Regio Conſiglio di Sta-

(*a*) L' arte montaniſtica comprende nel ſuo ſignificato tutto ciò che concerne ai lavori che ſannoſi nei monti per lo ſcavamento delle Minere.

(*b*) Metallurgia, o ſivvero arte Metallurgica abbraccia nella ſua ſignificazione tutto ciò che appartiene al preparamento dei minerali eſcavati, ed alla ſeparazione dei metalli, o d' altre utili ſoſtanze, che contengono, dalle parti eterogenee.

to, e postesi in pratica, onde per l' avvenire avere nel Regno dei soggetti abili, per scienza e pratica, a promovere e dirigere fruttuosamente lavori minerali in quelle provincie, dove parecchie vene metallifere sono note, e di moltissime vi apparifcono gl' indizj; come rilevasi da varie Opere pubblicate.

Lo Stato Veneto non manca certamente di produzioni del Regno fossile, sì metalliche, che d' altre diversissime specie e qualità. Le sue provincie, dette di Terraferma, confinanti verso il nord con le alpi del Dominio Austriaco, e con altri Stati, hanno tutte a quella parte vasta estensione di montagne, molte delle quali sono metallifere. Per tali sono note alcune di quelle del Friuli, e della Carnia, di Cadóre, e dei Capitanati di Zoldo, e d' Agordo nella provincia Bellunese; e quelle del Feltrino limitrofe coll' estero distretto di Primiero. Metallifero è anche quel tratto di monti prossimi alla Terra di Schio nel Territorio di Vicenza, situati tra il monte Summano e le alpi d' Arsiero, di Posena, e di Recoáro. Gran porzione delle montagne Salodiane, Bresciane, e Bergamasche è pure della medesima qualità; cioè la serie d' esse montagne la più settentrionale, terminata al nord dalle alpi del Principato Vescovile di Trento, e da quelle de' Grigioni. Tra le parti montuose della terra io distinguo coll' aggiunto di metallifere quelle sole, che costano di quei generi di pietrosi e terrei materiali, tra li quali, oltre al ferro, sogliono trovarsi le minere di altri metalli. Il ferro, o sia il di lui principio terreo, è si generalmente sparso, sótto diversissime forme e modificazioni, nel Regno fossile, anche dove l' altre sostanze metalliche non s' incontrano mai, che se dar si volesse l' epiteto di metalliferi a tutti i monti che ne contengono, svanirebbe ogn' idea di conveniente distinzione. Nelle prefate metallifere montagne, che da me talvolta diconsi anche minerali, veggonsi ancora in più luoghi gli scavamenti in molto numero di mi-

nere (*a*) metalliche, e d' altri foſſili, fattivi ne' traſcorſi ſecoli con lavori di lunga durata e di grande diſpendio: ſegni non dubbj che profittevolmente ſi conducevano. Ora giacciono però, per la maſſima parte, da gran tempo abbandonati; nè vi ſono in attuale eſercizio di lavoro che varie cave qua e là ſparſe di marmi e d' altre pietre, di ſabbie per varj uſi, e di coti e di mole da arrotare ferramenti, di macine per mulini, di terre colorate per Pittori, di antraci bituminoſi, detti carboni foſſili, e d' argille figuline comuni, e bianche porcellaniche. Quanto a' metalli: numeroſe fodine di ferriferi minerali, come ne' paſſati tempi, anche oggidì ſi lavorano nelle montagne dei Territorj Breſciano e Bergamaſco; grande minera di rame ſi eſcava nel Belluneſe; una di argento vivo ſi è riaperta, non ha guari, nel Feltrino, e nelle montagne di Cadóre eſtraggeſi in più luoghi gran copia di pietra calaminare, che diciamo giallamina, e con eſſa anche della galena, o ſivvero minera di piombo ſulfurea.

Oltre alle cave e ſegni degli antichi lavori minerali, ancora riconoſcibili nelle teſtè mentovate montagne, ne fanno pure teſtimonianza parecchj monumenti ſtorici, e d'altri generi. Io diverſi ne ho già raccolti, maſſimamente circa le antiche fodine dell' argento, e d'altri metalli delle Vicentine montane ſituazioni; ma perciocchè non è mia intenzione di parlare per ora, che di alcune di quelle, sì de' paſſati ſecoli, che de' noſtri tempi, delle alpi Carniche, Cadorine, Belluneſi, Feltrine, e Friulane; e ſpecialmente delle recenti ſcoperte fatteſi in quelle parti d'un ſale ſimile a quello d'Epſom, detto ſale d' Inghilterra; così non farò che riportare que' ſoli di tali monumenti, che alle medeſime alpine provincie ſono relativi.

Il dottiſſimo *Giorgio Agricola*, Mineralogo ſommo del ſuo

(*a*) Mi ſi perdoni ſe a me piace di ſcrivere minera e minere, non miniera e miniere, benchè così ſia l'uſo di parlare e di ſcrivere. Minera, a mio parere, ſarebbe termine proprio e ſpecifico per dinotare una vena o fodina di cinnabro, ſe minio, ſecondo gli Antichi, ancora ſi chiamaſſe; come diciamo argentiera, ramiera, ferriera ecc. Siccome non ſi dice minierale, nè minierali, ma minerale e minerali; così credo lecito il termine minera ecc. uſato da alcuni vecchj Scrittori, eſſendo già ugualmente inteſo.

tempo, e grande maestro delle arti Montanistica e Metallurgica, nel libro terzo *de natura Fossilium*, dove indica i luoghi ne' quali trovavansi minere di allume, dice che dello stesso erane nel Norico *ad Julium Carnicum*, il qual luogo assicura *Cluverio* essere l' odierno Zulio della Carnia (*a*) che in antichi tempi fu con altre parti del Norico abitata da' Taurisci.

Quei Barbari possedevano nelle alpi Noriche minere d' oro molto ricche, le quali da ciò che se ne legge parmi rilevarsi ch' erano, se non tutte, parte almeno nei monti del Friuli, ed anche forse della Carnia. Il sopraccitato *Agricola*, nel suo secondo libro *de veteribus & novis metallis* dove delle minere aurifere fa menzione, dice avere *Polibio* lasciato scritto che i Taurisci nel Norico escavavano l' oro, il quale, scavata la terra alla profondità di due piedi, tosto vi si trovava, parte così puro che di sè non perdeva che un ottavo del suo peso nella purgazione al fuoco, e parte era bisognoso di più forte purgamento nelle fornaci. Dalli di lui sì brevi cenni però non si ha verun indizio delle Noriche situazioni di tali minere: ma bensì da ciò che se ne legge in *Strabone* scrittore moltissimo più antico (*b*).

Praeterea Polybius auctor est (così ivi leggesi tradotto) *sua aetate apud Aquilejam, & in Tauriscis, praecipue in Noricis, auri solum ita ferax fuisse repertum, ut exhausta duum pedum altitudine terra, statim occurreret aurum fossile, fossum autem XV. pedes non excessisse, fabae aut lupini quantitate, octava tantum parte decocta: aliud majori quidem diffusione indiguisse, sed ea admodum utili.... Nunc omnia ista auri metalla Romani possident*. Ed in altro luogo dice esso *Strabone* (*c*) *Extra Venetiae fines Aquileja est, flumine vero ab alpibus descendente disterminatur, per quod sursum navigatur ad urbem usque Norejam..... Habet hic locus auri lavacra & secturas ferri praeclaras*.

Pp iij

(*a*) *Philipp. Cluverii introduct. ad universam Geographiam &c. Lib. III. Cap. XXIV.*

(*b*) *Strabon. Rerum Geographicarum. Tom. prim. Lib. IV. Amstelodami apud Joannem Wolters MDCCVII.*

(*c*) *Strab. de situ orbis &c. Tom. primo Lib. V. Lugduni apud Gabrielem Coterium. MDLVII.*

Cluverio, parlando dei Norici, asserisce (*a*) che *Noreja*, dalla quale trassero il nome, sopra Aquileja era situata; e dichiara poi ch' era dessa nelle vicinanze di Venzone, *circa Venzonum Noreja fuit, Tauriscorum urbs, qui inde postea Norici trans alpeis dicti* (*b*).

Venzone, castello situato tra le alpi Giulie, è alla Carnia vicino; e s' è vero che ivi esistesse detta città dei Taurisci, ed i Lavacri dell' oro, convien credere ch' esso metallo da' luoghi di là non molto distanti si escavasse; e quanto al ferro, di cui fa pur cenno *Strabone*, è noto esserne in più siti di quelle montagne, e che molto n' è stato escavato nei monti tra la Pontebba e Venzone, alla parte destra del torrente Fella, che passando dalle alpi superiori tra le due Pontebbe, Austriaca, e Veneta, scende a scaricarsi nel fiume Tagliamento.

L' asserzione di *Cluverio* però, che Noreja fosse prossima a Venzone, non si uniforma punto al testo di *Strabone*, da cui si fa distante mille e dugento stadj da Aquileja. Ma *Giovanni Candido* ne' suoi Commentarj Aquilejesi (*c*), dimostrando esservi manifesto errore di fatto dove leggesi in detto testo Straboniano *extra Venetiæ fines Aquileja est &c.*, rende credibile essere lo stesso *mendoso* anche rispetto alla prefata distanza, come tale egli lo giudica in più altri luoghi. Lo stesso *Candido*, facendo cenno delle minere, che al dominio d' Aquileja appartenevano, ci ha lasciato scritto: *Sunt & abstrusorum metallorum felices divitiæ. In Hydria namque apud Tulminum ætate nostra argentum vivum, quod alibi parce inveniri ajunt, abunde adeo efluit, ut &c..... argenti & ferri inexhaustæ venæ e monte Primerio supra Juliam subfodiuntur: ærisque e monte Crucis, ubi arx Turonis, nunc solo æquata, impendebat* (*d*): *& plumbi vis ingens ex Ebrontio* (*e*), cioè Auronzo di Cadore.

Vannuccio Biringuccio, gentiluomo Sanese vissuto nel secolo XVI., soggetto nelle cose metallurgiche molto versato,

---

(*a*) *Cluver. Lib. III. Cap. VI.*

(*b*) *Cluver. Lib. III. Cap. XXIV.*

(*c*) *Joannis Candidi, Commentariorum Aquilejensium, Lib. primo.*

(*d*) Monte Primerio o Primosio, e monte Croce sono nella Carnia.

(*e*) *Joann. Candid.* loco citato.

nel libro da lui intitolato *Pyrotechnia*, dove parla delle minere d' argento, e lauda sopra tutte le da lui visitate nel Tirolo ed in altri luoghi, quelle che allora cavavansi dai monti di Schio nel Vicentino (*a*), fa anche menzione di quelle della Carnia, dove una aveane coltivata nel monte, cui dà egli il nome di *Avanzo*, che dovette poi abbandonare per la guerra dell' Imperatore Massimiliano contro la Veneta Repubblica, la quale rese quei paesi inabitabili. Ci ha pure lasciata memoria delle minere del medesimo prezioso metallo delle Carniche montagne anche *Vincenzio Scamozzi* nel Libro VII. Cap. XXXIII. del suo Trattato d' Architettura.

Il Sig. Canonico *Niccolò Grassi*, Parroco di Cercivento in essa provincia della Carnia, dove nelle sue *Notizie Storiche*

(*a*) Le minere dei monti vicini a Schio, che si sa essere state ne' passati secoli le più doviziose di argento, si escavavano dai colli del Tretto, sopra a' quali giace l'alta montagna di Lovegno. Molte di quelle antiche Cave sonosi turate nelle loro bocche con le terre e pietre cadutevi, ed alcune restano ancora aperte e permeabili. Le più vaste e profonde, e per ogni verso in mille guise diramate, sono quelle che nomansi il Pozzo di San Patrizio, nelle quali io scesi nell' autunno dell' anno 1741, accompagnato da quattro di quei Canopi, che cavano dai medesimi colli l'argilla bianca ad uso di Porcellane, e d'altri figulini lavori; e mi vi trattenni alquanto più di quaranta ore osservando, e andando in cerca di qualche rimasuglio dell' argenteo minerale, di cui non mi riuscì trovare che qualche particella qua e là sparsa nel duro macigno: tanta fu la diligenza degli antichi cavatori nel raccoglierlo ovunque ne scoprivano. Il *Biringuccio*, nella sua Pyrotechnia, dice che sapeva essersene trovato di così ricco, che conteneva il quarto, e talvolta la metà per cento d' argento. Io di quello, che allora, ed in altre posteriori indagini ho potuto proccurarmi, ho fatto saggio docimastico, d' onde avere qualche certa idea di sua ricchezza in detto metallo; e benchè fosservi commiste delle pietrose inseparabili eterogeneità, m' ha reso argento in ragione di cento trentadue oncie, o sivvero di marche sedici e mezzo per ogni libbre cento d' esso minerale; il quale è di colore quasi nero, pochissimo sulfureo, e misto di rame, e di zinco, con eruggine verde ed azzurra, in matrice di selce nericcia, ed anche di spato ponderoso bianco: vi è anche tal volta congiunta della galena di minuta cristallizzazione ed oscura. Galena simile vedesi in più siti di quei colli scarsamente sparsa in matrici di spato ponderoso bianco; ma non ha, oltre al piombo, che circa un' oncia d'argento per ogni cento libbre; e di questa non fecero gli Antichi verun conto. Fatto da me conoscere quale si fosse il ricco minerale, che colà da' medesimi escavavasi, ad uno di que' Canopi, detto *Marco Pozzan*, ne ha egli rinvenute traccie in una di quelle vecchie Cave; e s' è già incominciato ad inseguirne la vena. Vi ha anche ritrovate bellissime concrezioni stalattitiche, dette impropriamente Flos Ferri, venustamente ramificate, e di nivea bianchezza.

della medeſima, ſtampate in Udine nell' anno 1782 per li *Fratelli Gallici*, fa menzione delle minere di quelle montagne, così ne parla. " Non va priva queſta provincia di mi-
„ niere. Nel monte Primoſio, in vicinanza alla villa di Tima-
„ vo, come ancor in Agrons, villa del Canale di Gorto, ſi
„ veggono oggidì i buchi delle Cave, onde eſtraevanſi i mi-
„ nerali d' argento. Nelle pertinenze altresì di Cercivento,
„ in un boſco detto d' Agalt, già anni ſono, fu ſcoperta
„ una miniera d' argento.... Parimenti nel contorno di For-
„ no Avoltri già due ſecoli ſi eſtraevano miniere, che pur-
„ gate davano diverſi metalli, ed avea di eſſe la inveſtitura
„ un Nobile Molin Patrizio Veneto: vedeſi tuttora una par-
„ te di edifizio diroccato, ove chiamaſi Cà Molin. Vi ſi tro-
„ vano anche marmi di un bel miſchio in molti luoghi del-
„ la Carnia, de' quali ſe ne fanno varj uſi, ſiccome ſervir
„ poſſono alle fabbriche al pari di molti altri d' Italia. Nel
„ Canale di San Pietro in vicinanza al villaggio di Rivalpa
„ v' è una miniera di pietra viva di color piombino, la
„ quale è molto atta per le fabbriche del paeſe. Viene ſca-
„ vata, indi in varie guiſe colà lavorata da que' Rivalpeſi,
„ arteſici aſſai pratici in tal meſtiere. In oltre dal monte
„ di San Pietro ſcaturiſcono certe acque, chiamate in noſtra
„ lingua *Pudie*, calde d' inverno, e fredde d' eſtate, e che
„ conſervano colore ed odore ſulfureo. „

Nei monti del diſtretto di Cadóre, ſituato al ponente della Carnia, e alla ſteſſa contiguo, ſonoſi coltivate minere di ferro, e di piombo, fino circa alla metà del corrente ſecolo. Quelle del ferro eſcavavanſi in *Chierſiè* di Cibiana, in *Crot*, e *nel Col di Santa Lucia*; e per la loro fuſione vi furono tre forni: uno in *Cavril*, uno nel comun di *Borca*, ed il terzo nel diſtretto di *Zoldo* nel Belluneſe. In queſto medeſimo diſtretto ſi è anche ſcavata, per lungo tempo, una minera di ottima galena (*a*) nella valle *Inferna*, da cui eſ-

traevaſi

(*a*) *Plumbum ſulphure mineraliſatum Galena*. Waller. *Syſtema mineralogicum*.

traevasi piombo così puro e buono quanto quello tanto pregiato di *Bleyberg* della Carintia (*a*).

Fodine di piombo sussistono ancora oggidì in attualità di lavoro utile nei monti Cadorini della Comunità di Auronzo (*Ebrontium*) cioè nei luoghi denominati *Argentiera*, *Pian di Barco*, *e Grinia*. Il minerale piombifero è galena, o sia piombo dallo zolfo mineralizzato; e vi si trova congiunta in copia grande giallamina (*lapis calaminaris*), la quale è il principale movente dei lavori che vi si fanno, doviziosa essendo del terreo principio, o sia calce dello zinco, o zingo; e quindi ottima e molto utile per la conversione del rame in oricàlco, che diciamo ottone, e meno impropriamente latone: e ciò con insigne aumento del di lui peso.

Gl'imprenditori sono Tedeschi: le fodine di *Pian di Barco*, e di *Grinia* appartengono, in affitto, agli Eredi *Kopsgutter*, e la loro giallamina conducesi alla fabbrica di latone a *Schwatz* nel Tirolo. Quelle dell' *Argentiera* sono affittate al Sig. *Giuseppe Kaltner* di Salisburgo, e la giallamina delle di lui cave trasportasi alla sua fabbrica di latone da essa città poco distante. Egli, trovandosi qui in Venezia, mi disse che ogni condotta di detta sua giallamina, col mezzo di muli, dall' Argentiera alla di lui fabbrica nel Salisburghese, viaggio pel quale impiegansi tredici giorni, viengli a costare quattro fiorini il centinajo di libbre: prova evidente della molta importanza di siffatto minerale, di cui abbondiamo senza che qui uso alcuno se ne faccia. Un mio Amico pratico di quelle montagne m' ha recati saggi di giallamine da lui trovate in più luoghi delle medesime, e particolarmente nelle appartenenti al Capitanato di Zoldo. Trovansene pure, benchè per lo più sotto altre forme, cioè di *blendi* (*b*), nei

(*a*) Essa, ora abbandonata, piombifera fodina del Zoldese, appartenente a S. E. Sig. *Gio. Carlo Grimani* Veneto Patrizio, è prossima al villaggio di Arsiera del Comune di Fornasiga. Ne cessò il lavoro per esterne vicende, non per mancanza di continuazione della materia metallica; la quale, a parere d' intendenti, potrebbe scavarsi ancora con utilità, ma la grave spesa necessaria per dare scolo all'acqua di quelle cave a pozzo, ora sommerse, è la causa che da niuno abbiasi poi avuto coraggio di ripigliarne l' impresa.

(*b*) *Zincum sulphure & ferro mineralisatum. Pseudo galena, &c.* Waller. *Systema mineralogicum*.

monti minerali Vicentini, e nelle metallifere montagne Bresciane e Bergamasche.

Una vena di galena ricchissima di piombo coltivavasi da' Tedeschi, già molti anni, nel monte *Giao* della Comunità di San Vito, dove il distretto di Cadóre confina col Tirolo: e nei monti dell' Agordino Capitanato altra vena piombifera è stata, non ha guari, scoperta la quale è una galena di minuta, granulosa, ed oscura cristallizzazione, con mescolanza di minera di ferro di forma arenosa, molto fosca e retrattoria.

Nello stesso Agordino Capitanato è la *Valle Imperina*, in cui sono le profonde e vaste fodine, e le fonderíe del rame, note col nome di Minere di Agordo. Il minerale che vi si escava, e da cui traggesi zolfo, vetriuolo, e rame, è pirite ferreo-cupreo-sulfurea, generatasi in copia grandissima, e veramente maravigliosa sotto essa valle, tra le sotterranee parti di monti di diversa natura; uno al sud della stessa, di sasso calcario rozzo *calcareus rudis*, l' altro al nord, di schisto corneo *fissilis corneus*, *Horn schieffer* de' Tedeschi (Waller. *System. mineralogicum*). Anticamente, oltre ai minerali che somministravano solamente del rame, se ne scavavano anche di quelli che unito al rame davano argento, ed avevanvi le loro proprie vene; come rilevasi con indubitabile certezza dalle Memorie esistenti nell' Officio del *Magistrato Eccellentissimo sopra le Minere*, e specialmente dal Libro, o sia Processo segnato A. e N.° 16. in cui sono scritti gli accordi, le controversie, litigi, e atti corsi nell' Officio Minerale di Agordo, tra li diversi possessori di quelle antiche Cave, dalli 9 Febbrajo dell' anno 1568 fino alli 20 pur Febbrajo del 1570. Nella carta che porta il numero 1218 si legge in una scrittura del Magnifico *Jacopo di Priuli* contro il Magnifico *Angelo Molin*, che avanti la grande inondazione e ruina accaduta nell' anno 1567 erano state cavate e cernite vene di argento dalla buca di San *Fioriam*, la quale nel susseguente anno 1568 chiamavasi di Sant' *Agnese*. Nelle carte segnate 1226 e 1227 sta registrato un Proclama del Vicario Generale delle Minere per l' *Eccellentissimo Magistrato sopra le Acque*, pubblicato in Agordo li 28 Dicembre di detto anno 1568, col quale, oltre alle regole e discipline ordinate pel

ſiſtema generale di quei lavori minerali, e dei boſchi ecc., vi ſi comanda che tutto l' argento debba paſſare alla Zecca, con queſte preciſe parole. " In eſecuzione delle leze et par„ te ſopra ciò diſponente, inerendoſi a più Proclami in que„ ſto fatto, ſi notifica a cadauna perſona ſia chi ſi vogli „ che debbano portar, o ver mandar tutti li arzenti che „ trazerano dalle minere imediate quelli affinati in Venezia „ in Zecca; ſiccome ſono per ogni debito e raſon obbligati „ in la bolletta del Spet. Vicario ſotto tutte le pene etiam „ di contrabando in dette leze et parte contenute „.

In una ſcrittura poi, regiſtrata nelle carte 1244, e 1245, del Magnifico *Antonio da Molino*, Poſſeſſore di alcune di quelle Cave, contro una domanda di M. *Andrea Barpo*, tra varie altre particolarità, gli dice " quanto alla ſeconda par„ te di eſſo Mandato circa corer delle vene ſeparatamente „ li dico che le vene che ſi cavano nella buſa di S. Feliſe „ ſono vene d' arzento, et quelle che ſi cavano nella buſa di „ Sant' Agneſe ſono da rame, le qual a niun partido ſe die„ no meſcedar, ne confonder inſieme, ecc. „.

Da' Capitoli propoſti li 6 e 8 Febbrajo dell' anno 1570 nel Vicariato Minerale di Agordo da *Pietro Buono* ed *Emiliano* fratelli *de' Pietroboni* dello ſteſſo paeſe; e dalle depoſizioni con giuramento ſopra li medeſimi di quattordici teſtimonj a tale oggetto legalmente citati, riſulta, come leggeſi nel ſopraddetto Proceſſo dalla carta 1362 fino alla ſegnata 1370, ch' eſſi *Pietroboni* poſſedevano molti carati dei minerali che ſi eſtraevano dalle Cave nominate *S. Bartolomeo*, *S. Silveſtro*, *S. Marco*, *S. Felice*, *S. Agneſe*, *S. Rocco*, *S. Sebaſtiano*, *S. Anna*, e *S. Maria*; dalle quali fu ſtimato poterſene eſtrarre annualmente circa ſettantaduemila miſure formanti, a un di preſſo, centoquarantaquattro mila centinari, ciaſcuno de' quali dava in quel tempo ſolitamente dalle tre fino alle cinque libbre di rame raffinato. Vi ſi legge pure che nella cava *S. Marco*, ed in altre diverſe delle prenominate eranvi filoni di minere di rame e argento da poterſene cavar annualmente diciottomila miſure; cioè da trentaſei mila centinaja di libbre all' incirca.

Tanto numero di fodine, e sì copioſe di minerali, dove di ſolo rame, dove di rame e di argento, ſotto la predetta

valle, e monte dell'Imperina, e montagna di Gona, ed anche nel canale del Mis, coltivate in que' tempi da molti particolari nominati nel prefato Processo, col decorso di anni restarono, non so per quali strane vicissitudini, onninamente abbandonate, e se n'è perduta la traccia, rispetto a quelle di argento, in modo tale, che i tentativi fattivi in questo secolo per rinvenirne le vene sono riusciti vani e di pura perdita.

Quanto al minerale piritoso, da cui anche oggidì traesi zolfo, vetriuolo e rame, per le notizie statemi comunicate da chi vi ha ingerenza, fu un *Francesco Crotta*, dal quale deriva l'Eccellentissima Famiglia patrizia dell'istesso nome, che nell'anno 1615, per cessione avuta da certo *Angeli*, ne intraprese l'indagine; e continuati li sotterranei lavori inutilmente, anzi con gravissime perdite, fino circa al 1629; ebbe allora la felicissima sorte di scoprirne grandissima e doviziosa vena, d'onde se ne sono tratti in seguito rilevantissimi profitti per lui, pe' suoi successori, per il pubblico, e per altri, che v'instituirono in progresso particolari lavori; ed a beneficio non lieve di quelle montane popolazioni. Presentemente però non vi si esercita la metallurgia che a conto pubblico, e dell'Eccellentissima Famiglia *Brandolini*, trovandovisi le cave Crotta, e degli altri investiti di quei sotterranei lavori, parte pericolose, parte altamente sommerse dalle acque di detta valle Imperina, per li subissamenti e rovine accadute in varj tempi di alcune delle caverne, che dicono Zecche, ridotte di troppo enorme vastità a forza di trarne la metallifera materia, senza la necessaria cautela di lasciarvi li bisognevoli sostegni.

Delle minere di rame di Agort, o Agordo, trovasi fatta menzione dal celebre *Emanuele Swedemborgio* nel suo Trattato che ha per titolo *Regnum subterraneum sive minerale de Cupro & Orichalco &c. Paragraf. XIII.* Ne ha pure scritto dottamente e con pratica conoscenza il Nob. U. Sig. *Agostino Soderini*, patrizio Veneto, in tre Lettere sopra l'Arte metallica, pubblicate l'anno 1716 nelli Tomi 26. 27. e 28 del Giornale de' Letterati d'Italia, stampato in Venezia da *Gio. Gabriello Ertz.* Tra l'altre varie particolarità mineralogiche, egli vi spiega come di quei minerali si formino le *roste* per torrefarli, e

scacciarne così molto dello zolfo che contengono; e come dello stesso non poco vi si raccolga: come, dopo torrefatti, se ne scelgano le porzioni utili da fondersi, dette *tazzoni*, e se ne cavi il rame; e come dalla rimanente calcinata materia, non fusibile con utilità, si estragga per lisciviazione e confetti il vetriuolo, e se ne precipiti il rame che vi si trova disciolto, col mezzo del ferro posto nelle caldaje di piombo, mentre nelle medesime si fa bollire e svaporare il liscivo vetriuolico fino al grado espediente per la cristallizzazione di tale specie di sale metallico.

La materia metallifera, di cui costano quelle grandissime vene di detta valle Imperina, è tutta pirite, ma non però omogenea, varia essendo, rispetto specialmente al rame, che unito al ferro, ed a terra non metallica, vi si trova dallo zolfo mineralizzato. La migliore, cioè la più ricca di rame, che là col nome di *vena* dall' altra si distingue, è d' un giallo analogo a quello dell' ottone, tale che ci viene dalle fabbriche dove si forma; ma quella che poco ne contiene, nomata *Chisso*, dal Tedesco *Kiess*, è d' un pallido cinericcio, imitante il colore del misto metallico detto *bronzo*. Questo *Chisso* forma il massimo corpo di quei cumuli, o grandissimi filoni che sieno, e la *vena* testè mentovata vi è dentro sparsa, dove molta, dove poca, e dove scarsissima e rara. Vi si è trovata qualche volta framischiata anche della galena di minuta grana come d' acciaro, molto compatta, assai sulfurosa, e contenente col piombo dell' argento. Io conservo tra li miei minerali alcuni pezzi di quella, che incontravasi non di rado negli scavi minerali dell' Eccellentissima Casa Crotta, la quale via si gettava come materia inutile, anzi dannosa molto alla riduzione del rame; e davasele il nome improprio d' antimonio.

Avvegnachè de' sopraddetti piritosi minerali, dopo che stati calcinati, o come dicono, arrostiti, molto vetriuolo si ottenga con la lisciviazione, svaporamento, e cristallizzazione; nondimeno sarebbe inconveniente il dar loro il nome improprio di *piriti vetriuoliche*, considerate nello stato originale, e prima ch' abbian sofferta alterazione. Imperocchè nelle piriti non esiste nativamente il vetriuolo, ma bensì lo zolfo, dalla scomposizione del quale esso deriva. L' etiologia della

vitriolizzazione delle piriti trovasi già sì dottamente descritta in parecchie delle Opere di celebratissimi Chimici, ch' io non istarò a farne qui superfluamente repetizione. Agiugnerò solo a questo proposito che lo zolfo entra essenzialmente nelle piritiche concrezioni, una essendo delle loro sostanze costituenti, anzi quella per cui piriti si nomano. Lo stesso può estrarsene a piacere, sì con appropriati dissolventi, che col mezzo della distillazione; ma non così il vetriuolo, se non se dopo che, per sopravvenuta alterazione, e nuova modificazione del combinamento de' loro principj atti a produrlo, non siavisi generato: lo chè è parimente vero rispetto alla formazione dell' allume, quando la di lui terra specifica trovasi mista nel naturale piritoso composto.

Ora ritornando a favellare della valle Imperina, la quale discendendo dalla montagna di Gona (così chiamata nel secolo XVI.) scorre verso oriente a scaricare le sue acque nel Cordevole, uno dei formidabili influenti del fiume Piave, le minere, delle quali ho sopra parlato, secondano con la sotterranea loro estensione in lunghezza l' andamento della medesima valle; come appare da' disegni rappresentanti diverse delle fattevi escavazioni, esistenti nell' Officio degli Eccellentissimi Signori *Deputati* dall' *Eccelso Consiglio di Dieci sopra le minere*.

Partendosi dall' Imperina, e valicato il monte di Gona, scendesi, progredendo verso occidente, nella valle delle Monache, detta anche valle alta, la quale divide il distretto di Agordo, provincia Bellunese, dal Territorio di Feltre; e più in alto, dove nomasi valle Pezzea, confina il Feltrino con l' estere Pertinenze di Sagron della Contea di Primiero.

Prossime all' alveo d' essa valle delle Monache, dalla quale deriva il torrente *Mis*, discendente tra rupestri scoscese montagne a scaricarsi nel fiume Piave, io visitando quei luoghi nell' autunno dell' anno 1744 vidi grande quantità di scorie delle minere che colà escavavansi. Le medesime minere, e gli edificj fusorj, che ivi furono, nell' anno 1570 appartenevano alli sopraddetti fratelli *Pietroboni* d' Agordo, come rilevasi dal precitato Processo, dal quale appare che il metallo estratto dai minerali di quella valle, detta allora canale del *Mis*, era il rame.

Nei monti appartenenti al territorio Feltrino, che costeg-

giano la prefata valle nel destro suo lato, si è, non ha guari, escavata minera cinerea di rame molto ricca di argento, sparsa a filoncini, a spruzzi, e massette, per entro grosso filone di minerale ferreo spatiforme di colore castagno. Ne ha cessato il lavoro perchè a certa profondità l' argentifera materia, per quanto ho inteso da chi ne aveva la direzione, troppo scarsa s' incontrava, e la spesa di andarne in traccia riusciva troppo gravosa, e l' esito incerto.

Nella medesima catena de' monti Feltrini, dov' essi confinano con quelli della Contea di Primiero, mediante la dianzi nominata valle *Pezzea*, sonovi delle vene di argento vivo mineralizzato, o come da altri vuol dirsi, mascherato dallo zolfo sotto la consueta forma cinnabrina. Vi è disposto a piccioli filoncini in matrice argillosa d' un cinereo nericcio, tra pietre calcarie; ed il cinnabro, entro sparso in essa matrice, è sovente misto con piriti ferreo-sulfuree, che stando esposte all' aria non tardano molto a cadere in satiscenza e vitriolizzarsi: come ho veduto nei saggi che ancora ne conservo.

Nel suddetto anno 1744 io vidi le cave che allora vi si facevano a conto Pubblico; e dopo qualche tempo fui presente a parecchie distillazioni dell' argento vivo dalle materie minerali colà raccolte: operazioni che si effettuavano nell' Officina detta di *Partioro* del fu Sig. *Antonio Cason* in quest' inclita Capitale. Ne cessò poi il lavoro, forse per non bene diretta economia; e quelle mercuriali sodine rimasero lungo tempo totalmente abbandonate. Ora però sonosi nuovamente aperte a spese di particolari investiti, ma i minerali che se ne raccolgono non più qua si trasportano; essendosi conosciuto assai più economico il farne distillare nel luogo istesso, d' onde si cavano, il mercurio: lo che si eseguisce con storte di ferro suso, come si pratica nel Ducato di Dueponti ed in altri vicini paesi per le minere di simil fatta.

Ho da più Soggetti inteso dirsi, che in quei contorni, ed in qualche altro luogo delle montane provincie, che ho già anteriormente nominate, sienſi trovati indizj di vene mercuriali; ma non ne è però stato ancora intrapreso alcun lavoro, pochissimi essendo quelli che vogliano impegnarsi in imprese sì dispendiose, e di troppo rara utile riuscita. Trattan-

dosi nondimeno di argento vivo, ora molto accresciuto di prezzo, e così facile da estrarsi per distillazione da' suoi minerali, non solo con vasi, ma anche con gran forni, come si fa nelle famose grandissime minere mercuriali di Almaden della Spagna, e d' Idria nella Carniola; e senza bisogno di quei vasti dispendiosi edificj, che pel trattamento dell' altre minere metalliche sono necessarj; esso sembrami meritevole di accurate indagini, e di ben intesi e diretti tentativi dove trovasi dare di sè chiari segni.

Agli studiosi della Fisica del regno fossile mi lusingo possa esser gradevole il riflesso che le vene metallifere state finora scoperte nelle suddette valli, Imperina, delle Monache, Pezzea, sonosi trovate o tramezzo, o vicine al congiugnimento delle montagne calcarie, dette anche cretose, con quelle di schisti cornei, e quarzoso-micacei, detti *Eneuss* dai Sassoni Mineristi, e d'altre varie sorti d'analoga vitrescente, o non calcinabile natura (*a*).

Le

(*a*) Calcarie io nomino le montagne e l' altre parti della terra, che constano di pietrosi, o terrei materiali riducibili dal fuoco in calcina caustica, chiamate marnose dal Celebre Sig. *Guettard* (*Parallele entre le Canadà & la Suisse*). Il Celebre Sig. *Fourcroy* (*Leçons elementaires d' Histoire naturelle & de Chymie.*) dà il nome di creta alla pietra calcaria cruda, e d' acido cretoso a quello nella stessa contenuto, detto da altri aria fissa, e acido aereo dal Cavalier *Bergman* (*Opusc. physic. & chemica*), dal quale la calcaria cruda è detta *calx aerata*, e *calx pura* quella spogliata, per calcinamento, da tale acido, e resa caustica.

Quanto poi alli pietrosi materiali componenti li monti, che ho nomati schistosi, non si creda già che sieno di quel genere di schisti formatisi per acquee deposizioni di limo, e d' altre terrose materie, come si conosce dal parallelismo dei loro strati e delle loro sfoglie, e dai resti, ne' medesimi non rari, di animali e di vegetabili, per lo più marini. Quelli, de' quali ho qui parlato, molto, a mio parere, ne differiscono e per origine, e per varj altri rispetti. Essi sono di quel genere di pietre cornee schistose, che in alcune Memorie, e nel mio Saggio chimico-mineralogico particolarmente, furono da me considerate appartenere alle parti visibili del nostro Globo di primeva antichità. Il Celebre Sig. Cavaliere *Wallerius*, nelle sue Osservazioni sopra le pietre cornee (*System. mineralogic.*) stima che sieno riferibili alle primogenie, dicendo: *In quantum huc usque notum, nulla in hoc genere petrificata adhuc sunt observata: credibile itaque hos lapides ad primogenios esse referendos, quum & non raro compositionem saxorum ingrediantur.* Io pure mi manifestai di simile parere fino dall' anno 1759, per quelle osservazioni e ragioni da me allora addotte nella seconda di dette due Memorie epistolari inserite nella nuova Raccolta d' Opuscoli Calogeriana, e più diffusamente ancora nel Saggio qui sopra accennato.

Le vastissime congerie di monti, che dalle nostre piane campagne ergendosi gradatamente, s' estendono sino alle valli teste nominate, sono, generalmente parlando, e prescindendo dai prodotti vulcanici, d' indole marnosa, e calcaria a strati, ne' quali trovansi non di rado immersi e petrificati i gusci di marini testacei. Alle medesime valli veggonsi terminare tali vastissime e molto alte calcinose moli, ma non più stratose, nelli suaccennati monti schistosi ecc., che alle medesime succedono. La linea separatoria, o sia di confine tra così differenti qualità di lapidose materie può osservarsi continuata per tratti lunghissimi attraverso il Tirolo, e per altre provincie; com' io indicai nella seconda di due Memorie Epistolari, dirette al Chiarissimo Cavalier *Antonio Vallisneri*, Pubblico Professore d' Istoria Naturale nell' Università di Padova, nel 1759, da lui fatte inserire nel Tomo sesto della nuova Raccolta d' Opuscoli ecc., dell' Ab. *Calogerà* qui stampata dal Sig. *Simon Occhi*.

Quanto poi alle diversità d' origine, di materie, e di fenomeni, che costituiscono la reale visibile differenza tra li presati due ordini di montuose parti della terra, ne ho ivi trattato, ed ancora più diffusamente nel mio *Saggio fisico-mineralogico di Lythogonia e Orognosia*, pubblicato nel Tomo quinto degli Atti della R. *Accademia delle Scienze di Siena*, e poi anche, aumentato ecc., nel Tomo XI. del *Giornale* d' Italia per l' anno 1775, stampato dal fu Sig. *Benedetto Milocco*, ed in una Raccolta da lui pubblicata d' alcune delle mie Memorie, e di miei amici, ristampata poi in Lipsia tradotta in Tedesco.

Dalle minere metalliche delle soprannomate montagnose provincie passo ora, come sonomi proposto anteriormente di voler fare, a dare contezza delle recenti scoperte fattevi del Sale catartico amaro a base di magnesia, non punto diverso dai più pregiati sali di tal fatta, de' quali fa uso la Medicina. La terra, cui si dà il nome di *Leuco-magnesia*, o di *Magnesia bianca*, o semplicemente di *Magnesia*, e che totalmente è diversa da quella impiegata nell' Arte Vetraria, conosciuta sotto il nome volgare di Manganese, è uno degl' ingredienti constitutivi di varie terre e lapidosi fossili di quelle montagne; come ne ho argomento, non solo da dette

ſcoperte, ma anche dagli ſperimenti che ſopra parecchj de' medeſimi ho in più tempi inſtituiti: e quindi ha origine il ſale ſuddetto, dove l' acido vetriuolico abbonda, e con tale ſpecie di terra viene a congiugnerſi.

Il chiariſſimo Sig. *Franceſco Dembſher*, Direttore dei pubblici lavori minerali della valle Imperina d' Agordo, de' quali ho già parlato, mi recò, ſono alcuni anni, certe pietroſe materie da lui colà trovate, che molto eran ſimili alla pietra calaminare. Fattene però ſperienze, nel modo che la calaminare, o ſivvero giallamina s' impiega per convertire il rame in oricalco, che diciamo ottone, o lattone, non vi produſſero mutazione alcuna, nè di colore, nè di peſo, come fanno le vere giallamine, che, aumentandolo molto, gli comunicano colore giallo imitante quello dell' oro. Fatti poi altri tentativi, non ne ebbi verun ſegno che conteneſſero punto del terreo principio dello zinco, ſempre preſente nelle giallamine, e dal quale deriva detta converſione del rame in ottone, mentre nella fuſione ignea, metallizzato dal flogiſto carbonoſo, vi ſi meſce, e lo aumenta, ed in giallo lo tinge. Trattate però quelle materie foſſili con l' acido vetriuolico, col mezzo di appropriata chimica *Encheireſi*, le trovai di magneſia molto abbondanti; poichè ne riſultò copia di quel ſale amariccio compoſto di tali due principj, detto volgarmente ſale d' Epſom, oppure d' Inghilterra; e dall' inſigne Chimico Cavalier *Bergman*, di non mai peribile onoratiſſima memoria, *magneſia vitriolata*.

Eſperimentate in ſimil modo varie pietre, in apparenza non diſſimili dalle calcarie comuni, l' acido vetriuolico vi ha manifeſtata la magneſia colla produzione del ſale predetto, e con eſſo anche molta ſelenite, formata dallo ſteſſo acido combinatoſi, come fa ſempre, con la terra calcinabile di tali pietre, e di qualunque altra ſorte di materiali che della medeſima in sè contengono. L' acido predetto m' ha pur dato a conoſcere la preſenza della magneſia in certa marna d' un bianco ſudiccio, ed in certi foſſili vulcanici dei monti di Fonzaſo, nel territorio di Feltre, ne' quali trovaſene qualche pezzo con zeoliti entro ſparſevi.

Anche dalle montagne di Cadore, e del Capitanato di Zoldo ho avuto da un dilettante di Mineralogia dei pezzi di

materie fossili, che all' aspetto sembran essere giallamina, ma che non ne hanno le proprietà, e non costano che di magnesia, di terra marziale e calcaria, e di argilla e terra selciosa. Nella Carnia trovasi grande quantità di certa terra calcaria alquanto indurita, ma imbrattante, detta *Crayon* da' Francesi, da me *Cretone*, e volgarmente *Gesso* da' sarti e da' pittori, perchè di tal sorte di fossile si servono per disegnare; e questa pure, oltre alla creta, ed a pochissima argilla, e ocra marziale, ha in sè non poca magnesia, e quindi forma con l' acido di vetriuolo il sale sopraddetto.

In vicinanza alla città di Belluno il fu Dottor *Jacopo Odoardi*, Medico primario della medesima, degno di perpetua onorevole memoria pe' suoi costumi, pel suo sapere, e per le Opere sue pubblicate, scoprì varie picciole scaturiggini d'acqua carica del sale prenominato. L' amicizia, che per me egli avea, lo determinò a spedirmi alquanto del sale estrattone, affinchè, esaminatolo, glie ne scrivessi il mio sentimento. Così feci; e la di lui lettera, e ciò che gliene scrissi fu pubblicato dal Sig. *Alvise Milocco* nell' ottavo Tomo del *Nuovo Giornale d' Italia*, per l' anno 1784 di cui era egli allora il continuatore.

Di tal sorte di acque salsugginose ho poi inteso trovarsene in altri luoghi delle sopra enunciate provincie; ed anche varj fossili, da' quali il vetriuolo di magnesia mai non cessa di rifiorire. Le capre selvatiche, dette *Camozze*, che colà vivono, tre le alpi più scoscese ed erme, hanno dapprima fatto conoscere a que' monticoli alcuni dei siti, ne' quali siffatto sale abbonda; perciocchè, essendone avidissime, sovente portansi a leccare di quelli il salsugginoso suolo. Ciò è già a bastanza noto, e ne fa fede il sopraddetto *Parroco di Cercivento* nelle citate sue Memorie Istoriche della Carnia. Ecco com' egli ne parla alle pag. 28 e 29.

„ La caccia de' cavrioli è la più utile, e la più ordinaria che si faccia nelle nostre alpi; ma quella delle capre selvatiche è altresì la più pericolosa; perchè a' cacciatori convien perseguitar questi animali attraverso le rupi, e i precipizj. I luoghi, dove d' ordinario si trovano questi animali, sono certe rocche di pietra viva, salata, ed arenosa, di cui molto si compiacciono leccandola, e fregando-

„ vi la lingua, ſia per aguzzarſi l' appetito, ſia per ajuta-
„ re la digeſtione, ſia per nettarſi la lingua, sbarazzandola
„ così dal viſcidume. Queſta ſorta di capre marciano quaſi
„ ſempre in truppa, e con ordine: una di eſſe fa la guida,
„ e un' altra la ſentinella, quando le altre paſcolano, e al
„ primo movimento che vede, o al primo romore che ſen-
„ te, fa un grido, ovvero un fiſchio chiaro ed acuto, che
„ ſerve alle altre per ſalvarſi con la fuga. Quando poi an-
„ che la guida paſcola, ſempre qualche altra camozza fa la
„ ſentinella, con la teſta in alto, e con le orecchie teſe „.

I primi che appreſero da' detti alpini animali a conoſcere alcune delle ſalſe ſituazioni di quelle montagne è credibiliſſimo che ſtati ſieno i cacciatori; perciocchè i medeſimi anche oggidì ne approfittano, là attendendoli in aguato per ammazzarne, ſenza eſporſi alle fatiche e pericoli d' andarne in traccia per orridi dirupi. Da queſto però non aveaſi che l' idea confuſa di ſalſugginoſità, ſenza conoſcenza ſpecifica del ſale colà eſiſtente, prima che nell' anno 1784 il Sig. *Franceſco Antonio Tavelli*, Ingegnere Trentino, ſollecito indagatore di minerali produzioni, foſſeſi in quelle parti traſferito a farvi ricerche di foſſili di qualche utilità.

Nel giro da lui fatto allora per le montagne della Carnia vide in più luoghi (così m' ha egli riferito) delle anzidette ſaline fioriture, ſimili a quelle del nitro ſopra quelle muraglie che ne producono; dalle quali reſa era bianca, per molto eſteſi tratti, la ſuperficie di parecchj monti di tre delli quattro *Quartieri*, o *Canali*, ſecondo i quali è diviſo quel diſtretto (*a*); cioè del Canale d' *Incarojo*, e dei canali di *San Pietro*, e di *Gorto*. Ne raccolſe; e del ſale trattone, come pure delle materie, dalle quali, ſtando eſpoſte all' aria,

(*a*) Come la Carnia ſi conſideri diviſa in quattro quartieri, o canali, può leggerſi nelle anteriormente citate Notizie Storiche del Sig. Canonico *Graſſi*, Parroco di Cercivento, dove anche l' eſtenſione, i confini, i prodotti e gli animali ſelvatici d' eſſa provincia, ed altre particolarità, oltre all' Iſtoria Civile, vi ſi leggono. Se ne può anche vedere la Topografia nella Carta delle Contee di Gorizia, di Gradiſca, del diſtretto di Trieſte, e del Friuli Veneto dell' Ingegnere Ceſareo Gianantonio Capellaris impreſſa in Gorizia l' anno 1782. Spicca anche dalla Carta Topografica del Friuli dei Pubblici Ingegneri *Maironi*, e *Capellaris* ſtampata in queſta Capitale per P. Santini nell' anno 1778.

si sviluppa in rifioriture saline, diedemi, ritornato che fu in questa Capitale, dei piccoli saggi: e dall' esame dei medesimi conobbi essere il sale suddetto un vero vetriuolo di Magnesia; come il genuino sale d' *Epsom*, di *Seidlitz*, di *Seidschutz*, e d' alcuni altri paesi.

Il prenominato soggetto, che con isperanza di poter trarre qualche profitto dallo stesso sale, e da alcuni minerali d'argento e rame colà rinvenuti, aveasene proccurate, ed anche ottenute pubbliche investiture; vi ritornò nello scorso anno 1785, e diede principio in più siti alle scavazioni di quei fossili salsugginosi, ed all' erezione degli abituri necessari per l' estrazione e confezione del sale summentovato. Allestito che n' ebbe in qualche quantità, me ne spedì con sua lettera, data da Paluzza il dì 16 di Novembre, e poi anche con altre posteriori, insieme con le varie sorti di terre e di lapidose materie dalle quali avevalo estratto; chiedendomi quei lumi confaccenti alla di lui impresa che somministrare io gli potessi.

Desideroso di giovargli in qualche modo, e di corrispondere quanto mi fosse possibile alla di lui aspettazione, come in parecchie occasioni ho fatto lealmente e senza proprio interesse con tutti quelli che me n' hanno richiesto; mi posi a far accurati esami delle cose da esso trasmessemi. Quindi ho rilevato che tutte le da me ricevute materie somministranti del predetto sale, benchè tra sè varie per alcuni rapporti, convengono però nei principj da' quali la salifica loro proprietà dipende. Sono esse un naturale composto di argilla, di magnesia, di terra calcaria, del terreo principio del ferro, di flogisto, e d' acido vetriuolico. Vi è anche mista una terra dagli acidi minerali indissolubile, senza apparenza d' essere di natura silicea: ma sopra l' indole sua non ho instituite ricerche decisive, niente interessando l' oggetto che mi sono proposto.

Le differenze osservabili tra le menzionate salifere materie consistono nell' essere alcune di sciolta terrosa mollezza; altre più o meno compatte e dure; altre distinte da copiosa mescolanza di gesso; ed altre da schistosa struttura a sfoglie, con infezione d' ocra superficiale. Variano pure nei loro colori, alcune essendo molto nere; altre meno, e per gradi svaria-

te fino al piombino, ed al cinericcio assai pallido: e così ancora nelle dosi de' preaccennati loro ingredienti, le differenti proporzioni de' quali diversificano le proprietà rispettive di tali fossili.

Quindi deriva che non tutti danno la medesima quantità del sale sopraddetto; il quale, mentre stando esposti all'azione atmosferica fatiscono, vi si va lentamente formando a misura che l' acido vetriuolico, svincolandosi dal principio flogistico, può esercitare la specifica sua forza sopra li terrei principj assorbenti. Esso acido vetriuolico, congiunto al flogisto sotto forma sulfurea sommamente tenue, esiste intimamente commisto in quelle fossili materie, senza che all' occhio, neppure armato di acuta lente, apparisca, e senza che vi si scorgano piritose concrezioni; nè rendesi manifesto se non se per le sostanze saline che vi produce, oppure col mezzo del fuoco che ne lo scaccia in soffocanti esalazioni d' acido sulfureo, o per via d'altri appropriati Chimici processi. Quando tali materie sono estratte di fresco dall'interno dei monti, non imprimono sulla lingua verun sapore salino, nè all' acqua ne comunicano. Ma tocche che sieno lungamente dalla forza alterante del calor solare, dei diaccj, e dell' altre meteore, si vanno aprendo e disgregando; il flogisto, assorto dall'aer puro (*a*), poco a poco svanisce; e quella porzione d' acido che da' di lui vincoli va restando libera, posta in azione dal calore, e dall' attratta umidità, reagisce sopra quelli dei terrei principj solubili, co' quali ha più d' affinità, o sia d' attrazione. Combinandosi con la magnesia costituisce il vetriuolo magnesico; con la terra calcaria forma il gesso, o sia selenite; e con la terra del ferro un vetriuolo di marte, imperfetto però, non cristallizzabile, di colore rugginoso, e che nello svaporamento dell' acqua, in cui siane di disciolto, si va in parte scomponendo con precipitazione della calce marziale.

Nell' estrazione con acqua da' prefati fossili delle sostanze saline testè specificate, mai non ho potuto scorgervi neppure menomissimo indizio di allume, quantunque il principio ter-

(18) Fourcroy Memoires & Observations de Chimie. Dove spiega i fenomeni della combustione ecc.

reo che ne' medesimi predomina sia l' argilloso. Riflettendo sopra questo insolito fenomeno, io sospetto che, non soprabbondando l' acido vetriuolico, troppo lentamente sviluppantesi dall' infiammabile, e dal terroso misto in cui giace intimamente sepolto; e la di lui affinità con le terre, magnesia, calcaria, e marziale, essendo maggiore che con quella specifica dell' allume essenziale alle argille; quindi avvenga che di questo sale non vi si formi. Non è già da credersi che allume non vi apparisca perchè manchi in quei fossili argillosi la terra che dello stesso è la base (*a*); perciocchè trattati convenientemente con dell' acido vetriuolico distillato, indi a forza di fuoco estrattone il non combinatosi, m' hanno dato un vero allume.

Tra li minerali e fossili, che il Sig. *Tavelli* diemmi da sperimentare, evvi un pezzo di certa pirite molto compatta e ponderosa, d' un bianco livido leggiermente gialliccio, in matrice mista di quarzo e di terra argillosa cinerea, di cui egli mi disse avere veduta grossa vena. Questa pirite è marziale e molto sulfurea; e tenuta da me per molto tempo esposta all' aria, ma non alla pioggia, si è tutta coperta di rifiorimenti salini minutissimamente cristallizzati, di jalina trasparenza, e di sapore vetriuolico marziale, ma di acuta non ordinaria acidità. Estrattane con acqua pura la rifioritavi salsugginosità: filtrata la soluzione, e fatta svaporare al fuoco con moderato bollimento, nella lusinga d' ottenerne vetriuolo cristallizzato, mi s' è presentato un fenomeno da me non più veduto nel trattamento d' altre molte simili piriti. Il discioltovi principio terreo del ferro si è nello svaporamento dell' acqua totalmente precipitato in ocra, e continuando il fuoco vi è anche apparsa poca selenite, da cui, e dall' ocra liberato il restante licore con iterata filtrazione, e postolo a cristallizzarsi all' aer libero, altro sale non vi è apparso che pretto vetriuolo di magnesia in prismetti tetraedri, con apici cuneiformi, jalini, e di sapore mediocremen-

(*a*) E' sentimento di molti celebri Chimici che la terra dell' Allume sia argilla; ma l' insigne Sig. Cavalier *Wallerius* (*Systema mineralogicum Tom. II. pag.* 39, 41. *Viennæ* 1778) rende dubbia con forti ragioni questa opinione.

te amaro. Nel bollimento è svanito l' acido superfluo alla saturazione della magnesia in vetriuolo magnesico, della terra calcaria in selenite, e quello dal quale la ferrea sostanza era tenuta prima nell' aequa perfettamente disciolta.

Quinci io penso che ne' prefati salini fiorimenti fossevi combinato con l' acido vetriuolico anche molto di quello, cui si è dato il nome d' aria fissa, e d' acido cretoso da *Bucquet*, *Lavoisier*, e *Fourcroy*; di acido mefitico da *Bewly*; di gas mefitico da *Macquer*, e d' acido aereo dal Cavalier *Bergman* (*a*), poichè, secondo lo stesso Bergman, questa specie d' acido nel bollimento abbandona il ferro tenuto da esso nell' acqua disciolto. *Ferrum* (ha egli scritto) *acido aereo unice solutum, ebullitione totum quantum separatur* (*b*). Se trovato non vi si fosse che il solo vetriuolico, il soprabbondante alle accennate saturazioni non sarebbe sì di leggieri con gli aquei vapori esalato. Esso restato sarebbe nella, così detta, acqua madre; cioè con la porzione di ranno incristallizzabile, solito residuo delle confezioni dei vetriuoli, e degli allumi, in cui, com' è noto a' pratici, la vetriuolica acidità soverchiamente predomina.

Dissi già che il Sig. *Tavelli* fecemi recare saggi anche del vetriuolo di magnesia ch' egli avea estratto dai fossili sopra mentovati, ad oggetto che esaminatane la natura gliene scrivessi il risultato. La novità, rispetto a' nostri paesi, della scoperta di minere di tale specie di sale; il mio genio stato sempre affezionato allo studio, alle osservazioni, ed alle esperienze delle cose minerali; ed il desiderio di poter contribuire all' introduzione in uso e commercio dei nazionali prodotti fossili, troppo veramente negletti, m' hanno reso sollecito nell' aderire alle istanze del nominato scopritore.

Le mostre di detto sale da lui mandatemi dalla Carnia, e che poi m' ha anche egli stesso recate in maggior copia, furono estratte, per di lui asserzione, da' fossili di tre diverse e tra sè lontane situazioni; cioè dai monti detti Paularo nelle

---

(*a*) Leçons elementaires d' Histoire naturelle & de Chimie, par M. de *Fourcroy*. Tom. premier.

(*b*) Opusc-phisic. & Chimic. Vol. I. de Fonte Danemarkensi.

le vicinanze della villa di Siajo, ſopra a Paluzza, nel Quartiero di San Pietro, ed in quelli del canale di Gorto, e del canale d' Incarojo. Il vetriuolo di magneſia indicatomi per nativo dei monti di Siajo, e di Gorto, lo ho trovato dello ſteſſo ſapore amaro, e dopo ripurgato, della medeſima purità, e jalina bianchezza dei veri ſali d' Epſom, di Seydlitz, e d' altri luoghi, uſati in Medicina, che coſtano di magneſia e d' acido vetriuolico. Ma quello d' Incarojo, generatoſi dentro le materie ſchiſtoſe a sfoglie con ocra ferrea ſuperficiale, delle quali ho dianzi fatta menzione, lo ho trovato d'un ſapor miſto di amaro e di vetriuolico marziale; e quindi biſognoſo d'eſſere liberato dalla ſoſtanza ferrea, di cui partecipa: lo che ho già fatto come dirò poi.

Egli è ormai notiſſimo in Chimica, e fuore d' ogni dubbio, che il genuino ſale d' Epſom, e quelli dell' iſteſſa ſpecie d' altri paeſi, a' quali il celeberrimo Cavalier *Bergman* ha dato il nome di *Magneſia vitriolata* (*a*), e pe' quali io credo dicevoli, come ſinonimi, anche quelli di *vetriuolo di magneſia*, e di *vetriuolo magneſico*, tutti ſono il riſultato naturale della combinazione dell' acido vetriuolico con quella particolar terra conoſciuta col nome di *leucomagneſia*, o di *magneſia bianca officinale*, o ſemplicemente di *magneſia*.

Col mezzo d' accurati eſperimenti chimici ho rilevato che dell' iſteſſa ſpecie ſono certamente anche li ſopraddetti ſali della Carnia. Tutti coſtano dei medeſimi identici principj cioè di magneſia combinata intimamente con l' acido vetriuolico in vero ſal medio (*b*). Ciò dimoſtra ad evidenza di fatto la precipitazione della loro magneſia, operata col mezzo di ſali alcali; la formazione del ſale neutro, che nell' atto di tale precipitazione riſulta dall' intimo congiungimento dell' alcali precipitante con l' acido vetriuolico, che dalla magneſia eſſo diſgiugne in vigor di maggiore affinità con lo ſteſſo acido; la ſpecie di tale ſalino riſultato, cioè di tartaro vitriolato, ſe il precipitante ſia l' alcali fiſſo vegetabile, e di ſale mirabile Glauberiano, ſe l' alcali minerale, o ſia mu-

(*a*) Bergman. *Opuſc. phyſic. & Chemic. Vol. I. de Magneſia.*

(*b*) Bergman. *Opuſc. phyſic. & Chemic. Vol. I. de analyſi aquarum.*

riatico vi s' impiega, ecc. finalmente la riproduzione dello ſteſſo vetriuolo magneſico con la magneſia ottenutaſi per precipitazione con qualſivoglia dei ſali alcali, ricombinandola per ſinteſi chimica con l' acido ſopraddetto.

Quanto alla magneſia vitriolata impura dei monti del canale d' Incarojo, della quale ho dianzi fatta menzione, la ferrea ſoſtanza, di cui è infetta, vi ſi trova commiſta nello ſtato ſalino, ma sì debilmente all' acido unita, che, diſciolto ſiffatto ſale in copioſa acqua, e laſciando eſpoſta la ſoluzione all' aria, diviene gradatamente d' un torbido rugginoſo, ed in pochi giorni la terra marziale ſotto forma d' ocra in buona parte al fondo ſi precipita: lo che ſuccede tanto più preſto, quanto più caldo è l' ambiente, in cui ſi trova.

Queſto dunque eſſer potrebbe un modo per minorarne d' aſſai il marziale inquinamento, onde detto ſale diveniſſe più adattato al commercio per gli uſi medici. Parmi però che anche miſto, com' è, di ſalina ferrugginoſità riuſcir potrebbe in alcuni morbi molto utile come tonico e diſoſtruente, oltre alla virtù catartica; perciocchè la marziale ſoſtanza vi ſi trova commiſta nello ſtato medeſimo di ſalina forma nel quale eſiſte in molte delle ſalutifere ſorgenti minerali, che ſovente anche della magneſia vitriuolata contengono. Le acque minerali di tal ſorte potrebbero pure con queſto ſale, a giuſte doſi, eſſere artificialmente imitate, con molto comodo e profitto di chi ne abbiſogna; e particolarmente della gente povera, impotente di portarſi alle fonti medicinali, e di ſupplire alla grave ſpeſa occorrente per uſare tali acque che ci vengono da paeſi lontani. Le artefatte acque minerali ſono già lodate molto, e raccomandate da celebratiſſimi Autori, e particolarmente dal Cavalier *Bergman*, il quale inſegna con chiara eſattezza i modi d' imitare tutte le ſpecie di quelle naturali, nel Volume primo de' ſuoi Opuſcoli fiſici e Chimici, dove tratta *de aquis medicatis frigidis, & calidis arte parandis*.

Il predetto ſale dei monti d' Incarojo, per gli analitici eſperimenti che ne ho fatti, non contiene già troppa ſoſtanza marziale; poichè, precipitata in ocra dalla di lui ſoluzione in acqua, liberata da ogni ſalſedine e ben ſecca, non la ho trovata in maggior proporzione di circa una libbra per

ogni cento d' esso sale. Per separarne tutta la ferrugginosità io mi sono servito, oltre ad altri precipitanti, anche d' un alcali flogisticato, in cui, tentato con gli acidi di varie specie, niente di azzurro detto di Berlino, o di Prussia, si forma, nè vi apparisce segno alcuno di effervescenza. Per prepararlo tale ho, cercando, trovato d' ottima riuscita il farne estrazione da' crogiuoli di Molibdena d' *Haffnerszell* presso Passavia, nei quali furono da me fatti saggi docimastici di minera di piombo galenica di Provaglio appresso Vestone di Valsabbia, e d' altre simili, ed anche d' altri metalli del Bergamasco, del Bellunese, del Tirolo, rotti a pezzi, infusi in acqua, e formatone ranno; il quale così riesce perchè io mi servo d' un fondente reduttivo, composto di tartaro, di nitro, di muria fusa, di vetro, e di sangue buino: materie tutte insieme bruciate prima a nerezza carbonosa.

L' effetto prodotto da questo ranno alcalino-flogistico nel precipitare con esso la calce ferrea dalla soluzione in acqua del sale, di cui favello, si fu di non precipitarla in azzurro di Berlino, com' egli fa con qualunque dissoluzione acida del ferro. Esso la fece subitamente apparire e precipitare in ocra, cioè sotto il solito colore aranciato, e lasciando inalterata la magnesia nello stato del primiero suo perfetto scioglimento. Mescolato però con detta salina dissoluzione, oppure con lo stesso ranno alcalino-flogistico, alquanto di qualcheduno degli acidi minerali, o dell' aceto distillato, allora esso ha precipitata momentaneamente in bellissimo azzurro la terra marziale: e quindi ho rilevato che senza la presenza di qualche acido mai il detto color azzurro non apparisce.

Spogliata interamente dal ferreo elemento la prefata dissoluzione salina, sì nell' uno che nell' altro dei modi testè accennati, ne ho anche precipitata la magnesia, tanto con l' alcali fisso vegetabile, che col minerale, la quale bene dolcificata con acqua bollente, e poi disseccata, è riuscita in ra-

gione di libbre ventisei circa per ogni cento di vetriuolo magnesico (*a*).

Le accennate mie osservazioni e sperienze altro non farebbero che indagini di fisica curiosità, se state non fossero dirette allo scopo di dedurne dei lumi conferenti agli oggetti contemplati dal prenominato scopritore delle salifere minere dianzi mentovate. Informandolo dei modi, e delle risultanze delle da me instituite chimiche operazioni, lo ho avvertito particolarmente di due principali bisogni, e de' mezzi per provvedervi.

Il primo, e di tutta importanza, consiste nel dover egli purificare quello del suo vetriuolo di magnesia, che ha vetriolico-marziale infezione, sicchè riesca della candidezza e sapore del genuino sale Epsomese, onde nel proccurarne l' esito non incontri l' ostacolo del comune pregiudizio, non avvezzo a scorgere nel genere degli usati sali catartici amari siffatta eterogeneità.

Il secondo concerne all' estrazione della magnesia officinale dal sale medesimo, la quale non è da lusingarsi di poterla introdurre nella Farmacia Medica se non si prepari dell' istessa bianchezza di quella usata nella nostra Italia, cavata dalle acque madri del nitro. Quando il vetriuolo magnesico

---

(*a*) Ho detto circa, perchè, quantunque io abbia usata in operando la più diligente esattezza, so non pertanto che in simili processi sempre qualche piccola porzione si perde delle materie che si analizzano. Il dottissimo Chimico Sig. *Fourcroy* in più d' un luogo delle sue Memorie, e Osservazioni di Chimica, confessa candidamente questa verità: e particolarmente nella Memoria sopra l' arte di fare delle ricerche Chimiche, a questo proposito così si esprime: "Je suis toujours étonné de voir dans des travaux particuliers de quelques Chimistes une précision presque mathématique sur les produits de leurs opérations, une certitude dans les expériences, qui ne leur laisse nul doute pour leurs inductions. J' avoue qu' il ne m' est jamais arrivé de parvenir à cette facilité de travail, & à ces heureux resultats,,. E poco dopo continua dicendo. " Je ne vois pas sans étonnement que dans une analyse, même la plus facile, telle que celle d' une substance minérale, dont nous avons des moyens assez sûrs de separer les différens principes, quelques Chimistes retroúvent exactement & jusqu' aux fractions de grains les matiéres qu' ils en retirent. Quelque précision, quelque adresse qu' il mettent dans leur travail, il est impossible que la chaleur, les lessives, les filtrations, &c. n' occasionnent pas toujours quelque perte, & j' avoue, je le répete, que j' n' ai jamais été assez heureux pour avoir des resultats aussi satisfaisans que ceux que plusieurs Chimistes modernes disent avoir obtenus.

partecipa del marziale, la magnesia che se ne deduce riesce d' una bianchezza degradata dal colore rugginoso dell' ocra ferrea: e però rendesi necessario d' ovviare a tale difetto con anteriore purificamento.

Non essendo le magnesie, tratte dalle acque madri del nitro, e del sale muriatico, mai affatto pure, ma miste con altre terre; Medici valentissimi d' estere nazioni hanno introdotto nella pratica medicale l' uso di quella precipitata con sali alcali dal sale d' Epsom, o dagli altri che costano degli stessi principj. Il celebre *Retzius* Professore e Segretario della Reale Società Fisiografica di Lund nella Scannia mi scrisse, sono più anni, che in quelle parti d' altra magnesia non servonsi che di quella tratta da tal genere di sali. Ma ecco come ne parla il soprallodato Cavaliere *Torberno Bergman*: *Maxima quæ hodie usurpatur magnesiæ pars in officinis pharmaceuticis e sale Anglico paratur* (a). Dà egli poi un utile avvertimento per la preparazione di essa terra nel precipitarla con sali alcali, dicendo: *Si vero alkali adhibetur probe aeratum, parum dejicitur, præsertim in aqua copiosa, etenim aer fixus acido vitriolico connubio expulsus, derelictam adgreditur magnesiam, eamque solvit: ast ebullitionis calore superfluum volatilis menstrui fugatur, magnesia ad saturationem redigitur, & omnis fere subsidet.*

Venendo ora a parlare de' succennati due principali bisogni; ho io indicati al prefato *Tavelli* due modi da render puro dalla vetriuolico-marziale partecipazione quello del suo sale Carnico, che ne abbisogna. Il primo si è quello insegnato da *Bergman* qui sopra citato, nel Volume primo de' suoi Opuscoli fisici e chimici, dove tratta della confezione dell' allume, alla pagina 334. La terra calcaria cruda, cui il celeberrimo Autore dà il nome di *calce aerata*, ha la proprietà di scomporre il vetriuolo marziale e l' allume, ma non già la magnesia vitriuolata. A questo proposito egli dice: *Hoc optime pulvere calcareo peragitur, non tamen usto, quod etiam magnesiam vitriolatam decomponit, sed aerato. Hic sensim ad-*

(a) *Opusc. physic. & Chemic. Vol. I. de Acido aereo.*

datur, ne mediante effervescentia ultra vasis latera intumescat massa. Justa dosis, adjuvante motu & calore, sales removendos destruit. Alkali phlogisticato facile innotescit si quid restat martialis.

Questo è uno dei suggerimenti che ho dati al medesimo *Tavelli*, avvisandolo che può egli nella Carnia comodamente servirsi di quella creta che vi abbonda, detta *gesso* da' Sarti di cui ho già anteriormente fatta menzione. Essendo la stessa una terra calcaria che in sè contiene della magnesia, e facile a ridursi in polvere per la mediocrissima sua durezza, potrebbe impiegarla con profitto mentre opera, col bollimento nelle caldaje, la confezione de' suoi sali; o molto meglio facendovi passare, e ripassare attraverso per filtrazione le acque d' essi sali impregnate, tante volte, e a freddo, quante trovasse d' uopo al possibile loro purificamento dalla marziale infezione. Questo secondo modo mi è meglio del primo riuscito con dell' istessa creta, della quale conservo saggi da molto tempo tra miei minerali e fossili col nome di Cretone (*Crayon*) della Carnia. Ho anche fatti simili esperimenti con polve di marmo statuario Carrarese, ch'è pure calcario, ma senza lo sperato successo.

Il secondo modo, che ho al *Tavelli* comunicato per ridurre liberi totalmente dal ferro i sali suddetti, consiste nel torrefarli a fiamma fortissima fino che sieno divenuti candentissimi, sicchè la porzione marziale perda col flogisto il combinatovi acido vetriuolico, e resti perfettamente calcinata. Facendone allora soluzione in acqua bollente; indi lasciata in riposo che divenga fredda, poi filtrata; la calce ferrea rimane tutta sul filtro in forma di colcotar d' un bel rosso servibile alla Pittura. Riducendo poscia il vetriuolo magnesico, secondo l' Arte, a cristallizzamento, s' ottiene purissimo, in belli cristalli prismatici tetraedri, terminati or da piramidi di quattro lati, or da apici cuneiformi, li meglio formati; e tutti di jalina bianchezza. Io ho escogitato questo processo, assicurato da numerose sperienze che la magnesia ritiene tenacissimamente il combinatovi acido vetriuolico nel fuoco, purchè non sia dessa in contatto di materie di flogisto doviziose. Fatte prove di tale mio pensamento sopra li sali Carnici, anche dei più infetti di vetriuolo marziale, ne ho avu-

to il più desiderabile successo: talmente ch' io non ho punto esitato a prenderne più volte, come altri hanno fatto, a dose conveniente; ed ha esercitata la catartica sua virtù senza apportare molestia alcuna.

Quanto poi al modo di estrarre dal vetriuolo magnesico avente in sè ferrugginea sostanza una magnesia di perfetta purità e candidezza, ho trovato essere il più facile ed espedito quello di precipitarne tutta la parte marziale col mezzo dell' alcali flogisticato. In siffatta operazione se n'ottiene un bell' azzurro di Berlino; se però si affonda o nella dissoluzione aquea d' esso sale, o nel licore alcali-flogistico precipitante tanto di qualche acido puro, quanto, operando, veggasi bastare a far apparire prontamente di bellissimo color azzurro tutto il liquido. Se il ranno alcalino non è saturatamente flogisticato, esso precipita insieme con la divenuta azzurra calce marziale anche della magnesia, in proporzione dell' alcali libero che nello stesso ritrovasi; la quale però con addizione di nuovo acido sufficiente tosto si ridiscioglie, e dalla vista sparisce. In far questo io impiego solitamente il così detto olio di vetriuolo d' Olanda, di aquea chiarezza, trovandolo più adattato al mio intento che qualunque degli altri acidi.

Separato l' azzurro per filtrazione dal licore, e quando questo siasi ridotto ben chiaro, se ne può allora precipitare la magnesia con l'alcali fisso vegetabile, o minerale, disciolto in acqua, che così ottiensi pura, e della desiderata bianchezza. Impiegandovi l' alcali non caustico, cioè di quello detto aerato dal Cavalier *Bergman*, non tutta essa magnesia cade al fondo del liquido, se questo non facciasi bollire; com' egli medesimo avverte con le già qui sopra riportate sue parole. Siffatta magnesia benissimo dolcificata con acqua pura da ogni salsedine, e disseccata, non lascia da desiderare veruna delle specifiche proprietà di tal sorta di terra medicinale condotta allo stato di sua perfezione.

I metodi, e tutte le avvertenze opportune per eseguir le sopraccennate operazioni sonosi da me dettagliatamente spiegate al sunnomato *Tavelli*: e perciocchè la preparazione, non solo della magnesia, ma anche dell' azzurro Prussiano, potrebbe forse essergli di qualche vantaggio; se pure si avvere-

rà ch' egli possa proseguire con bastevole profitto nell' intrapreso lavoro delle suddette salisere Carniche minere; così gli ho reso noto anche il modo da me, non ha guari, trovato di formare dell' alcali flogisticato con facilità e tenue spesa.

Questo consiste nel meschiare insieme a dose uguale del sangue bovino ben secco con di quel tartaro comune, che qui chiamasi *greppola*, e può aversi a prezzo vile in que' luoghi che abbondano di vino, quando raschiansi e nettansi le botti. Io ho confusi questi due ingredienti grossamente pesti, e posti dentro vasi di terra atti a resistere bastevolmente al fuoco, con coperchio dell' istessa terra, e senza lutarne la congiunzione, ond' abbia uscita il fumo; gli ho collocati in fornello a grata; circondati e coperti d' accesi carboni. Continuato il fuoco fino a candidezza d' essi vasi, e così intrattenuto fino che più non usciva da' medesimi fumo denso, e fetido, ma certa fiammetta azzurrina come di fosforo; ho lasciato che il fuoco, consumati li carboni, si estinguesse. Indi, freddatisi detti vasi, ne ho estratta la materia, perfettissimamente incarbonita, assai nera, e macchiata in molte parti d' un azzurro fosco superficiale, con diminuzione di poco meno d' un quarto del primo suo peso. Per un vaso, in cui eransi poste diciotto marche del prefato mescuglio, s' è continuato il fuoco forte per ogni suo lato quasi tre ore.

Il ranno estratto da siffatta materia carbonosa, sì con acqua fredda, che calda, oppur anche bollente, reso chiaro per deposizione, o per filtramento, serve ottimamente per la confezione del così detto azzurro di Prussia, o di Berlino, precipitando esso il ferro sotto tale modificazione da qualunque delle sue acide dissoluzioni; e così pure da quello del sopraddetto vetriuolo di magnesia che è misto di sostanza vetriuolico-marziale: mediante però l' aggiunta d' alquanto acido di vetriuolo, o d' altra specie, da me trovata necessaria anche negli altri casi, ne' quali, per deficienza d' acidità soprabbondante, l' azzurro non apparisce, o si fa vedere lurido, bianchiccio, o d' un atto verde, oppur giallo rugginoso, o fosco. L' insigne Chimico Cavalier *Bergman* avverte egli pure dell' importanza che l' acido abbondi anche nel vetriuolo marziale, se ottener se ne voglia prontamente un sedimento azzurro bello, e copioso. *Vitriolum martis* (egli dice)

dice) *exacte saturatum segnius & parcius præbet genuinum sedimentum cæruleum, quam acido abundans; illud enim, quod in priori casu dejicitur, initio vel nigrescit, vel albescit, in posteriori autem mox eximie cærulescit* (*a*)

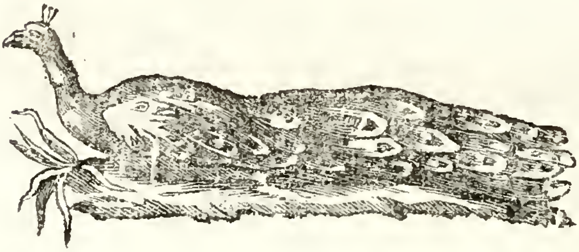
Ciò che fin ora ho detto d'alcune delle metallifere minere, e d' altri sotterranei prodotti delle summentovate montagnose provincie, avvegnachè poco sia, e forse non soddisfacente ai dotti ed agli studiosi delle arti metallurgiche, e della mineralogia, potrà per avventura riuscire nondimeno d'eccitamento e stimolo ad alcuni de' medesimi di trasferirsi a riscontrar ocularmente, non solo le cose da me enunciate, ma anche per far accurati esami di quelle montagne, onde osservare, e descrivere poi le loro rispettive strutture e posizioni; i materiali de' quali costano; i varj loro fenomeni, e le diverse loro fossili produzioni che al giorno appariscono, sì metalliche, sulferee e saline, che di marmi, di cristalli, d' agate e diaspri, che vi esistono; e d'ogn'altra materia ch' esser possa interessante per l' Istoria naturale, ed utile per le Arti, e per altri usi e bisogni (*b*).

(*a*) Torber Bergman. *Opusc. physic. & chemica. Vol. I. ubi de Fonte Danemarchensi.*

(*b*) Il Sig. **Tavelli**, già più volte anteriormente nominato, mi recò dalle alpi Carniche li seguenti saggi di minerali e fossili, oltre a quelli delle terre e pietre somministranti il sale catartico di magnesia da lui colà scoperto.

1. Di minera cinerea di rame ed argento in spato ponderoso bianco.
2. D'altra simile minera entro sparsa in spato ponderoso bianco, e tinto in alcune sue parti d' eruggine verde ed azzurra.
3. D' altra simile minera in matrice di spato ferreo d'un bianco leggiermente livido, e che nel fuoco diviene nero e retrattorio.
4. Di varie sorti di piriti sulfureo-marziali, sferiche, sferoidali, ed amorfe.
5. Di zolfo nativo puro e diafano, in matrice d'alabastro gessoso di molta candidezza.
6. Di Schoerl verdiccio molto nitido, in prismi sottili, lunghi, ed insieme compattamente uniti e paralleli.
7. Di pietre arenarie miste d'ocra verde, o sia eruggine di rame.
8. Di minera di ferro squamosa, molto nitente, e di colore del proprio metallo, in matrice di quarzo bianco.
9. Di marmi variegati di diversi colori, uno de' quali nerissimo.
10. Di gesso cristallizzato, jalino e diafano (*glacies mariæ*), e di gessi d' altre sorti.
11. Di agate jaline, e di diaspri d' un rosso cinnabrino fiorato di scuro da minera di ferro diasprina entro sparsavi; e di diaspro nerissimo.
12. Di cristalli quarzosi tinti d' ocra marziale.
13. Di terra pittoria nerissima, e di schisti dello stesso colore.

Se avvenga mai che questa Memoria abbia qualche influenza all' effettuazione d' un sì lodevole imprendimento, molto da me desiderato per onor nazionale, e per le utilità che potrebbero ridondarne, perduto non sarà vanamente il tempo nel formarla impiegato.



14. Di bellissimo talco squamoso, verdiccio, lubrico, e nitido unito a spato calcario.

15. Di schisto talcoso, squamoso, friabile e nitido, di bel color d' oro, atto ad essere ridotto in nobile polverino scrittorio.

16. Di diaspro variegato di rosso cinnabrino, di rosso scuro e di gialliccio, con lineamenti quarzosi bianchi, e piccioli grani di pirite gialla cristallizzata entro sparsavi.

17. Di minera di piombo di grana minutissima come d' acciaro (*galena textura calybea. Waller. System. mineralog.*).

18. Di minera di piombo spatosa bianca, pesantissima, e minutamente cristallizzata (*minera plumbi alba spathosa. Waller. syst. mineralogicum*). Li predetti due saggi 17. e 18. sono dei monti Cadorini di Auronzo.

SAGGIO ANALITICO (*)

DI ALCUNE LUCIDE METEORE.

Del P. Carlo Barletti delle Scuole Pie Professore di Fisica Generale nell' Università di Pavia.

LA meteora lucida, o volante fiamma, che sul far della sera degli 11. di settembre del 1784. corse alta per l' aria dal Vicentino ne' contorni de' colli Euganei fino alle alpi Cozzie verso il colle di Tenda, mi porge argomento de' primi tre Capi del presente Saggio Analitico; proponendomi nel primo di esporre distintamente l' osservazione; e di rintracciar nel secondo qualche teorica dichiarazione di alcune singolarità, e illusioni occorse nella stessa osservazione; e di confrontare nel terzo le osservazioni diverse, e i metodi per misurare l' altezza, e la lunghezza del suo corso per l' atmosferica regione. La somiglianza de' fenomeni mi porterà nel Capo quarto a parlare delle *Stelle cadenti;* e ristringerò nel quinto ed ultimo Capo alcune osservazioni dirette a far meglio conoscere la natura di que' lampi estivi a ciel sereno, che volgarmente si dicono *Lampi di caldo*.

(*) Questa memoria è stata pubblicata dall' Autore nel T. II. della sua Fisica particolare e generale con intelligenza della Società. *L' Ab. Vivorio.*

CAPO I.

Osservazione distinta della fiamma, o del globo lucido, che corse lungo tratto per l' atmosfera.

PRætervolantes globi, ut animadvertantur, non studium, sed casus facit. Tamen si quem physici viderint, studium in eo cum praetervolaverit ponunt, eumque cum nullus jam est, contemplantur: così l' illustre Segretario dell' Accademia Bolognese comincia il suo discorso di somiglianti meteore (*In Comment. Bonon. Tom.* 2. *pag.* 464).

ARTICOLO I.

Tempo, e luogo della osservazione col previo, e seguente stato dell' atmosfera.

Agli 11. di settembre del 1784. circa 25. minuti dopo il tramontar del sole, mentre già comparivano chiare le prime stelle in Tortona a trecento passi circa fuori della nuova Porta, io ritornava in città in compagnia di D. *Garmagnano* Professore di Rettorica, e di mio Fratello Agostiniano; e siccome sono essi perspicaci di mente, e di occhio non alieno dalle osservazioni, mi giovarono assai per accertare di questa molte circostanze. Ci comparve adunque nella direzione più propria per essere osservato a sinistra alto per l' aria un globo di fuoco, che procedeva da greco, e traversò innanzi a noi passando pel nostro meridiano, e proseguì fino a perdita di vista verso ponente.

L' aria era serena, e tranquilla, se non che si stendeva un leggero velo di nubi rosseggianti assai basse a ponente, le quali furono opportune per limitarmi più certo e l' orizzonte, e il corso di quel fuoco, che più alto, e apparentemente al di qua di quelle nubi scomparve. Già da cinque giorni continuava il tempo bello e sereno dopo molta pioggia, e tempo vario precedente. Il caldo relativamente alla stagione, e al freddo precedente rientrava straordinario, e si mantenne

in ſeguito lungamente il termometro di *Reaumur* tra i 18. e 16. gradi ſopra lo *zero*.

Non vi fu nè prima, nè inſieme, nè dopo verun moto d' aria con particolar direzione relativa a quella del globo luminoſo. Non ſentii, che le ſolite aurette in direzioni, e ſituazioni ordinarie dopo il tramontar del ſole.

ARTICOLO II.

Direzione, e inclinazione del ſentiero, altezza maſſima, apparente velocità, e durazione di queſto fenomeno.

Oltre la direzione ſicura da greco a ponente oſſervai pure la progreſſione di quel fuoco uniforme in linea retta, come ne faceva prova una lunga ſtriſcia rovente, che laſciava in retta linea dopo di sè, della quale dirò in ſeguito.

La pendenza del ſuo corſo dall' alto al baſſo non fu molto notabile, nè mi comparve, che faceſſe col piano dell' orizzonte da greco a ponente un angolo maggiore di quindici gradi.

Per ciò, che riguarda l' angolo della ſua altezza dall' orizzonte nel più alto punto, in cui paſsò pel mio meridiano, non lo giudicai, nè lo conobbi maggiore di quaranta gradi verſo auſtro.

L' apparente ſua velocità non fu punto rapida come quella del folgore, che anzi comparve all' occhio minore di quella d' un razzo ordinario; e durò in viſta per quella parte della ſua via, che fu viſibile da Tortona, in circa un mezzo minuto primo.

ARTICOLO III.

Grandezza, e qualità, ed altri accidenti della ſua luce.

La ſua luce era candida, e ſplendidiſſima, come quella della canfora, priva però di ſcintillazione, e di ardore; talchè la fiſſai di continuo ſenza eſſerne punto affaticato, non che abbagliato nella viſta. Nulla comparve in tutto il ſuo corſo, che poteſſe darmi idea di ſumo; nulla parimente, che

somigliasse a scoppio nè intorno, nè entro il corpo di quel globo. Il centro dello splendore era nella testa, ossia nella parte anteriore del suo corpo. La sua figura compariva anteriormente rotonda, del diametro in circa d' un piede, e si allungava in forma di fiamma non in alto verticale, come sogliono le altre fiamme, ma indietro secondo la traccia, sulla quale scorreva. Tale lunghezza era varia, e come ondeggiante; e questa specie di ondeggiamento sembrava procedere dalla progressione stessa del suo moto, piuttosto che da interna projezione; come appunto si vede correre una piccola fiammella lungo un filo intinto d' acqua ragia, che lascia dopo di sè quel filo abbruciato.

Lasciava inoltre in simil guisa indietro a sè una striscia ben lunga non più luminosa, ma solo infuocata, come un ferro rovente, e con varietà di colori foschi.

Nel momento, che mi passò in faccia, si divise tutta la sua massa lucida in due, cioè restò il corpo lucido innanzi staccato con intervallo apparente di uno de' suoi diametri da un altro piccolo residuo lucido, da cui procedeva indietro la striscia, o coda infuocata; e subito con una specie di agitazione si riunirono quelle due parti nuovamente insieme in grandezza minore di prima, e con luce più splendida. Nell' intervallo di quella divisione comparvero degradazioni di colori fino al purpureo, e violetto.

ARTICOLO IV.

Niuno strepito nel suo passaggio, e circostanze del suo termine.

Nell' ondeggiamento, e agitazione procedente da tale separazione ci volle tutta la forza della riflessione per non lasciarmi sedurre dalla consueta associazione di fremito e stridore, che pur mi si affacciò alla mente, ma non nacque altrimenti dalla sensazione dell' udito.

Parve che a quando a quando, e massimamente verso il fine, tramandasse inferiormente intorno a sè alcune faville in forma di lumicini cadenti, che presto sparivano.

Tutto però andava successivamente scemando finchè finì al-

to ſull' orizzonte in aria aperta, non laſciando per ultimo che la ſtriſcia, e una ſpecie di vapor luminoſo, in cui ſvanì ſenz' altro veſtigio.

Niuno di noi udì veruno ſtrepito, nè ſtridore, nè ſcoppio procedente da quel fuoco. Altri diſſero di averne ſentito; ma oltre che non ſono eſenti dal ſenſo d' illuſione, e non ſi accordano punto fra di loro nel tempo, è probabile che alcuno faceſſe un cambio, poichè intorno a tal tempo ſcoppiarono le mine per lo ſcavamento dei foſſi del Caſtello.

ARTICOLO V.

Singolarità, e illuſioni di vicinanza, di moltiplicità, e di caduta di quel lucido globo.

Nelle molte relazioni, che in ſeguito mi procurai di queſta meteora, riſcontrai la ſingolarità, che fu eſſa da tutti creduta viciniſſima, e più d' uno diſſe, che avrebbe potuto toccarla con mano; e s' immaginò ciaſcuno di averla veduta cadere in terra poco lungi da sè. Indi nacque l' altra immaginazione, di cui più d' uno fu perſuaſo, che molte foſſero, e non una ſola, queſte meteore correnti per l' aria.

Sembrerà ancor più ſingolare, ſe aggiungerò, che quanti furono in luogo baſſo, e in orizzonte riſtretto, la credettero più vicina, che non quelli, che furon in alto, e in aperto orizzonte. Ma queſta medeſima ſingolarità indica la cauſa dell' abbaglio, per cui fu comunemente confuſa la viſuale colla ſoſtanza ſteſſa della meteora. Come ſomiglianti abbagli pur troppo frequenti s' incontrano in altre ſtorie di ſimili meteore, e ſegnatamente delle *ſtelle cadenti*, così ſtimo pregio dell' opera di trattarne alquanto diffuſamente ne' capi ſeguenti.

CAPO II.

Teoria delle ſingolarità, e illuſioni comunemente occorſe nella oſſervazione di queſta lucida meteora.

TRa molte relazioni, che gli eruditi miei corriſpondenti mi favorirono di queſto fenomeno, niuno toccò meglio il punto delle ſue ſingolarità, che un illuſtre Cittadino Genoveſe dilettante di Fiſica (il Sig. *Gio. Stefano Peſſagno*) nella ſeguente lettera del 21. ottobre 1784. data da Genova.

ARTICOLO I.

Eſpoſizione diſtinta delle ſteſſe ſingolarità.

Dalla noſtra villeggiatura di Rapallo alle ore 23 $\frac{1}{2}$ Italiane vidimo un groſſo globo acceſoſi in aria dalla parte di Greco diretto a ponente con luce sì viva, che ſembrava la Luna piena di mezza notte, indi cadere a' piedi della montagna detta *Ruta*, che circonda a ponente la valle, e gli orti di quel luogo. Io giudicai toſto, che foſſero vapori acceſi nell' aria, come i fuochi fatui, e ſimili. Ma molto mi ſorpreſe il ſentire alla ſera, che tutti lo avevano veduto paſſare direttamente ſopra di loro, e cadere quaſi a' loro piedi, in maniera che avrebbero potuto raccoglierlo nel loro cappello. Lo ſteſſo diſſero alcuni venuti da Chiavari diſtante cinque miglia, altri da Zoaglj diſtante tre miglia, in ſomma tutto il golfo diceva lo ſteſſo. Di più ſi è veduto in Genova diſtante 18. miglia da tutti in diverſe piazze, e caſe paſſare ſopra di loro cadendo ſulla città. Lo ſteſſo è ſeguito in Campomorone diſtante da Genova 10. miglia colle ſteſſe particolarità... In ſomma tutto il fenomeno ſi riduce a queſto, che molte perſone diſtanti fra loro di uno ſpazio non indifferente hanno veduto nella ſteſſa ora un ſolo globo naſcere dalla ſteſſa parte, ſeguire la ſteſſa direzione, e cadere lo ſteſſo in tante diverſe parti, e luoghi particolari, quante furono le perſone, che lo hanno veduto.

Se io ſteſſo non foſſi ſtato ſpettatore di queſto fenomeno, non

non crederei certamente, che molti poteſſero vedere uno ſteſſo globo cadere in diverſi luoghi così diſtanti fra loro. Dico *uno ſteſſo*, poichè ſe foſſero ſtati più d' uno, certamente io, che era in una elevazione molto alta, ne avrei veduto più d' uno, ſiccome tutti gli altri.

Infine io non ſaprei come combinare queſta coſa. Poichè ſe ſi dice, che ſiano vapori acceſi nell' aria, e che nel loro corſo ne abbiano acceſi degli altri, come ſuccede nelle ſtelle cadenti, e così ſi voglia provare la diverſità de' luoghi, dove ſono caduti; ecco che queſto contraſta colla particolarità di non eſſerſene veduto che uno ſolo da tutti. Se ſi dice poi, che uno ſolo abbia fatto queſto corſo facendoſi da tutti vedere forſe per la ſua elevazione, come mai ſi ſpiegherà la particolarità di cadere in tanti diverſi luoghi diviſi dalle montagne non apparentemente, ma realmente? Queſto è quello, che mi ſembra il più ſorprendente.

ARTICOLO II.

Dimoſtrazione diretta della illuſione di tali ſingolarità.

Sì bella, e giudizioſa eſpoſizione mi moſſe a penſar di propoſito alla ſoluzione d' un problema quanto nuovo, altrettanto importante nella meteorologica ſtoria; e come ciò feci in riſpoſta alla precedente, così ritengo in tutto il ſeguito di queſto capo l' epiſtolare ſtile riſponſivo. Ciò che ella riſcontrò da Chiavari fino a Campomorone per lo ſpazio di circa 40. miglia di là dall' Appennino ſulle riviere di Genova, io lo riſcontrai ſimilmente ripetuto ove più, ove meno da Lucca, e Verona fino a Pavia, e di qua fino a Torino, e Mondovì, e più oltre nelle alpi Cozzie; cioè per più di dugento miglia al di qua, e lungo le coſte dello ſteſſo Appennino.

Primieramente la ſua oſſervazione fatta in luogo alto, come ella era nella ſua villeggiatura di Rapallo, è una prova dimoſtrativa della unità di quel globo lucido, che fu viſto da tante perſone, e in tante parti diverſe. Ne ho io pure un' altra di confronto fatta da gente abile dal Caſtello di Tortona, e dai più alti monti del Tortoneſe, mentre io l' oſ-

servai dal piano sottoposto. Tanto a me, che era sull' aperta pianura, quanto agli altri, che erano sull' alto, sembrò quel fuoco del pari vicino; e si giudicò quindi vicino del pari il luogo della supposta sua caduta in coerenza del previo giudizio della sua vicinanza.

Io però nol vidi cadere altrimenti; e trovo scritto nel mio giornale la sera stessa queste espressioni, che sono qui sopra inserite nel capo primo, articolo quarto: *tutto però andava successivamente scemando, finchè finì alto sull' orizzonte in aria aperta* ecc., le quali espressioni indicano piuttosto la scomparsa di quel fuoco per successiva distanza e tenuità di luce, che non la caduta. Inoltre a me non passò punto sopra la testa, ma bensì pel mio meridiano assai basso verso austro. Fra tutti gli osservatori, coi quali mi avvenni a parlare di questo fenomeno, neppur uno vi fu, che rivenuto dal primo senso di sorpresa, e ridotto a rettificare i suoi giudizj colle esterne circostanze della sua positura, non abbia in fine riconosciuto, che il credersi quel globo sopra la testa non fu se non l' effetto della improvvisa comparsa di luce sì grande, e viva; come il giudizio della vicina sua caduta non fu se non conseguenza della pronta, e inaspettata sua estinzione, o scomparsa poco diversa da quella d'un razzo, che sappiamo cadere poco lungi. L' uomo d' ordinario non esamina, ma riposa di buon grado sui giudizj suoi più facili, e familiari, quantunque storte sieno le vie, d'onde essi provengono. Lo spirito di riflessione e di esame è una malattia, che non fu mai epidemica nella specie umana.

La copia delle persone, che si trovarono in aperta campagna nel tempo di questo fenomeno, ci somministrò mezzi di confrontarne in più luoghi le principali circostanze: la più preziosa fra queste fu la precedente apparizione delle prime stelle, che serve d' incontro solenne, e sicuro per tutta la successione dei luoghi fra loro dal primo fino all' ultimo termine del suo trapasso pei successivi meridiani. Ristringendone gli estremi fra i colli Euganei e le alpi Cozzie, e scegliendo per indizio di questi estremi Verona, e Mondovì abbiamo la distanza non minore di tre gradi in longitudine; la quale per la differenza di quattro minuti per grado nel tramontar del sole, e nella corrispondente apparizione delle pri-

me ſtelle eſige dodici minuti di ritardo da Verona a Mondovì. Dai riſcontri, che ho cercato più eſatti, non trovo fra que' luoghi relativa diverſità fra il previo apparir delle ſtelle e il tempo del ſenomeno, che anzi parrebbe a Mondovì comparſo il crepuſcolo più inoltrato. Comunque però ſi vogliano dilatare que' termini, e prenderſi anche a tutto ſvantaggio, ſe riflettiamo ai dodici minuti di aſſoluto ritardo, che in eſſi naſce dall' occidentale longitudine di tre gradi maggiore in Mondovì, non potremo far a meno di non riconoſcere, che quel lucido globo ha ſpeſi certamente parecchj minuti primi di tempo a farſi ſucceſſivamente vedere ſempre lo ſteſſo, e toglierſi infine per ſoverchia diſtanza fuori di viſta in tanti luoghi diverſi per tutta la ſua via da greco a ponente.

In ciaſcun luogo diſtinto comunque alto, e di aperto orizzonte, a niuno comparve quel ſenomeno per la durata di quaranta ſecondi, e non fu queſta d' ordinario, che di quindici in trenta ſecondi, nel qual tempo ſi accoſtò ſucceſſivamente, e paſsò oltre al meridiano dello ſteſſo luogo. Niuno adunque potè vederlo per l' intero ſuo corſo; ma ciaſcuno ſoltanto ne vide quel tratto, che fu a certe diſtanze corriſpondente al meridiano del luogo. Nè ciò nacque punto per difetto di altezza di quel lucido globo, del che più opportunamente diremo nel capo terzo, ma per tenuità della ſua luce, come nel ſeguente articolo VI. andremo dichiarando.

Ora l' unità del globo qui da bel principio dimoſtrata, e queſta ſucceſſione di tempo, che ella ben vede neceſſaria conſeguenza delle immediate, ed aſſolute oſſervazioni, che riguardano la mera eſiſtenza del fatto, formano una prova incontraſtabile, che l' altra parte della oſſervazione, per cui tutti credettero di averlo veduto cadere vicino a sè, non può eſſer vera; e che perciò anzi che immediata, ed aſſoluta oſſervazione, è neceſſariamente una illuſione, ed un fallace giudizio.

Da ciò s' impari quanto poco poſſiam fidarci della teſtimonianza degli uomini comunque probi, e veridici, e perfino de' noſtri proprj ſenſi, quando ſi tratta non dell' aſſoluta eſiſtenza, ma del modo di qualſivoglia fatto ſtraordinario, ed improvviſo, come lo è queſto, di cui trattiamo.

ARTICOLO III.

Introduzione alla teoria di queste illusioni.

Ma per quanto sia convincente la prova, che ci sforza a riconoscere illusoria la supposta, benchè da tutti confermata, caduta di quel globo; ella sarebbe pur vogliosa di sentirne qualche dichiarazione, che rendesse tanto piana, e intelligibile, quanto è certa, e necessaria la ragione di sì universale abbaglio.

E' più ardua impresa di sradicare un errore, massimamente quando sia già entrato in persuasione degli uomini, che di piantare cento verità. Poichè basta di queste porgerne una facile e chiara teoria, acciò sieno da tutti intese: per opposto quando si ha da combattere una persuasione per quanto sia falsa, anche le più evidenti teorie si oscurano dalla contraria prevenzione, e dall' amor proprio, che sono d' ordinario nojosi, e sofistici ragionatori. La teoria delle sensazioni è in se stessa piana, e semplicissima, quando si propone schietta, e fedelmente. Ma da *Platone* fino a *Mallebranche* hanno studiato i Metafisici di renderla sublime, e l' hanno resa inintelligibile, ed assurda: e per quanto dopo *Loke* siasi questa perfezionata, rimane tuttavia assai comunemente in contrasto con cento avanzi, e mille trasformazioni d' innate idee.

Non le saprei abbastanza esprimere quanto grande sia l' influenza delle metafisiche prevenzioni sulla comprensione degli uomini, e nelle Fisiche, e Morali opinioni, che per siffatto modo di comprendere entrano nella comune persuasione: e non mi azzarderei di limitare fino a qual segno potesse spingere questa persuasione chi insieme ai volgari pregiudizj, e agli abiti, nei quali in buona fede riposiamo nell' uso delle sensazioni, sapesse accortamente combinare insolite, e improvvise impressioni di fatti ben concertati. Ne abbiamo esempj da *Apollonio Tianeo* fino a *Mesmer* a' dì nostri e in Parigi popolare Taumaturgo del chimerico *Magnetismo animale*. Gioverà pertanto ridurre le nuove, e lucide teorie delle sensazioni al caso presente per dare un saggio della loro influen-

za nelle Fisiche osservazioni e per far sovvenire a' Fisici qual caso debba farsi delle maravigliose circostanze di somiglianti fenomeni descritti d' ordinario da pregiudicati osservatori.

Le idee delle distanze, e delle grandezze, che per la via degli occhi acquistiamo, benchè in virtù degli abiti precedenti ci si presentino all' animo con tanta facilità, e prontezza, come se fossero immediate impressioni della vista, e mere sensazioni, ciò non ostante sono giudizj, e deduzioni talvolta ben complicate da altre previe sensazioni, e da principj costanti, che ci siamo resi familiarissimi coll' uso degli occhi, e col confronto loro con altri sensi, e segnatamente col tatto, che è il vero maestro, e duce degli altri sensi; quantunque essi tosto che sono eruditi, e franchi sogliano trascurarlo, ed erigersi per se stessi in autori, e padroni di quelle operazioni, che da lui primieramente appresero.

Quindi è, che *le impressioni insolite, ed improvvise si giudicano, e indi fermamente si credono simili alle familiari, e consuete, benchè sieno talvolta affatto opposte.*

ARTICOLO IV.

Si dichiara l' illusione della vista coll' esempio dell' udito.

Ne abbiamo l' esempio nel presente fenomeno. Siccome all' idea di fuoco vibrato, e di globo che sembra lanciarsi, e scoppiar per l' aria si unisce d' ordinario il sibilo, lo stridore, e lo scoppio; così non manca la maggior parte degli spettatori di attestare, che ne hanno udito il sibilo, ed il fischio, e infine un orrendo scoppio, con cui svanì; altri dicono di averne sentito lo scoppio previamente, quasichè con esso si fosse lanciato in aria. Io però non ho sentito nulla di tutto ciò. E quando pur taluno avesse potuto sentirne il sibilo, attesa la grande distanza, non lo avrebbe sentito altrimenti nè previo, nè contemporaneo, ma tanto tempo dopo la scomparsa del fuoco, quanto lo esige l' immensa differenza di celerità fra la propagazione della luce e quella del suono, della quale diremo in fine del capo terzo.

ARTICOLO V.

Si dichiara l' illusione con altri familiari esempj della stessa vista.

A questa illusione di sibilo, e di strepito nata per intrusa associazione degli orecchi è affatto somigliante l' altra degli occhi stessi per la supposta caduta. I corpi lucidi, e quei, che tali stimiamo, ci sembrano tutti egualmente vicini, o lontani; come in un comune concavo emisfero o nella stessa volta celeste impiantate ci sembrano tutte le stelle, e anche i pianeti nel ciel sereno di notte. Chi dal fondo d' un pozzo vedesse per la prima volta a trapassarsi sopra il sole, o la luna, crederebbe que' corpi nati, e spenti intorno alla bocca di quel medesimo pozzo. Al presente per diverse riflessioni, e per varie ragioni, molte delle quali sono false, e tutte adattate al modo di pensare proprio di ciascuno, siamo prevenuti, che il sole, e la luna sono lontanissimi da noi, e perciò ci crediamo di vederli ben lontani.

ARTICOLO VI.

Si dimostrano i principj dell' illusione nel presente fenomeno per chi ne osservò lungo tratto del suo corso.

Se quell' ardente globo l' avessimo creduto celeste, ci sarebbe comparso lontanissimo, come in vero per la stessa causa nell' atto della loro partenza ce lo pajono le *stelle cadenti*; ma a motivo del suo splendore sembrava troppo grande per farsi giudicare celeste. Onde se lo abbiamo rassomigliato alla piena luna nella grandezza, lo abbiamo però giudicato simile ad un grande razzo, o fuoco d' artifizio nello splendore, nel moto, e nella vicinanza. Quindi in coerenza di quest' ultimo giudizio ciascuno si è creduto di vederselo spegnere, e cader vicino chi più, chi meno secondo le particolari premesse, e circostanze, alle quali senz' avvedersene per mero abito, e di buona fede l' ha riferito.

L' apparente inclinazione di quel fuoco dall' alto al basso

non ſu dunque ſe non un effetto del ſucceſſivo ſuo ingrandimento alla viſta noſtra in ragione che più ſi accoſtava verſo di noi paſſando pel noſtro meridiano : talchè quanto creſceva in relativa grandezza, tanto ſi giudicava più vicino, e perciò più baſſo, e diretto ſopra di noi. Scoſtandoſi poi dal noſtro meridiano, e proſeguendo oltre andò ſucceſſivamente ſcemando di ſplendore, e di relativa grandezza a ſolo motivo della ſucceſſiva diſtanza maggiore. Ma ritenendo noi la previa idea della ſua direzione dall' alto al baſſo verſo di noi, e ſupponendolo in conſeguenza tuttora più a noi vicino; non potemmo riferire la ſua diminuzione, che a rapida mancanza di luce, e infine ad una immaginaria caduta, ed eſtinzione, piuttoſto che alla ſua diſtanza, della quale in quel punto non avemmo veruna idea, ed anzi ne ritenevamo la contraria prevenzione.

Si debbe pertanto concepire quell' ardente meteora diretta in un piano, ovvero, ſe più piace, in un arco poco, o nulla inclinato all' orizzonte, ma altiſſimo, come compariſcono i corpi celeſti, e come s' intende da chi ha qualche tintura delle sferiche dottrine aſtronomiche. Scoſtarſi dalla verticale, o dal piano del meridiano, come ſi accoſta all' orizzonte, ſembra lo ſteſſo che abbaſſarſi, comunque proceda nella ſteſſa retta parallela all' orizzonte; e ſcemare di ſplendore, e di relativa grandezza per ſucceſſiva diſtanza maggiore non avvertita è lo ſteſſo che andarſi eſtinguendo.

E per porgere più giuſta idea del ſucceſſivo aumento, e decremento dello ſplendore, e della corriſpondente grandezza di queſta lucida meteora, avvertirò che all' occhio ſteſſo, che può fiſſarla quantunque più vicina francamente, ſi manifeſta l' intenſità della ſua luce d' un genere medio fra la *ſcintillante*, *e fosforica*. Che in vero tal fuoco aveſſe tutte le ſembianze di *fatuo*, cioè di ſemplice ſplendore privo di ſcintillazione, e d' ardore, ce ne rendono vie più probabile incontro e il paragone, che comunemente ſe ne fece collo ſplendore della luna, e la ſomiglianza ſua alle ſtelle cadenti, e la ſicurezza, con cui più d' uno ſe lo immaginò tanto dappreſſo fino a penſar di toccarlo con mano, e infine il non aver altrimenti fatto ſovvenire il timore di abbruciamento, o di calore neppure nella mente delle ſemmine più timoroſe.

Come la fosforica luce diviene insensibile a corta distanza; così questa, di cui parlo, scema notabilmente, e anche svanisce a tale distanza, in cui la scintillante appena comincerebbe ad abbagliare alquanto meno. Io soglio porre fra i corpi lucidi scintillanti, ossia vibranti, e questi che appartengono alla classe dei fatui, differenza consimile a quella, che passa tra il suono di uno stromento libero, e dello stesso fornito di sordina.

Nè si creda questa distinzione d' intensità di luce scintillante immaginata all' opportunità del caso presente, che anzi posso confermarla direttamente colle nobilissime sperienze degli *Accademici Parigini* in fine della Memoria *sulla propagazione del suono* (an. 1738). La grandezza, e vivacità della luce della polvere da cannone accesa al chiuso, o all' aperto non diminuisce, come altre fiamme sogliono meno vibranti, in ragione delle distanze. Poichè osservarono essi. 1. che si vede egualmente viva la stessa luce anche a distanza quadrupla. 2. si vede a distanze eguali egualmente vivo e grande il lampo d' una libbra, che di due libbre di polvere accesa. 3. il tempo piovoso, che impedisce di giorno la vista di oggetti lontani illuminati, non impedisce la vista della luce di quella polvere accesa; anzi talvolta comparisce essa più vivace attraverso la pioggia, che non in pari distanza per l' aria serena. Si aggiunga a tutto ciò, che la luce di molti, e grandi lumi d' olio, che si usa nei Fanali alla bocca dei porti di mare, che pur è luce assai viva, non si vede con aria nuvolosa, e piovosa, che a piccola distanza, e debolissima.

Infine che quel lucido globo siasi tolto di vista per difetto d' intensità di luce, e pel rapido suo trasporto a grande distanza, e non per ragioni geografiche, e ottiche della visuale, che dallo spettatore non arrivasse sotto la sua altezza verticale, io lo inferisco da questa riflessione; che tutti a seconda della sua direzione lo hanno visto alto dai limiti dell' orizzonte, benchè nel progresso del suo corso lo abbiano poi giudicato caduto vicino. Ora quei, che si fossero trovati verso i confini della visuale per tangente dal loro sito al sito dell' altezza del globo, lo avrebbero per necessità veduto lontanissimo, e basso assai, e infine a radere per lungo il limite dell' orizzonte; il che in tanti riscontri non sento essere

ſere accaduto a niuno in niuno de' termini di ſua apparizione. Pertanto la ſola celerità del ſuo moto, e la rarità della ſua luce lo reſero per ſoverchia diſtanza inviſibile non altrimenti, che lo avrebbe fatto l' improvviſa ſua caduta, o eſtinzione.

ARTICOLO VII.

Si dimoſtrano ſimili principj d' illuſione per chi non oſſervò il fenomeno, ſe non incidentemente in qualſivoglia tratto del ſuo corſo.

Quindi è che trattando dell' altezza, del moto, e dello ſplendore di ſiffatte meteore, quando anche riſultaſſero pel calcolo oltre i confini della noſtra ſenſibile atmosfera, vogliono con limitazione, e diſcrezione riferirſi a termini aſtronomici, e a ſomiglianti nomi di corpi celeſti (*a*). In fatti parlando di queſti fuochi con aſtronomica fraſe preſentano il paradoſſo di *tramontare di qua dai monti*, oſſia di ſcomparire ſenza oltrepaſſare i limiti dell' orizzonte ſenſibile, i quali limiti ſono nel contorno de' monti; come appunto ſi perde di viſta un uccello, che proſiegue il ſuo volo, ſenza che perciò debba dirſi tramontato. E ſembrerebbe un uccello al

(*a*) Per dare qualche idea delle ſtraordinarie conſeguenze, alle quali traſportano le facili applicazioni de' nomi, e de' termini aſtronomici in queſti meteorologici fenomeni, riferirò qui un paragrafo di lettera dell' Aſtronomo di *Greenwich Maſkelyne* all' Aſtronomo di Milano Ab. de *Ceſaris* in data dei 12. Decembre 1783. *Libenter accipias precor chartulam, quam nuper edidi ad excitanda hominum tam doctorum quam indoctorum ingenia ad acrius obſervanda meteora ignea dicta* (Fire-Balls, globi di fuoco). *Forte fortaſſe Cometae evaſura ſunt. Meteorum quod* 18. *Auguſti praeteriti emicuit ab Inſulis* Shetlandiceis *in latitudine* 60.° ½ *uſq: ad* Nuys *in Burgundia in lat.* 47.° 7', *long.* 2.° 37' *ad orientem Lutetiæ per diſtantiam* 1000. *milliarium viſum eſt; neque dubito quin ultra verſus* Borea-zephyrum, *& Euronotum apparuerit. Secundum curſum ſuum tranſiiſſe debuit in* zenith *Urbis Nicææ, & ad diſtantiam* 2.° 20' *magni circuli ad noto-zephyrum veſtræ Urbis, poſtea ad auſtralem partem Inſulæ Corſicæ, & ad* Borealem *partem Inſulæ Sardiniæ, & in* zenith *apud* Tunetum, *& Tripolin... Operam veſtram in hac re, quæ mihi magni momenti videtur, impendere, Vir doctiſſime, ne dedigneris, utpote quæ ad philoſophiam naturalem ſaltem, forte etiam ad Aſtronomiam ipſam promovendam conducere poteſt.*

pari di quel globo cadere ai piedi del monte, se fosse del pari lucido, e se avesse come questo insoliti, e rapidi termini di apparizione, e scomparsa. E quest' insolita foggia appunto d' un corpo lucido, che ad un tratto ci si presenta, che somiglia ai celesti, ed ha tutto insieme lo splendore, e il moto rapido come i terrestri più vicini, e che infine ci svanisce di vista, ossia ci tramonta in certo modo sugli occhi, su la cagion principale, che confondendoci le idee lo fece comunemente credere caduto vicino. Ma di simili illusioni ci occorrerà rintracciare vie più la causa nel Capo quarto in proposito delle stelle cadenti.

Dalla grandezza in fuori, che fu assai maggiore, e dalla velocità, che compariva piuttosto minore, fu quell' ardente meteora nel rimanente ben simile ad una stella cadente; e lasciò al pari delle stelle cadenti dopo di sè una striscia, o traccia rovente in proporzione più viva, e con varie degradazioni di colori, e tramandò talvolta intorno a sè alcune faville, che presto disparvero, come somiglianti faville in proporzione minori ho più d' una volta osservato intorno alle stelle cadenti, quando inclinano al loro termine.

Ella vede adunque, che non solo in Astronomia, ma anche in Fisica crediamo talvolta, è siamo vanamente persuasi di vedere, e sentire le cose ben diverse, e perfino all' opposto di ciò, che sono in se stesse.

CAPO III.

Confronto di osservazioni per calcolare l' altezza e il corso della fiamma volante con alcune riflessioni.

QUelle avvertenze, e limitazioni, che nell' ultimo articolo precedente indicai per la conveniente applicazione di frasi, e nomi astronomici a questi meteorologici fenomeni, divengono tanto più necessarie qualora i metodi in Astronomia familiari, e sicuri trasportare si vogliono a calcolare l' altezza, la distanza, e il corso di simili meteore. Non sono che troppo frequenti gli esempj d' importuno sfoggio di figure, e di calcoli, i quali debbono infine riconoscersi, per la realtà delle cose, non solo inutili, ma ben piut-

tosto idonei ad indurci in gravi errori, e fallacissime supposizioni.

I corpi celesti sono sicuri nella particolare loro esistenza, e sicuramente situati, e circoscritti in quella parte del celeste emisfero, a cui da molti osservatori, e da diversi punti della terra si riferiscono, e ci presentano così termini certi per calcolarne coi soliti metodi lo spazio, il tempo, la distanza, e ogni altro elemento della loro orbita.

Ne' meteorologici fenomeni nulla d' ordinario s' incontra di sicuro, e costante nella identità de' limiti loro, nè del luogo, nè del tempo, a cui riferire si debbono. Ne' più estesi, come sono le aurore Boreali, non vi è modo di fissare un sol punto, che sia certamente circoscritto, e si presenti lo stesso a due osservatori l' uno dall' altro alquanto distanti. In questi globi lucidi, che sono più ristretti, la rapidità del loro moto, l' improvvisa loro apparizione, e scomparsa non ci lasciano d' ordinario luogo a concertate osservazioni di confronto, e ci rendono il più delle volte incertissimi.

Avrò altrove occasione di mostrare, che proviene l' aurora Boreale da una effusione, e moto di materie per l' atmosfera, le quali estendono per cento, e dugento leghe orizzontalmente certa somiglianza di fenomeni corrispondenti a simili accidenti di quelle stesse materie sparse per l' atmosfera. Si vedono quindi dagli osservatori distantissimi que' fenomeni, ne' quali però non vi è che la somiglianza, ma nissuna unità, nè identità di luogo, nè di soggetto de' medesimi. Sono distinte parti d' un lungo corpo consimile in tutta la sua successione, ed estensione; ciascuno ne vede la sua sezione, ma ciascuna sezione è tanto distinta da tutte le altre, quanto è diverso per ciascun osservatore il piano nell' orizzonte, e il segmento dell' atmosfera, che nell' orizzonte di ciascuno si comprende. Come una nebbia estesa ciascuno la vede consimile intorno, e sopra di sè; ma non è identica quella dell' uno con quella dell' altro; e mal si concerterebbero gli angoli, e la base per calcolarne l' altezza.

Sembra in oltre assai probabile, che la luce stessa di una data parte, o sezione dell' aurora Boreale non sia visibile a tale distanza, quanta il più delle volte suole assumersi fra due

osservatori, che s' immaginano di fissare di quella stessa parte gli angoli della rispettiva elevazione dall' orizzonte.

L' aspetto infine di somiglianti meteore non dipende d'ordinario dalla loro propria figura, e grandezza; che anzi la figura stessa, e grandezza è sempre varia, e risulta piuttosto dalla diversità delle distanze degli spettatori, e molto più dalla grossezza, e dalla diversa purità, o impurità degli strati d' aria frapposta. Onde le distanze tra gli osservatori necessarie per somministrarci una base, e gli angoli pel calcolo ci cambiano la figura, la grandezza, e tutta in somma l' identità della meteora, che ci proponiamo di confrontare per soggettarla al calcolo.

E ciò basti aver qui di passaggio accennato per eccitare la curiosità di confrontare i metodi più comunemente praticati nel calcolo dell' altezza, e delle distanze di somiglianti meteore coi modi, che a noi fortunatamente si presentarono per determinare l'altezza del lucido globo, di cui trattiamo.

ARTICOLO I.

Confronto di osservazioni, e cognizione dell' altezza del lucido globo.

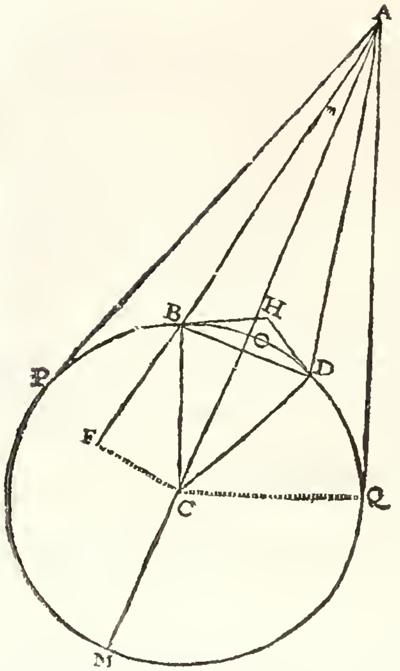
Ne aveva io fissato in Tortona, quando passò pel mio meridiano, l' altezza sull' orizzonte *a gradi* 40 *verso l' austro*. Ebbi felicemente riscontro dall'accurato osservatore Genovese, che in Rapallo egli poteva accertarne l'altezza sull' orizzonte nel punto, che passò pel suo meridiano *a gradi* 45 *verso borea*; e ciò non per semplice giudizio dell'occhio, ma in oltre verificando questo colle effettive misure dell' altezza della sua casa, e dell' ombra, che ne lasciò sul terreno, quando presso a poco trapassò il meridiano. Col prezioso incontro di queste due osservazioni per quanto in simili materie può sperarsi esatte, e sicure, fui certo, che il lucido globo nel suo corso passò verticale fra Tortona e Rapallo sopra le creste del frapposto Appennino. Non mi restò dopo ciò, che di riconoscere in una carta geografica abbastanza grande, ed esatta la rispettiva posizione, e le distanze dei due luoghi per fissarne l' arco, ossia la base frapposta tra i due orizzonti.

E qui pure fu all'uopo mio opportuna l'ampia Carta Corografica degli Stati di S. M. Sarda pubblicata nel passato secolo dal *Borgonio*, e corretta, ed accresciuta del 1772. Ivi è Rapallo assai più orientale di Tortona; onde conducendo una retta fra questi due luoghi, e paragonandola con altra retta, che rappresenti sulla stessa Carta la direzione del globo lucido da greco a ponente, questa taglierà quella linea ad angolo tanto poco inclinato a greco, che senza grave errore potrebbe assumersi in direzione verticale a quella prima linea. Non è inoltre tanta la differenza fra i due meridiani, che ci faccia temere di notabile divario di tempo fra le due osservazioni; tanto più che questo divario ben poco, anzi nulla influirebbe nei risultati del calcolo, atteso che questa meteora, come da principio notai, in tutto il suo corso, per quanto cadde sotto la osservazione, si mantenne costantemente assai alta, e non indicò per quel verso che tenue inclinazione all' orizzonte.

Per la distanza cercata fra i due luoghi si trovano appunto sulla stessa carta 60 miglia Italiane da fuori di porta nuova di Tortona fino a Rapallo; onde la cognizione dell' altezza di questa meteora ad altro non si riduce, che alla soluzione del seguente problema:

Data la base BD *di* 60 *miglia Italiane*, *e dato l' angolo di elevazione Boreale sull' orizzonte* B *di gradi* 45, *e sull' orizzonte* D *l' angolo di gradi* 40 *di elevazione Australe*, *nella quale s' incontra il globo lucido* A, *determinare l' altezza verticale di questo; e nella stessa base* BD *segnare il punto* O, *su cui cade quella verticale*.

SOLUZIONE.



Aſſegnando 60 miglia Italiane per grado (*come accenna la Lande Aſtronom. Tom. 3. artic.* 2639.), ed eſſendo la diſtanza di 60 miglia, ſarà l' arco *BOD* = 1°; onde menando la corda *BD*, i due angoli eguali riſultanti dalle due tangenti ai raggi della terra, che ſono le viſuali dei due orizzonti in *B*, e in *D* ſaranno di 30'. Dunque nel triangolo *ABD*, ſarà *ABD* = 45° 30', *ADB* = 40° 30'; onde *BAD* = 94°

Avendo aſſegnato 60 miglia per grado, il raggio della terra ſarà 3440 miglia; e la differenza tra la corda *BD*, e l' arco *BOD* ſarà poca, o niuna; onde *BD* = 60.

Con queſti dati coſtruendo l' opportuna figura per compiere il calcolo trigonometrico, ſi trova l' altezza cercata *AO* = 27. 5 miglia Italiane.

E i due ſegmenti della baſe in *O* ſono $BO = 27\frac{4}{6}$.
$OD = 32\frac{2}{6}$.

ARTICOLO II.

Calcolo della eſtenſione di terreſtre ſuperficie, da cui in virtù della ſua altezza dovette eſſer viſibile il lucido globo.

Poſta l' altezza ſua verticale *AO* meninſi dal punto *A* le tangenti *AP*, *AQ* ſopra un circolo, che rappreſenti la sferica figura della terra. Saranno queſte le viſuali del più lontano orizzonte, ſu cui poteſſe eſſer viſibile queſta meteora

in *A*. Quindi per fiſſare la ricercata eſtenſione, da cui ſulla faccia della terra dovette eſſer viſibile quel lucido globo in virtù della ſua altezza, non ci reſterà, che di calcolare in miglia Italiane la miſura dell' arco $OP = OQ$, la quale riſulta di miglia 433.

Queſta meteora pertanto in ciaſcun punto di tutto il ſuo corſo da greco a ponente fu viſibile a ragione della ſua altezza per l' eſtenſione di 433 miglia per ogni verſo, ed egualmente dall' una, che dall' altra parte. E perciò l'eſtenſione cercata occuperebbe in latitudine un tratto di terreſtre ſuperficie di miglia 866, quando la ſua altezza foſſe ſtata coſtante.

Ma ſiccome oſſervai in eſſa l'inclinazione di circa 15 gradi; ſarà quindi l' eſtenſione ſteſſa alquanto maggiore verſo greco, ove comparve più alta; e in proporzione alquanto minore verſo ponente, ove andò ſucceſſivamente abbaſſandoſi.

In longitudine poi da greco a ponente dovrà aggiungerſi alle miglia 866 la miſura dell' intero corſo di queſta meteora. E benchè non abbia finqui potuto raccogliere tante oſſervazioni ſicure da ſtabilirne preciſamente i limiti, poſſono queſti per le notizie, che ho al preſente, eſtenderſi dal punto *O* fra Tortona e Rapallo per due gradi verſo greco, e per un grado e mezzo verſo ponente. Siccome la carta del *Borgonio* non ſi eſtende a greco abbaſtanza, ed in oltre non ha diſtinti i gradi, mi fu perciò neceſſario ricorrere ad un' altra carta, che è quella di *Le Rouge* per indicare in qualche modo la ſituazione di quel punto *O*. Corriſponde queſto ſulla carta ultima intorno al luogo detto *Saſſo*; ed è in longitudine 27.° 10′; e in latitudine 44.° 48′.

Dovranno dunque aggiungerſi 120 miglia alle miglia 433 verſo greco, e miglia 90 alle 433 verſo ponente. Onde riſulterà l' eſtenſione cercata in longitudine di miglia 1076, le quali partendo dal punto *O* ſaranno verſo greco miglia 533, e verſo ponente miglia 523.

Onde ſe ſulla baſe fiſſata tra Tortona e Rapallo dal punto *O* ad angoli indicati nel precedente articolo ſi prolunghi ſecondo la direzione della meteora una retta verſo greco di miglia 120, e la ſteſſa verſo ponente di miglia 90, ne riſulterà un diametro di miglia 210 compreſo tra il Vicenti-

no verſo i colli Euganei fino alle alpi Cozzie verſo il colle di Tenda. Su queſto diametro potremo deſcrivere nella terreſtre ſuperficie lo ſpazio, per cui fu viſibile la meteora; e sarà quello ſpazio circoſcritto in una ſpecie di ovale, in cui eſſendo le ordinate in *O* di miglia 433, anderanno queſte in proporzione dell' altezza ſucceſſivamente creſcendo per 120 miglia verſo greco, e ſcemando per miglia 90 verſo ponente, che ſono gli ultimi termini, dai quali l' ultima ordinata dovrà, come da centro, farſi girare intorno per connettere inſieme i due archi ovali ſulle ordinate ſteſſe condotti. E ſiccome indicai da principio, l' inclinazione della meteora ſecondo la direzione ſua fu in circa di gradi 15 ſull' orizzonte di Tortona; così chi ama far eſercizio di calcolo potrà determinare la progreſſione di quelle ordinate, e compiere la deſcrizione dello ſpazio cercato.

ARTICOLO III.

Confronto de' luoghi, ne' quali fu effettivamente oſſervato il globo lucido con alcune ricerche ſulla ſua natura, e grandezza.

Le conſeguenze di calcolo non oltrepaſſano punto nè poco la sfera di mere poſſibilità in tutto ciò, che non è immediatamente compreſo nelle oſſervazioni, che ne porgono l' occaſione. Ora la baſe, e gli angoli di elevazione fiſſati ne' precedenti articoli non altro riguardano, che la preciſa altezza di quella fiamma nel punto, in cui fu oſſervata. La direzione, e l' inclinazione della ſteſſa a ſeconda del ſuo corſo furono nello ſteſſo luogo raccolte con altre, e diſtinte oſſervazioni. Affinchè poi ſuſſiſtano le deduzioni de' calcoli, che quella direzione, e inclinazione ſuppongono coſtanti in tutto il corſo della meteora, d' uopo è rivolgerſi ad altre oſſervazioni, che ce ne facciano fede nel precedente, e ſucceſſivo ſuo andamento.

Vero è che in quella altezza, e rarità di atmosfera non ſi ſaprebbe agevolmente immaginar una cauſa, che faceſſe deviare quella fiamma dalla prima ſua direzione. Ma oltre che il difetto di ragione è un fievole fondamento per ben conchiudere

chiudere nelle cose di fatto, gioverà riflettere, che in quella stessa rarità dell' aria ambiente non sarebbe facile di trovare un punto d' appoggio, o riagente, che determinato abbia la projezione, e lo slancio di quella fiamma con sì sorprendente rapidità: e quantunque non sappiamo intenderne il modo, è pur costante, che fu lanciata, e corse per tutto il suo sentiero. E perchè dunque non potranno esservi modi, e cause, che ne cangino la direzione, e l'inclinazione, quantunque noi non sapessimo riconoscerle, nè immaginarle?

Che se per intendere quella rapidità del suo corso prescindere ci piaccia dalle meccaniche maniere di projezione, e ci rivolgiamo, come pur sembra più plausibile, ad interiore, e mutua azione di materie lentamente, e di lunga mano preparate, e disposte per quello strato d'aria, e per tutta l'estensione, in cui successivamente avvamparono; assomiglieremo con ciò questa meteora ad un fulmine a ciel sereno, di cui si trovano esempj in qualsivoglia corso di Fisica; e soltanto avrà questo la particolare condizione di essere assai più alto dei fulmini ordinarj. Quindi quella stessa altezza sua, e rarità dell' aria ambiente, che ci renderebbe inesplicabile la sua meccanica projezione, ci somministrerà piana intelligenza della rapidità sua grande bensì, ma assai minore di quella del fulmine, per la minore riazione, e pel minore addensamento di materie, che soltanto può aver luogo in quell'aria rarissima.

E per le medesime cause risulterà l' espansione, e ampiezza di quella fiamma tanto maggiore di quella del fulmine, quanto è in proporzione minore la forza dell' aria intorno coercente, e comprimente.

Infine chi ha qualche idea dell' intensità del suono non aspetterà, che in tanta rarità d' aria, e in sì libera diffusione di quelle materie, che avvampano, possa accadere sì grande percossa nell' aria ambiente da propagarne lo strepito perfino alla superficie della terra. Onde concepirà quel fuoco, siccome le più sensate osservazioni lo confermano, tacito, e silenzioso agli orecchi nostri in tutto il suo più alto sentiero; e non ci resterà, che di averne udito lo strepito nel termine suo, quando pur si producano osservazioni, che ne dimostrino l' abbassamento nelle ordinarie regioni de' fulmi-

ni, come pur si riscontrano assai bassi somiglianti esempj di globi ardenti, che furono veramente strepitosi (*Mem. dell' Accad. delle Scienze di Parigi* 1725.); se pure non fossero le testimonianze di strepito tanto vane, quanto facili associazioni d' idee, senza l' intervento dell' orecchio.

Nè in questo proposito tralescerò di avvertire, che il rimbombo, e lo strepito colla ragione della sua propagazione di 1038 piedi parigini per secondo di tempo, come hanno fissato gli *Accademici Parigini* fin dall' anno 1738 (*a*), non indica punto l' altezza, se non nel caso che sia ben certo chi l' ascolta di ritrovarsi sotto il centro dello scoppio strepitoso. Altrimenti non indica se non la distanza dello scoppio stesso, la quale si combina con qualsivoglia altezza altronde nota, e anche con niuna, come negli scoppj, che si fanno dalla terra.

In mezzo però a sì plausibili idee non acquisteremo verun diritto di presumere la direzione, e inclinazione sua costante piuttosto, che varia; e saremo in questa parte costretti a riportarci sempre al confronto di altre osservazioni. Tutte cospirano le più esatte notizie, che da ogni parte ho riscontrato, in riconoscere, che quella fiamma procedesse costantemente da greco; poichè ciascuno dice d' averla veduta ve-

(*a*) Corressero i *Parigini Accademici* l' antica loro estimazione della velocità del suono di 180 tese per minuto secondo, e la ridussero a tese 173, che sono appunto piedi 1038. Or questa riduzione si trova affatto conforme a recentissime sperienze fatte a Gottinga con un orologio ben singolare, di cui parla *Kestner* Segretario perpetuo di quell' accademia in una lettera al P. *Gregorio Fontana* in data dei 19. Aprile 1779. ne' seguenti termini: *Aliud horologium possidemus portatile, ut quod ab elastro moveatur, tribus indicibus monstrans minuta prima, secunda, tertia, horas nullas, motum 29. circiter minutis primis continuans. Motus ejus quovis minuto tertio cohiberi potest, dummodo voluntatem observatoris digitus velociter satis sequatur. Ita notato positu indicum, scitur quantum promoti sint* v. c. *tempore intra fulgur visum & fragorem auditum elapso; & sic hoc tempus in minutis tertiis definitur. Confectum est horologium ab experto Horologiopoeo in nostra Urbe degente, cui nomen* Klindworth.

Usus illo sum cum Mayero *ad experimenta circa soni velocitatem instituenda die 15. Octobris 1777. Utebamur tormento minore, cujus orificii diameter aequatur diametro globi ferrei duarum unciarum. Eo ab Observatorio* 3218, 8 *pedes parisinos remoto, repetitis experimentis comperimus, tempus inter fulgur & sonitum intra minuta secunda 3, tertia 5 & 9 coërceri. Ut ex his experimentis, & aliis in distantia minore institutis viam soni minuto secundo 1038 pedum parisinorum repererimus, cui probe cum aliorum experimentis convenit.*

nir verso di sè da qualche punto tra levante e tramontana, indi proseguir a ponente.

Per l' inclinazione poi d' uopo sarebbe con osservazioni previe, e susseguenti a quelle di Tortona, e di Rapallo calcolarne similmente l' altezza per dedurne le giuste progressioni. Frattanto però niuna ragione ci vieta di prendere per congettura, e per uso di calcolo quella inclinazione come costante.

Apparisce per opposto incredibile divario fra i risultati del calcolo, e le effettive osservazioni in proposito dello spazio, da cui fu sulla terra visibile quella meteora. Poichè estendendosi questo a 1076 miglia da greco a ponente, ed a miglia 433 per ogni verso in latitudine, mi reca maraviglia di non riscontrare chi abbia osservato quella meteora nemmeno oltre la distanza di 100 miglia da alcun punto di quel diametro, che indicai per determinarne lo spazio col calcolo.

Niuno parimente, per quanto abbia io rintracciato, vide sorgere quella fiamma dai veri limiti dell' orizzonte, niuno la vide perdersi entro i medesimi; ma chiunque s' incontrò in orizzonte libero, ed ebbe sufficiente uso di riflessione per non abbagliare se stesso con estranee associazioni d' idee, se la vide come piombare dall' alto verso di sè, e ne ammirò poco meno che in un solo istante la grandezza, e lo splendore colla sua apparizione, mentre era alta sull' orizzonte incirca trenta gradi, nel che d' ordinario convengono in maggior numero gli osservatori. Questi trenta gradi però non si debbono intendere nel punto, che passò pel meridiano, al che pochi hanno con attenzione riflettuto; ma nel punto, in cui ciascuno la vide or di fronte, or di traverso secondo la particolare sua posizione.

E questo divario ben lungi d' indurre veruna contraddizione tra le osservazioni e il calcolo sembra anzi vie più confermare la tenue intensità di luce, e la fatua indole di questa meteora, siccome lo notai nell' articolo sesto del Capo precedente. Talchè dovrà dirsi, che restò essa invisibile, ossia tanto debole da non farsi con pompa, e novità distinguere non già per mancanza di grandezza, e di altezza, ossia di raggio visuale sull' orizzonte, ma perchè la stessa sua grandezza, e altezza ne ha rarefatto, e diffuso per tal mo-

do l'incendio, e il centro della ſua luce, che oltre certa diſtanza fu tanto diſperſa ne' ſucceſſivi ſtrati d' aria frappoſta, e tanto debole da non far altra impreſſione alla viſta, ſe non quella, in cui realmente io la vidi finire, cioè in una sfumatura di vapor luminoſo, il quale perciò oltre certa diſtanza non fu in verun conto avvertito.

Che ſe infine ci piaccia di conoſcere la grandezza di queſta meteora, abbiamo nei triangoli già fiſſati ne' precedenti articoli gli elementi ſicuri per calcolarla, ſecondo le comuni ipoteſi della apparente, e reale grandezza de' corpi lucidi.

Mi baſterà di notare, che mal ſi concepirebbe la ſua grandezza in tutto il corſo uniforme, e coſtante. Due circoſtanze nel Capo primo deſcritte la indicano molto varia. Primieramente io la vidi in qualche punto ſtraordinariamente dilatata e allungata, e perſino diviſa in due; e nel ſeguente iſtante aſſai più concentrata, e in proporzione ancor più lucida di prima. In oltre quelle faville in forma di lumicini, che ne cadevano a quando a quando intorno, maſſime verſo il ſuo termine, dovettero eſſere di gran mole per eſſer viſibili a sì grande diſtanza, e furono perciò altrettanti ſmembramenti, ed una ſpecie di profuſione della ſua grandezza. Sembra veriſimile, che ſieno occorſe molte di quelle ſeparazioni, le quali però non furono diſtinte, ſe non da chi fu in proſpettiva di fianco, e non altrimenti da chi ſi trovò a ſeconda del moto, e non vide quella fiamma, che in iſcorcio. Per ultimo il naturale andamento delle altre fiamme anche nell' aria più denſa, e reſiſtente ci ſi preſenta in aſpetto ſempre tumultuario, e volubile; nè ſi vede fiamma naſcere tutto inſieme, e procedere fino al ſuo termine con uniforme grandezza.

CAPO IV.

Oſſervazioni ſulle ſtelle cadenti con alcune rifleſſioni ſulla loro natura.

D' Uopo è prevenire ſul bel principio un troppo comune pregiudizio, a cui il nome ſteſſo di *ſtelle cadenti* porge occaſione, e ſoſtegno.

ARTICOLO I.

Pregiudizio comune sulla distanza, e sul luogo della caduta di dette stelle.

Non il volgo soltanto, ma i più gravi Fisici affermano, che tali meteore cadono realmente in terra, ed ivi depongono bituminosi avanzi della oleosa, e sulfurea loro natura; i quali avanzi pur s' ingegnano di rintracciare, e raccogliere per conservarli fra i rari monumenti delle naturali produzioni degni di star a fianco delle supposte *pietre del fulmine*. Si vedano tali autori presso *Musschembroek* (*Introduct. ad Phys.* §. 2505.) ove conchiude: *dubitandum non est, quin hujusmodi stellæ in terram cadant, cum & ipse viderim*. Alla testimonianza di sì illustre Fisico mi spiace di doverne aggiungere altra più recente d' un osservatore molto benemerito della meteorologica storia, la quale testimonianza benchè non sia tanto decisa sulla caduta di queste stelle, ci fa nondimeno intendere, che si scagliano fino a certa non grande distanza da terra. *La stella cadente* (Lettera sulle stelle cadenti negli opuscoli scelti di Milano in 8.° Vol. 21. pag. 88.) *a certa non grande distanza dal luogo, ove sedevamo (perciocchè mi sovvengo, che io la vidi a farsi vie più grande, ed a scagliarsi con alcuna obliquità verso di noi) scomparve. Ma nello stesso indiscernibile istante ne vedemmo e il viso, e le mani, e le vestimenta nostre, e il terreno, ed alcuni oggetti vicini illuminati da un subitano, ampiissimo, innocente lampo, a cui non succedette nessunissimo rumore. Stavamo per anco amendue sospesi per questo strano caso, quando uscì dal non lontano giardino un servo, che ne addimandò, se avevamo veduto nulla; che egli aveva veduto una rapida luce a splendere sul terreno del giardino, e massimamente su i rigagnoli d' acqua, che egli stava dirigendo per innaffiarlo.*

ARTICOLO II.

Riflessioni generali contro l' antecedente pregiudizio.

Per quanto io mi ſtudii di comprendere queſto caſo non altro ſo trovar in eſſo di ſtrano, che il modo di narrarlo. Nel rimanente, toſtochè ſpogliato ſia dello ſtile di ſorpreſa, e d'entuſiaſmo, ſi riſolve affatto in una ſtella cadente delle più luminoſe, che non ſono poi tanto inuſitate, nè ſtrane: *nulla ſine hujuſmodi ſpectaculis nox eſt* direbbe *Seneca*. E che altro fu manifeſtamente quel ſubitano ampiiſſimo innocente lampo, ſe non l' illuminazione, che la ſtella, come accade pur ſempre, fece tanto più viva, quanto più ſi accoſtò ſecondo la direzione ſua al ſuo termine, che s' incontrò verſo gli oſſervatori? E certamente in quell'indiſcernibile iſtante, in cui gli oſſervatori torſero gli occhi dalla ſtella, e li fiſſarono l'un contro l'altro per avviſarſi di quell'accidente, in vece di veder la luce direttamente nella ſtella, come ſenza fallo diſtinta fino al fine l' avrebbero continuando a mirarla, piuttoſto la videro rifleſſa ſul viſo, ſulle mani ecc., come il ſervo, che non guardava ſe non abbaſſo irrigando il giardino, la vide ſul terreno, e maſſimamente ſu i rigagnoli d'acqua più atti a rifletterla.

Quindi è, che ſenza punto ſcemare del riſpetto, che io debbo alla Memoria dell'abile oſſervatore, mi ſarà permeſſo di ſcoſtarmi dal ſuo giudizio ſul propoſito della diſtanza, che egli crede non grande dal luogo, ove egli ſedeva. Se quel lucido globo, che ne' precedenti Capi ho deſcritto, benchè veduto da tanti oſſervatori, e in direzioni tanto più proprie per dar qualche idea della ſua diſtanza, ſi giudicò comunemente troppo vicino, benchè foſſe lontaniſſimo; come potrem fidarci d' un giudizio di vicinanza fatto ſopra un corpo lucido non viſto, che nella ſola direzione verſo la viſuale dello ſpettatore ſopraffatto? eſſendo queſta direzione la più propria per fare illuſione anche nelle più tranquille, e rifleſſe circoſtanze, non che ad uno, che ſe la richiama in mente collo ſtile del più ſervido entuſiaſmo.

ARTICOLO III.

Digreſſione ſulla natura delle ſtelle cadenti.

Renderò di buon grado giuſtizia all' elevato ingegno dell' oſſervatore, che nella ſteſſa Lettera immaginò, e compreſe in una eſteſa propoſizione i caratteri, che pur dovrebbero avere le ſtelle cadenti in conformità della natura, e del modo di azione, che egli concepiſce nel ſuo elettrico fluido, quando eſſe foſſero ſingolari modificazioni della elettricità di rugiada, come precedentemente le aveva credute effetti della elettricità di ciel ſereno.

Eſt aliquid prodire tenus, ſi non datur ultra. Ma per non ritardare i progreſſi della Scienza con gratuite ſuppoſizioni, e con vana perſuaſione di teorie perfette, ove per la parte dell' oſſervazione, e della verità neppur ſono incominciate, ſtimo neceſſario di avvertire, che a tre in ſomma ſi riducono i fondamenti di quella propoſizione. 1. Un ſoſpetto di lampo intorno al cervo volante, che ha qualche ombra di ſimilitudine colle ſtelle cadenti; del quale lampo però non ha potuto eſplorare l' elettrica indole, perchè per mala ſorte la cordicella del cervo non era ancor iſolata. 2. Una veriſſima ſtella cadente, che ſi fa finire in lampo, perchè ha illuminato il viſo, le mani, le veſtimenta, il terreno, ed alcuni oggetti vicini, e maſſimamente i rigagnoli d' acqua nel non lontano giardino. E qui quanto ſembra immaginario il lampo, altrettanto è certo, che non ſi oſſervò punto, nè ſi fa pur cenno della ſuppoſta elettrica natura della ſtella cadente. 3. Infine il Signor Priore *Cecca* nelle ſue oſſervazioni di Superga ha notato alcuni ſubitani, e poco durevoli inſorgimenti di ſuono di campanello, che ſoſpettava provvenire da ſtelle cadenti ſmarriteſi nel filo eſploratore: ma non ſi è mai avvenuto di oſſervare la corriſpondenza delle ſtelle medeſime. Il che in breve non altro indica, che un ſoſpetto contro l' evidenza del fatto.

I fondamenti adunque, che aver dovrebbe in natura quella ipoteſi per la ſola particella, che riguarda in genere l' elettrica indole delle *ſtelle cadenti*, in altro non con-

ſiſtono, che in tre coſe, le quali poſſono col proceſſo de' ſecoli avverarſi, come io pur lo deſidero, ma finora non ſono che immaginate, ed attendono conſeguentemente il felice incontro di qualche diretta oſſervazione. Per congettura anche Seneca dice: *Denique, ut breviter dicam, eadem ratione fiunt iſta, qua fulmina, ſed vi minore* (Nat. quæſt. lib. I. cap. I.).

ARTICOLO IV.

Oſſervazioni dirette, e particolari contro quel comune pregiudizio.

E tanto baſti intorno alla natura di codeſte meteore, della quale ſiamo ancor troppo lontani di poterne proporre plauſibili congetture, non che aſſolute definizioni. Ripigliandone la ſtoria, che prima d'ogni altra dobbiamo coltivare, e promovere, io credo di poter infine indicare alcuno de' modi, che hanno indotto in errore *Muſſchembroek*, e altri Fiſici dal medeſimo citati in conferma della ſuppoſta caduta di eſſe perſino a terra. Comincierò a riferire alcuna delle più ſingolari oſſervazioni, che nel mio giornale ho regiſtrate.

Nel 1774. *il* 9. *Agoſto dopo un' ora e mezzo di notte con leggieriſſimo vento di mezzodì, a cielo ſereno con una ſola nuvola lunga, e baſſa verſo greco, ove ſi vedevano frequenti lampi, detti volgarmente* lampi di caldo, *in Rocca Grimaldi ſulla collina fuori di porta S. Sebaſtiano, ho oſſervato in una mezz' ora circa più di dodici ſtelle cadenti. Altre piccole, e rotonde cadevano in arco di ſu in giù; altre ſcendevano in una retta apparentemente poco inclinata all' orizzonte.*

Cinque però furono più grandi, e aſſai luminoſe, e riſchiararono ben notabilmente gli oggetti intorno a me; e corſero in linea retta ſecondo diverſe direzioni, ſempre però con apparente, benchè tenue pendenza dall' alto al baſſo. Non avevano queſte forma di globo, che ſul principio, ma toſto ſi ſtendevano laſciando indietro una forma di coda, o ſtriſcia lunga, e continua, ſoltanto meno fulgida, che non la parte, che precedeva; la quale coda non era ſemplice illuſione ottica, ma imprimeva

primeva un vestigio permanente per qualche istante simile alla coda di cometa, o alla luce fosforica.

Intorno alla parte anteriore, e a fianco del corpo di queste stelle si separavano talvolta alcune favillette, che a piccola distanza restavano spente.

Quelle code fra uno in due minuti secondi dopo la scomparsa della stella si andavano estinguendo, non già dal loro principio verso il termine, ma di pari dalle loro estremità, e contorni verso il mezzo, talchè si stringevano, ed accorciavano nello stesso tempo da ogni parte, e non lasciavano in fine che un barlume di luce, che più non distinguevasi dai raggi confusi del cielo stellato.

Per quanta diligenza io abbia posto nel reciproco loro confronto, non mi fu possibile di riconoscere veruna corrispondenza nè di tempo, nè di moto fra alcuna di queste stelle cadenti e quella successione di lampi lontani, che da principio notai. Come questi erano già in moto fin dal principio di sera, così li vidi proseguire nel loro stile anche per qualche tempo dopo che già finito era il giuoco delle stelle cadenti.

Tutte queste stelle comparvero dai contorni della stella polare fino alla parte più alta della via lattea, tutte per l'interna loro traccia altissime dai termini dell' orizzonte. Era luna nuova.

Della distanza loro da terra eccone la prova evidente. *Tanto quelle che si abbassarono obbliquamente in linea retta, come le altre, che discesero in arco, segnarono una via lunghissima; la quale ciò non ostante fu compresa in pochi gradi della sfera celeste, e terminò per lo meno sopra i trenta, e fino sopra i quaranta, e cinquanta gradi alta dall' orizzonte.* Il che non ha luogo se non nei corpi, che si muovono molto alti, e distanti dallo spettatore, poichè quanto più sono vicini, in tratto brevissimo scorrono per molti gradi, e presto si accostano, anzi s'immergono fin sotto i limiti dell'aperto orizzonte. Aggiungasi, che nell' aria a noi vicina, e tanto densa non potrebbero sì rapidamente, come le vediamo, trascorrere quelle fiamme senza farci sentire qualche fremito, e cigolamento.

ARTICOLO V.

Dichiarazione distinta del medesimo pregiudizio.

E sul proposito della caduta di queste stelle io trovo in fine la seguente annotazione: *Benchè non meno io, che altri, i quali meco si trovarono, abbiamo veduto manifestamente tutte queste cadenti stelle terminare il loro corso, e sparire alte sopra di noi, e ben discoste da ogni limite dell' orizzonte; alcuni tuttavia, che in quel tempo s' incontrarono più bassi ne' vicini valloni ingombrati da alberi, furono persuasissimi di averne veduto chi l' una chi l' altra a cadere fino a terra vicino a noi.*

Nel che si presenta evidente la prevenzione di vicinanza di que' lucidi fenomeni, e l' illusione del relativo innalzamento de' limiti dell' orizzonte proveniente dagli alberi, e dalla medesima collina, che circoscrissero la visione della traccia di que' fuochi prima che arrivassero al termine della loro estinzione. Sembra che volessero confondere la visione della traccia lucida colla traccia stessa, e col corpo della stella.

Quando ci troviamo in mezzo alle fabbriche in una piazza, o in un cortile, ciascuno capisce, e prevede facilmente somiglianti illusioni: ma nell' aperta campagna ognuno si crede padrone dell' orizzonte, e cade perciò in abbaglio con maggior fiducia. Un albero, una siepe, un boschetto, che s' incontri a noi vicino, e a seconda della direzione della stella cadente, è sufficientissimo per indurci in errore. In fatti si crede essa d' ordinario caduta o sopra un vicino colle, o sopra una pianta, o sopra un boschetto: e se ne adduce in prova di averne veduto questi oggetti illuminati, come se investiti fossero dalla lucida materia sparsa, e divisa per essi; e si confonde così l' illuminazione, colla infiammazione, e collo splendore del corpo stesso, e colla sostanza della stella, che pur deve riconoscersi tanto distinta, e diversa dalla sua luce, quanto l' illuminazione, che similmente imprime la luna piena sui corpi terrestri, è diversa, e distinta dalla sostanza, e natura della stessa luna. Ed osservò molto a proposito *Morton* presso *Musschembroek*, che ap-

punto mentre in que' boſchetti, e in quelle ſiepi cercano i bituminoſi avanzi della ſtella, che ivi ſuppongono caduta, prendono in cambio per tali dei vecchj eſcrementi di alcuni uccelli, che fra i più ſolti rami di quelle piante ſogliono pernottare.

Queſte ſtelle ſi direbbero eſſe pure, come quel lucido globo, tramontare di qua dai monti, ſe aveſſero del pari la direzione verſo ponente, e ſegnaſſero all' occhio una traccia lunga al pari di quello; ma come la direzione loro ſi manifeſta per ogni verſo, e ſono di più corta via, e durata, così vogliono dirſi ſcomparire, ed eſtinguerſi in aria alta, e libera dentro dei limiti dell' orizzonte.

Non definirò io altrimenti, che ſimili ſtelle nel loro termine mai non poſſano accoſtarſi a terra; nè fino a quanto ſieno eſſe elevate, e diſtanti dalla terreſtre ſuperficie; nè come debbano pur diſtinguerſi da altre fogge di fuochi fatui, che ſogliono anzi per uſo, e natura loro volteggiare, e ſaltellare preſſo terra intorno ai corpi, che ſorgono, o ſi muovono ſulla faccia del ſuolo. Quando avremo in Meteorologia introdotto l'uſo delle oſſervazioni contemporanee, e di confronto ad imitazione delle aſtronomiche, comincieremo allora a poter trattare di tali queſtioni con qualche fondamento. Non temerò frattanto di far aggravio ai più ſaggi oſſervatori affermando, che pur troppo la meteorologica ſtoria, e maſſimamente per quella parte, che le ignee, e luminoſe meteore comprende, ſi riconoſce ad ogni tratto confuſa, e fuor di modo ingombrata da vecchj avanzi di falſe tradizioni, e da capriccioſi, e poetici caratteri, figli piuttoſto della prevenzione, e della ſorpreſa, che di tranquilla, e ſagace oſſervazione.

CAPO V.

Osservazioni, e nuova teoria de' lampi estivi creduti fatui, e detti volgarmente lampi di caldo.

NElla confusione de' nomi, che gli antichi Fisici usarono per distinguere le varie sembianze delle meteore lucide, non sarebbe facile, nè utile impresa di trattenersi a verificare precisamente il nome di questi lampi estivi, che da noi si chiamano comunemente *lampi di caldo*, e si credono d'origine dalla fulminea diversa, e perciò di fatua natura. *Satius erit de re ipsa quærere, quam mirari quid ita Aristoteles globum ignis appellaverit Capram* (Senec. *quæst. natur. Lib. I. cap. I.*). Non posso io riconoscere siffatti lampi di particolare natura, e del genere dei fatui, ma più veramente li dimostro prospettive a rovescio di lontanissimi temporali.

ARTICOLO I.

Si dimostrano i lampi di caldo *effetti di lampi temporaleschi, e fulminei.*

Un temporale, quando è lontanissimo, non ci fa altrimenti sentire lo scoppio, e il rimbombo de' fulmini. In oltre a grande distanza per la sferica curvità della terrestre superficie, o per l' ostacolo de' monti frapposti non cade più in verun modo la visuale dell' orizzonte di chi lo guarda entro il corpo de' nuvoli, ond'è composto; e perciò non sono questi visibili in alcun punto di prospettiva, nè per verun lato di fianco; ma soltanto presentano sopra i limiti dell' orizzonte la più alta, e rara sommità del temporale, e porgono l' insolita veduta di quel solo altissimo termine; onde non si discerne quel temporale se non veramente, e con proprietà di nome al rovescio.

In tanta altezza, e rarità d' aria, e di nubi non giungono le strette, e scintillanti strișcie del fulmineo torrente; e perciò sono queste del pari invisibili per noi, come ne è insensibile lo strepito. Sorgono però a quell' altezza ampj vo-

lumi di rariſſimi vapori, nei quali o ſi riflette, e ſi manda perſino a noi diffuſa, e indebolita la luce del folgore ſcintillante, ovvero ſi ſpande, e ſi dilata in que' vapori qualche ſoffio, e ſprizzo della materia ſteſſa fulminea, che per eſſi riſplende con luce tanto men viva, quanto meno è riſtretta, e compreſſa dall' aria intorno. Or tale appunto è la ſembianza di que' lampi, che nelle ſerene notti eſtive ſprizzano e quaſi rimbalzano da lungi or baſſi, or alquanto più alti sui limiti dell' orizzonte.

E quella varia, e rapida ſucceſſione, che ſi oſſerva in ciaſcun atto de' medeſimi, talchè ſplendono eſſi come a ſalti, e con rapida interpolazione di gradi or più vivi, or più eſteſi, che altro è ſe non effetto della più eſatta corriſpondenza a ciaſcun colpo di fulmine, che nel lungo tortuoſo ſuo ſentiero riflette o ſprizza per quelle alte nubi maggiore, o minor porzione della ſua luce ſecondo la varia ſua poſizione?

E la coſtanza di luogo, onde que' lampi vi compariſcono per lungo periodo verſo la ſteſſa parte del cielo; e la ſteſſa lunghezza di tempo nella ſucceſſione di più, e più ore in que' ſalti, e giuochi di luce; e gl' intervalli che paſſano fra l' uno e l' altro di que' lucidi fenomeni, non corriſpondono appuntino e alla ſede propria di ciaſcun temporale, e al tempo, in cui ſuole il temporale proſeguire, e compiere i ſuoi periodi, e infine agl' intervalli, onde l' uno all' altro ſi ſuccedono i colpi del fulmine?

Sì adequato riſcontro de' più minuti accidenti di queſti *lampi di caldo* colla fulminea, e temporaleſca poſitura a roveſcio, alla quale propoſto mi ſono di riferirli, ſarebbe per ſe ſolo ſufficientiſſimo a renderne più che probabile la nuova teoria: tanto più, che nella ordinaria prevenzione di riputarli fuochi di fatua origine non ſi ſaprebbe addurne verun fondamento di oſſervazione, non che aſſegnarne una cauſa, che corriſponda per lo meno al compleſſo de' più eſſenziali caratteri; ſe ſi eccettui il generico carattere di eſpanſione, e tenuità di luce, la quale però ben meglio deriva, e s' intende per l' elevazione, e rarità di quella temporaleſca ſezione, per cui ſono eſſi ſoltanto a noi viſibili.

Ma non è mio coſtume di riposarmi ſulle teorie per la precaria ragione, che adequano eſſe la ſpiegazione de' feno-

meni, e molto meno per la ragion negativa d' insufficienza di altre cause, che sogliono, e possono a tal fine immaginarsi. Alla osservazione mi rivolgo, e da questa riscontri, e lumi ripeto per assicurarmi d' ogni teorico principio; che perciò non nacque la precedente dichiarazione de' fenomeni di questi lampi da veruna anticipazione di principio, ma derivò per se stessa dalle replicate, ed esatte osservazioni, che da molti anni ho raccolto sulla particolare natura, e sull' andamento di que' lampi di caldo, delle quali osservazioni in brevi parole ne ristringerò qui i capi principali.

1. Non compariscono lampi di caldo, se non nelle stagioni, nelle ore, e ne' luoghi medesimi, ove dominano i temporali.

2. Osservando con attenzione, e trasportandomi ad opportuna altezza ho sempre riconosciuto, che siffatti lampi hanno per base un volume di nuvoli, che mostrano tutte le sembianze di procellosi.

3. In alcune diramazioni, e in certo prospetto di qualche porzione di temporali manifesti, ne' quali mi trovai io stesso involto, osservai più volte certe maniere di lampi a que' lampi stessi di caldo somigliantissimi.

4. E più d' una volta, quando il lontano temporale, da cui procedevan que' lampi, s' incontrò di fronte, e proseguì il suo corso alla mia volta, vidi tal sorta di lampi ad appressarsi, e crescere in proporzione, che il temporale vie più si stendeva verso di me; e mi si manifestarono in fine per veri lampi fulminei, e tonanti. Il che compie, quanto più nelle cose Fisiche può bramarsi, la perfetta evidenza della proposta teoria.

ARTICOLO II.

Conſeguenze della nuova teoria.

Nè queſta teoria ſi riſtringe, e finiſce in ſe ſteſſa nella più giuſta cognizione della natura di que' lampi; che anzi ci guida ad altre importanti cognizioni. Quante fiate, e con quale intereſſamento, e neceſſità non ſi domanda da' Fiſici la preciſa altezza, a cui ſorgono le nubi temporaleſche, e fulminee? Per ſoddisfare a sì importante richieſta non abbiamo finqui, che poche, e imperfette cognizioni, e mezzi inſufficienti. Con molte oſſervazioni di que' lampi, che ci moſtrano quella più alta regione, a cui non ſorgono giammai le ſtriſcie fulminee, fiſſeremo il confine certo, e ſicuro delle nubi procelloſe. Una ſola coſa ci manca per ritrarre da queſta teoria sì importanti vantaggi, ed è il concerto, e la coſpirazione di molti oſſervatori, i quali nel tempo ſteſſo tengano eſatto conto degli accidenti, che intorno a loro occorrono.

Se io aveſſi avuta la fortuna di ſimili confronti, ſarebbe l' altezza delle fulminee nubi già miſurata, e definita con quelle ſteſſe oſſervazioni, delle quali accennai i riſultati in fine del precedente articolo. Ora rimangono queſte, come tante altre, per queſta parte ſterili, e mute, non per altro, ſe non per difetto di riſcontri delle diſtanze corriſpondenti del centro di que' temporali, e maſſimamente della ſucceſſiva progreſſione di quelli, che tanto ſi accoſtarono a me da involgermi in alcuna delle loro diramazioni. Non mi reſterebbe, che prendere le diſtanze cognite, come baſi, o archi della terreſtre ſuperficie, e ſtendere fino a que' ſicuri confini la tangente, o la viſuale del mio orizzonte per calcolarne preciſamente l' altezza. Sarà queſta più tranquilla, e ſicura via di arrivar a conoſcere l' altezza de' temporali, che non d' inoltrarſi per entro, o ſopra i medeſimi coll' *areoſtato*, di cui in queſti ultimi anni tante maraviglie ſi fecero, e ſi preſagirono.

Non mi eſtenderò più oltre a dichiarare l' importanza di queſte cognizioni, e altre utilità, che da quella teoria pro-

cedono. Mi basta di aver qui, come in fine del capo precedente, anticipato un esempio della imperfezione e miseria dei comuni metodi delle meteorologiche osservazioni, dei quali ragiono alquanto diffusamente in una Meteorologica Digressione di recente stampata nel Tomo secondo delle mie Opere Fisiche.

DELLE

DELLE STAZIONI
DE' PIANETI.

Del Sig. ANTONIO CAGNOLI.

DEl problema, col qual si cerca *quando un pianeta parrà stazionario*, non è stata per anco data, ch' io sappia, una soluzione completa. Le sue difficoltà persuasero i Geometri a contentarsi d' approssimazioni anche alquanto rimote. Così *Keill* e il Sig. *du Sejour* lo ridussero facile, supponendo circolari le orbite del pianeta e della terra: *Halley* avea già fatto un passo di più, restringendosi a trattar come circolare l'orbita terrestre solamente: *Keplero* non potea giunger che a soluzioni molto imperfette, mancandogli allora il modo di esprimere la ragione fra i moti ellittici e i raggi vettori: finalmente *F. C. Mayer* fu il solo che abbia intrapreso (Mem. di Peterburgo, Tom. II., pag. 82, e Tom. V. pag. 57) di risolver direttamente ed esattamente il problema con una equazione algebraica, *licet id non nemini impossibile visum fuerit*, come egli dice. Ma le due soluzioni di quest' ultimo Autore, benchè citate da molti, pur sono gravemente fallaci; a cagione ch' ei vi ha introdotto le variazioni de' seni dell' elongazione e della parallasse annua, come proporzionali ai lati opposti a questi angoli: nella qual parte del suo lavoro egli cade, senza avvedersene, nell' ipotesi delle orbite circolari. Avanti di conoscer le di lui soluzioni, avevo fatto il medesimo tentativo per vie affatto diverse, ed avevo ottenuto l' intento, in quel modo che son per esporre nella presente Memoria.

Sia S la commutazione, T l' elongazione, R la distanza dal sole alla terra, r quella dal sole al luogo del pianeta nell' eclittica. Nel triangolo formato da queste due distanze e da quella che separa la terra dal detto luogo del pianeta, si ha l' equazione seguente, che è facile da verificarsi, e che

ho dimostrata (Trigonometria, art. 229): tang. $T = \frac{r \text{ sen. } S}{R - r \text{ cos. } S}$.

Dunque cot. $T = \frac{R}{r \text{ sen. } S} - \text{cot. } S$; e prendendo i differenziali,

$$(A) \ldots - \frac{dT}{sen.^2 T} = \frac{r \text{ sen. } S dR - R \text{ sen. } S dr - rR \text{ cos. } S dS}{r^2 \, sen.^2 S} + \frac{dS}{sen.^2 S}.$$

Se si nomina V' la longitudine vera del sole, g la longitudine geocentrica del pianeta, u' l' eliocentrica ridotta all' eclittica, è noto che $T = g - V'$, e $S = 180° - (u' - V')$, considerando il pianeta nel primo quarto della elongazione, dopo il di lui passaggio per la congiunzion superiore; quella essendo la situazione ove deesi cercare la soluzion generale de' problemi dei tre corpi. Nel momento della stazione si ha $dg = 0$; per il che le equazioni precedenti danno $dT = -dV'$, e $dS = dV' - du'$. Posti questi valori nell' equazione (A), e fatte le riduzioni convenevoli, nasce la seguente:

$$(B) \ldots \frac{R}{r} dr - dR = \frac{(R \text{ cos. } S - r)(du' - dV')}{\text{sen. } S} - \frac{r \text{ sen. } S dV'}{sen.^2 T}.$$

Ma $sen.^2 T = \frac{r^2 \, sen.^2 S}{R^2 + r^2 - 2rR \text{ cos. } S}$, (Trigon. Tavola III, formola 32ª). Fatta questa sostituzione, facilmente si converte l' equazione (B) in quella che segue:

$$(C) \ldots (dV' + du') \text{ cos. } S + \left(\frac{dR}{R} - \frac{dr}{r}\right) \text{sen. } S = \frac{r}{R} du' + \frac{R}{r} dV'.$$

Chiamo V l' anomalia vera del sole, u quella del pianeta, M il moto medio del sole in un istante di tempo, m quello del pianeta nel medesimo istante, B il semiasse minore dell' orbita terrestre, a il semiasse maggiore, b il semiasse minore dell' orbita del pianeta; e suppongo eguale all' unità la distanza media dal sole alla terra. E' noto agli Astronomi per la teoria del moto ellittico de' pianeti, che $dV = \frac{MB}{RR}$, e $du = \frac{mab}{r'r'}$, detto r' il raggio vettore del pianeta. Di più ho mostrato (775) che per ridurre all' eclittica il moto du,

basta moltiplicarlo per $\frac{\text{cos.}\, I}{\text{cos.}^2 L}$, denotando per I l' inclinazione dell' orbita del pianeta, e per L la sua latitudine eliocentrica; il che fatto, si ha poi $r'r' \text{cos.}^2 L = rr$. Pongo questi valori di dV, e di du, in vece di dV' e di du', nell'equazione (C), perchè le variazioni infinitamente piccole dell' anomalia possono senza errore farsi uguali a quelle della longitudine. Ma valori analoghi si hanno di dR e di dr, giacchè (Trigon. 767, 776), $dR = -\frac{ME \,\text{sen.}\, V}{B}$, e

$$dr = -\frac{mae \,\text{sen.}\, u \,\text{cos.}\, L}{b} - \frac{mab \,\text{sen}^2 L \,\text{cot. arg. lat.}}{r},$$ chiamando

E l' eccentricità del sole, e quella del pianeta. Con queste sostituzioni, e negletto il secondo termine del valor di dr, del qual termine rare volte si avrà bisogno, quand' anche si voglia gran precisione, l' equazione (C), moltiplicata per $\frac{rR}{M}$, diviene

$$(D)\ldots\left(B\frac{r}{R} + \frac{mab \,\text{cos.}\, I}{M} \times \frac{R}{r}\right)\text{cos.}\, S$$
$$+\left(\frac{mae}{Mb} R \,\text{sen.}\, u \,\text{cos.}\, L - \frac{E}{B} r \,\text{sen.}\, V\right)\text{sen.}\, S = B + \frac{mab \,\text{cos.}\, I}{M}.$$

Or si rifletta che i moti simultanei m, M sono in ragione inversa de' tempi delle respettive rivoluzioni, giacchè in tempo eguale il moto angolare medio convien che sia tanto più grande, quanto è più breve la durata della rivoluzione. Nomino P la rivoluzione periodica della terra, p quella del pianeta, ed ho $M : m :: p : P$. Dunque $M^2 : m^2 :: p^2 : P^2 :: a^3 : 1$, secondo la legge di *Keplero*; e le due ragioni estreme producono $\frac{ma}{M} = \frac{1}{\sqrt{a}}$. Si sostituisca questo valore nella formola (D), e si avrà

$$(E)\ldots\left(B\frac{r}{R} + \frac{b \,\text{cos.}\, I}{\sqrt{a}} \times \frac{R}{r}\right)\text{cos.}\, S$$
$$+\left(\frac{e}{b\sqrt{a}} R \,\text{sen.}\, u \,\text{cos.}\, L - \frac{E}{B} r \,\text{sen.}\, V\right)\text{sen.}\, S = B + \frac{b \,\text{cos.}\, I}{\sqrt{a}}.$$

Questa è l' equazione, la qual risolve il problema completamente, nè è molto faticosa pel calcolo numerico, attese le quantità costanti, il computo delle quali, fatto una volta, serve perpetuamente.

L' equazione, a cui siam pervenuti, contiene la relazione che deve aver luogo fra la commutazione e le anomalie medie del sole e del pianeta, nell' atto della stazione: e questa relazione è determinata con ogni esattezza, sì perchè ho tenuto conto di tutte le ineguaglianze de' moti ellittici, sì perchè m'è riuscito di convertir l' equazione (A) contenente quattro differenziali diversi, nell' equazione (E) che racchiude soltanto quantità finite.

In varie maniere si può risolvere l' equazione (E). Abbiamo posto $S = 180^\circ - (u' - V')$. Se s'intende per A l'apogeo del sole, per α l'afelio del pianeta, sarà $S = 180^\circ + A - \alpha + V - u$. Col mezzo di questa equazione si può dunque eliminar dalla (E) la commutazione. Di più è noto che $R = \frac{BB}{1 - E \text{ cos. } V}$, $r = \frac{bb \text{ cos. } I}{a - e \text{ cos. } u}$, (veggasi l' art. 3279 della seconda edizione dell' Astronomia del Sig. *de la Lande*). Si possono dunque scacciare anche i raggi vettori, e si avrà in una equazione algebraica la relazione immediata fra l' anomalia vera del sole e quella del pianeta, nel momento della stazione assoluta. O vero cavando dalle ultime equazioni i valori di cos. V, cos. u, e da questi quelli di sen. V, sen. u, si potranno eliminare le anomalie, e si avrà in una equazione algebraica la relazione immediata fra i raggi vettori nell' eclittica, al momento della stazione. A questo ultimo scopo è diretta la seconda Memoria di *Mayer*; ma le sue equazioni finali non possono esser giuste, perchè costrutte sul fondamento dell' equazione finale della sua prima Memoria, della quale equazione accennai di sopra il difetto, e lo proverò quantoprima con un esempio, abbenchè di questa prova non avrà bisogno chiunque voglia comparar l' equazione medesima con la mia (E).

I due modi, che ho additati per risolvere l'equazione (E), la condurrebbero a gradi elevati e difficili. Or mi basta d' averli accennati, onde far vedere con ogni chiarezza, che essa contiene la soluzione completa del problema, poichè de-

termina, a tutto rigore, quale esser debba, per ogni anomalia del pianeta o del sole, l' anomalia del sole o del pianeta, affinchè questo sembri stazionario. Una tale proposizione non par differente da quelle di *Keplero* e di *Halley*, ma se essi od altri vi abbiano ancora pienamente soddisfatto, giudicheranno i Geometri. Egli è poi chiaro che la stazione dipende dalla combinazione appropriata delle due anomalie: per il che una equazione, la qual somministri e contenga quella siffatta combinazione, adempie a quanto può esigersi nel presente problema.

La via più spedita per calcolare la formola (E) è senza dubbio quella di falsa posizione; assumendo le anomalie del pianeta e del sole, e deducendone la commutazione col mezzo dell' equazione $S = 180° + A - \alpha + V - u$. Come il tempo della stazione è sempre noto a un di presso, così gli errori delle false posizioni saranno tenui, e due basteranno ordinariamente per determinare non solo il dì, ma l' ora e il minuto, se si volesse, della stazione assoluta; alla qual precisione non sarebbe possibile di giungere per alcun altro metodo conosciuto fin qui.

In questa maniera ho trovato (servendomi delle Tavole del Sig. *de la Lande*, e trascurando l' aberrazione del sole) che Marte fu stazionario il dì 20 Ottobre 1785 a $0^{ore}\ 32'\frac{1}{2}$ di tempo medio. Della esattezza di questa determinazione si può avere un argomento dalle seguenti longitudini geocentriche computate sulle medesime Tavole

19 Ottobre 1785 a 12^{ore}	......	2^{s}	$15°$	$23'$	$30''$
20 .... $0^{ore}\ 32'\frac{1}{2}$	...	2	15	23	37
12^{ore}	......	2	15	23	32

Avendo calcolato, per l' accennato momento della stazione di Marte, la formola di *Mayer*, mi ha dato la commutazione di $15°\ 12'\ 23''$, o vero di $344°\ 47'\ 37''$, in vece di $342°\ 13'\ 41''$ che danno le Tavole per quel punto. L' errore della formola di *Mayer* è dunque in questo caso di $2°\ 34'$. il che dà la stazione sei giorni circa più tardi del vero: error più grande di molto di quel che darebbe la soluzione intiera del problema sopra l' ipotesi delle orbite circolari. In fatti su questa ipotesi si ha $B = 1 = R$, $b = a = r$, $e = 0$, $E = 0$; e la formola (E) si riduce alla seguente:

$$(F) \ldots \text{cof.}\, S = \frac{\text{cof.}\, I \sqrt{a} + 1}{a + \frac{\text{cof.}\, I}{\sqrt{a}}};$$

la qual dà 16° 46′ 36″, o vero 343° 13′ 24″, per la commutazione coſtante di Marte ſtazionario.

Ma come queſta commutazione può variare a un di preſſo da 10° a 23°, così la formola (F) (e per conſeguenza ogni ſoluzion del problema ſopra l' ipoteſi delle orbite circolari) non ſaprebbe eſſere di alcun uſo, potendo dare un errore perſin di quattordici giorni ſulla ſtazione. Al più ſi potrebbe ricorrere a detta ſormola, quando non ſi aveſſe veruna idea del tempo della ſtazione, onde aſſumere dati non remotiſſimi nel calcolo dell' equazione (E).

A gravi errori va pur ſoggetta la formola di *Keill*, che ſi trova nelle Iſtituzioni Aſtronomiche del Sig. *Le Monnier*, e della quale ho dato la dimoſtrazione (Trigon. 766). Queſta formola dà l' elongazione pel tempo della ſtazione, ed è in errore di 4° 6′ nell' eſempio precedente. Per aver un' approſſimazione maggiore, ho ſuggerito d' impiegare nel calcolo di detta ſormola i raggi vettori attuali, in vece delle diſtanze medie, il quale eſpediente mi è ben riuſcito moltiſſime volte; ma non è così in queſto eſempio, dove l' errore viene anzi a creſcere di qualche minuto. Queſta ſcoperta mi ha ſtimolato a indagare una ſoluzione completa del problema, e capace di ogni eſattezza, qual mi ſembra eſſere la preſente.

Siccome la diſtanza dell' afelio della terra da quello de' pianeti varia molto lentamente, così preſa una epoca, ſi potrebbe coſtruir facilmente, col mezzo dell' equazione (E), una tavola di ſtazioni d' ogni pianeta, la qual ſervirebbe per molti anni. Queſta tavola avrebbe per argomento l' anomalia media del pianeta o del ſole, e farebbe conoſcere quella corriſpondente del ſole o del pianeta, perchè la ſtazione apparente poteſſe aver luogo.

NUOVE SPERIENZE

INTORNO ALLA DOLCIFICAZIONE DELL' ACQUA DEL MARE.

Del Sig. CAVALIERE LORGNA.

De' cimenti fatti per la dolcificazione dell' acqua marina.

NOn è credibile, che non ſiaſi mai trattato preſſo i Dotti delle età più remote del purificare l' acqua marina, ſe non per biſogno che n' aveſſero, moſſi almeno da filoſofica curioſità. E tanto più, che alla ſalſedine del mare diedero penſiero, e non tutti in un' opinione convennero intorno all' origine di un fenomeno cotanto ſingolare. Se ragione non lo faceſſe preſumere abbaſtanza, *Plinio*, di cui può dirſi non avere oggetto la Storia Naturale noto a' ſuoi tempi, ſu cui non abbia egli proferito qualche coſa, il fa argomentare da queſti inſegnamenti (*a*): *Quia ſæpe navigantes defectu aquæ dulcis laborant, hæc quoque ſubſidia demonſtrabimus. Expanſa circa navim vellera madeſcunt accepto halitu maris, quibus humor dulcis exprimitur. Item demiſſæ reticulis in mare concavæ e cera pilæ, vel vaſa inania obturata, dulcem intra ſe colligunt humorem. Nam in terra, marina aqua argilla percolata dulceſcit*. E chi crederebbe, che nè una lunga ſperienza di tanti ſecoli, nè il lume di tanti ſtudj poſteriori non abbia mai prodotto fino a' dì noſtri metodo più ſicuro del primo indicato da *Plinio*? In fatti dell' acqua perfettamente dolce che cade dal cielo, che ſcorre per la terra, che ſuppliſce a tutti i magiſteri e biſogni de' regni

(*a*) *Hiſt. Nat. Lib. XXXI.*

di natura, fa parte e massima per avventura quella che per isvaporamento spontaneo e tranquillo si solleva dal mare, dall' immensa conserva di acque salse, ond'è involta la terra per ogni parte. E' vero che per la lentezza di questa operazione, trattandosi di acqua marina la cui evaporazione naturale in parità di circostanze sta a quella dell' acqua comune (*a*) come 3 a 7, e per la difficoltà di praticarla in grande, come sarebbe d'uopo, non può trarsi vantaggio dal suggerimento di *Plinio*; ma l'obbietto più che su la cosa cade sull' uso, e sull' utilità che non può conseguirsi prontamente. Di questa pratica fa onorevole e distinta menzione anche il *Verulamio* (*b*). Dell' altre poi rimembrate da *Plinio*, quella delle palle vuote di cera da sommergersi nel mare è pur ricordata da *Aristotele* (*c*), da *Plutarco* (*d*), e da altri; ma ed essa, e le altre insieme, che a feltramento si riducono, non arrivano a un pezzo alla bontà della prima, avvegnachè non è mezzo il feltrare, per quanto sieno angusti e tortuosi i meati del feltro, valevole a spogliare da' suoi sali l' acqua marina, e non altro al più può egli rattenere fuorchè le immondezze, la parte terrosa, o ciò ch'è sospeso meccanicamente, non già disciolto chimicamente, nell' acqua. Questo è tutto il frutto che può ricavarsi da' colamenti in genere, in qualunque guisa sieno procacciati, mentre il dissalare, propriamente detto, l' acqua marina od altra somigliante acqua minerale richiede una vera chimica decomposizione che non può giammai ottenersi per quella via. E questa è l'apparente purificazione che ha per avventura illuso non pochi, ed uomini eziandio chiari e sapientissimi. Lo stesso *Leibnizio*, dopo gli antichi, pare che ne facesse caso proponendo (*e*) di feltrare per la sabbia finissima l' acqua marina, o pel mercurio, o per la calce di saturno, servendosi di macchine prementi o succhianti per sollecitare il colamento.

Così

(*a*) Giorn. Enciclop. di Vicenza Gen. 1786.
(*b*) *In sylva sylvarum*.
(*c*) *Hist. anim. L.* 8.
(*d*) *Quaest. nat.*
(*e*) *Act. Erudit. Lips. anno* 1682.

Così lo ſteſſo *Verulamio*, il *Marſilli* (*a*), il *Deslandes* (*b*), il *Feuillée* (*c*), il *Labat* (*d*), il *Leutmanno* (*e*), ed altri. Non eſſendoſi però acchetati giammai gli uomini di queſto mezzo, la cui inefficacia era dimoſtrata ſul fatto dall' eſperienza, ad altri eſpedienti rivolſero l' animo sì, che non è forſe nazione in Europa, che non abbia meſſo qualche ſtudio in queſta ricerca, fatte più e più ſucceſſivamente lunghe le navigazioni, e creſciuto in conſeguenza più e più il biſogno dell' acqua dolce ſul mare. E indipendentemente anche da queſto, l' eſſer ella sì celebre e tra gli uomini decantatiſſima le ha fatto ſempre aver luogo fra le queſtioni più agitate e difficili della Fiſica. L' umana curioſità ha de' biſogni ſuoi proprj, e per lo più il difficile, l' oſcuro, il diſperato è ſprone alle ſue indagini oltre ogni credere acutiſſimo. Ma lungo ſarebbe il far commemorazione di tutti gli artifizj meſſi in opera per queſt' oggetto, ſenza entrare nelle chimere di tanti ſpacciaſecreti, che in queſto pure come in altri anche più aſtruſi argomenti vollero aver parte, che non avrebbe fine. La putrefazione dell' acqua marina è ſtata più d' una volta tentata, così la chiarificazione col mezzo di ſoſtanze glutinoſe. La precipitazione, e forſe più di ogni altra pratica, è ſtata pure da non pochi chiamata in ſoccorſo; e cent' altri mezzi furono adoperati in diverſi tempi, come può vederſi nelle Tranſazioni Anglicane, negli Atti di Lipſia, nell' Iſtoria dell' Accademia Reale di Parigi, nel Giornale di Trevoux, e in altri giornali e libri eſpoſto diffuſamente. L' eſperienza però, eſcluſi l' un dopo l' altro tutti i metodi propoſti, moſtrò ſempre, che l' evaporazione era a tutti preferibile, ſiccome quella che obbligava neceſſariamente a precipitare al fondo i ſali contenuti nell' acqua marina, tolta loro l' acqua di diſſoluzione. Quindi a proccurarla ſi accinſero gli uomini coll' arte, più ſollecita della natura, vale a dire con

(*a*) Storia del mare.
(*b*) Recueil de diff. Traités de Phiſique.
(*c*) Journ. des Obſerv.
(*d*) In itin. ad Inſ. Amer.
(*e*) Tranſ. Philoſ. n. 156.

la distillazione artificiale. Di molti che vi si occuparono, meritano particolare menzione tra gl' Inglesi *Giovanni a Gadesden* del 1516, *Guglielmo Walcot*, e *Fitz-Gerald*, e in Francia *Gautier* medico di Nantes al principio di questo secolo. Ma par che a tutti abbia rapito la palma il celebratissimo Inglese *Hales* nel suo libro che ha per titolo *Instructions pour les mariniers* &c. Osservando quest' uomo accuratissimo, che nel progresso della distillazione l' acqua riusciva disaggradevole, acre, corrosiva, sospettò che si esaltasse col vapore un certo spirito di sale, e provò poi coll' esperienza che il suo sospetto non era irragionevole. Quindi gli effetti, che quest' acqua distillata produceva funestissimi, ch' egli descrive in questo modo, *elle resserre & retrecit les vaisseaux delicats & les fibres du corps, & par là elle attire les obstructions opiniatres, & souvent incurables, & les tumeurs schirreuses qu' on remarque en ceux qui boivent ces eaux malsaines*. Si avvisò pertanto di far precedere alla distillazione la putrefazione e successiva chiarificazione dell' acqua del mare, onde far entrare in nuova combinazione più fissa, s' era possibile per questa via, quello spirito acido sì dannoso. Ma tutto ciò non impedì che nelle distillazioni ch' ei fece in appresso non se ne sollevasse tuttavia accompagnandosi co' vapori acquosi, e contaminando, specialmente dopo le prime svaporazioni, l' acqua distillata come innanzi. Conchiuse pertanto, ch' era bensì migliorata la condizione delle cose, e ritardata alquanto la sublimazione dell' acido, ma che non poteva con sicurezza usarsi che delle prime porzioni di acqua stillata, abbandonando il restante. In tanta incertezza l' *Appleby* del 1753 tentò di migliorare il metodo di *Hales*; ma ad onta che sia nell' acqua marina disciolta una preparazione di alcali fisso e di calce prima della distillazione, un alito urinoso si manifesta sempre nell' acqua stillata, e dal più al meno se creta, sapone, calce semplice, od altri assorbenti vi vengano infusi, del che può vedersi ampia descrizione ne' Vol. 48, e 50 delle Anglicane Transazioni.

Riflessioni sopra la distillazione dell' acqua marina.

Non può negarsi, come dicemmo qui innanzi, che alla natura non riesca tuttodì di sollevar dal mare in vapori purissima acqua, non viziata sensibilmente da alcuna di quelle sostanze, che l' esperienza dimostra essere nell' acqua del mare contenute.

Perchè dunque le nostre distillazioni, comunque regolate a dolce fuoco, e coll' acqua marina preparata eziandio in tanti modi, non sono mai giunte all' efficacia della tranquilla evaporazione naturale, e a somministrarci, come questa, un' acqua innocente? Come più da vicino imitare la natura in sì fatto magistero? Io credo che fatto un profondo esame così dell' intima condizione dell' acqua marina, come dell' intermezzo che adoperiamo per decomporla, non sia difficile il riconoscere perfettamente, onde avvenga che l' acqua stillata non riesca mai bastevolmente pura. E primamente quanto all' acqua marina è cosa evidente, che mettendo capo nel mare tante acque dalla terra che il racchiude, tante materie depositandovisi da ogni parte, e tanti esseri organici avendo in quell' immensa cratera nascimento, vita, e sepoltura, non è certamente sostanza de' regni di natura dissolubile nell' acqua, o pur anche solamente miscibile coll' acqua, che non possa nel mare rinvenirsi. Ma considerando anche come accidentale una tal condizione complicata dell' acque del mare, siccome quella che non è nè costante in tutti i tratti, nè universalmente propria di tutte l' acque marine, un fondo nativo di principj costitutivi suoi proprj par che debba avere il mare, indipendente dagli accidentali e stranieri, il quale alla condizione di lui originaria e radicale si attenga intimamente. Il fa pensare primamente l' analisi accurata e capitale del fu Sig. *Bergman* istituita sopra l' acqua marina attinta a 60 braccia di profondità nell' Oceano all' altezza dell' Isole Canarie e ben lungi dalle coste (*a*). Due

(*a*) Opusc. Chim. T. I. pag. 194.

ſole nature di ſali dominanti, ch' è coſa notabile, vi trovò diſciolti con un pochino di ſelenite, cioè un ſal marino a baſe di natro, e un ſal marino a baſe di magneſia, e non altro. L' eſſerſi poi trovato (*a*), che il natro e la magneſia fanno parte eſſenziale e nativa degli eſſeri organizzati viventi nel mare, non già accidentale e ſtraniera, come nelle piante marittime, e in altre ſoſtanze di natura, e che un acido marino eſiſte in quegli eſſeri libero, per quanto ſi può giudicare, e in procinto di combinarſi coll' alcali, e con la magneſia dietro alla diſorganizzazione di loro, la cui preſenza è ſtata da me verificata per ſin nelle conchiglie marine da ſecoli ſpoglie de' loro abitatori, non che nelle recentemente tratte dal mare, fa quaſi preſumere, che il fondo di que' principj, che dicemmo, può avere domeſtica ſorgente nel ſeno ſteſſo del mare. Ma altri principj ancora, oltre a' ſali marini, non men di loro proprj e nativi, concorrono a formare l' acqua marina, e a diſtinguerla da tutte le acque minerali della terra. La diſorganizzazione di que' medeſimi viventi, oltre al natro e alla magneſia, contribuiſce pure un fondo di ſaponi animali, direi quaſi originarj, entrando nella compoſizione degli animali anche in iſtato naturale parti oleoſe intimamente unite alle ſaline, e perciò miſcibili coll' acqua, e quaſi alito ſottile inerenti all' acqua marina. Niente di ciò appariſce nelle analiſi, perchè tutto eſala e s' alza co' vapori acquoſi ſotto l' azione del fuoco nell' analizzare l' acqua. Ma non è per queſto men reale la preſenza di sì fatta materia diſciolta per l' acque marine, ſomminiſtrata dalle ſecrezioni, e dal disfacimento infine giornaliero degli animali che vivono e periſcono nel mare, di cui ſarebbe egli carico a ribocco, ſe per una mirabile circolazione, come io penſo, non ſerviſſe ella in gran parte di paſcolo e nutrimento agli eſſeri rinaſcenti. Alle prove addotte per dimoſtrarlo nella Memoria ſopraccitata ne aggiugnerò una qui, che mi pare convincente, e che recentemente ho ripetuto più volte ſull' acqua marina delle Lagune di Venezia. Si faccia a calor naturale ſvaporare una buona quantità di acqua marina,

(*a*) Mem. preced. intorno al natro pag. 39.

lasciando che da sè si diffecchi all'aria il sedimento. Su questo sedimento si versi dello spirito di vino concentratissimo, e il si lavi ben bene finchè nel vaso ciò solamente rimanga, che non può nello spirito disciorsi, e si troverà I.° Che il sedimento perde alquanto del suo peso, il che nell' acqua che ho detto fu, or più or meno, di tre in quattro ventesimi del peso che aveva innanzi. II.° Che quello spirito che se ne carica brucia senza lasciare di sè la menoma traccia sopra un piattello di porcellana. III.° E che finalmente facendola svaporare tranquillamente e naturalmente, ciò che resta è untuoso al tatto, su la lingua ha un che di mucido ed urinoso insieme, e messo su d' una lamina di ferro rovente, tramanda odore empireumatico proprio solamente ed esclusivamente delle sostanze oleose. Fatta pertanto, se vuol farsi, astrazione, come diceva, dagl' ingredienti e depositi stranieri nel mare, sarà sempre permesso di considerare un tal fondo di sali marini, e di materie animali saponose, come proprio dell'acque marine, e della fisica condizione di loro, essendo elle costituite da natura ricettacolo e sede nativa di que' medesimi viventi, che, secondo tutte le apparenze, il possono mantenere, i quali fuor di quel mezzo o non avrebbero vita, o se l'avessero, non sarebbero per avventura quello che natura vuole, che ivi sieno. Ed ecco aperto l'adito onde conoscere chiaramente, se non m' inganno, quali sostanze possano volatilizzarsi nelle distillazioni dell'acqua marina, e bruttare l' acqua stillata necessariamente. Mentre la naturale evaporazione si opera alla sola superficie dell'acqua, intatto il restante, e si fa ella blandamente, l' artificiale all' opposito col fuoco sopposto si fa dal fondo, e tutta è sommossa ed agitata da calore non naturale la massa dell'acqua; e quanto è quella placida e lenta, altrettanto tumultuosa e rapida è questa, altrimenti non se ne otterrebbe l' intento. Ciò fa comprendere, come nella distillazione dell'acqua marina l' intermezzo adopera e sopra i sali, e sopra la materia animale che dicemmo sottilmente diffusa per l' acqua del mare. Il sale marino a base di magnesia cede al calore il suo acido, com' è facile l' accertarsene coll' esperienza. Quindi la presenza perpetua di un acido marino nell' acque marine stillate; quindi il crescere dell' acredine più e più quant' è

più avanzata la distillazione; e quindi tutti i fenomeni osservati dall' *Hales* e prima di lui dal *Marsilli* (*a*), e da altri nello stillare quell' acque. Sanissimo pertanto è stato il consiglio dell' *Appleby* nel cercare di precipitar la terra (*b*) de' sali marini terrosi con un alcali fisso, prima di distillare l'acqua marina. Entrando così l' acido marino in combinazione coll' alcali, non è egli più separabile dalla nuova base tenacissima per solo calore.

Rimosso è perciò il pericolo di quell' acidamento dell'acqua mostrato sì dannoso alla salute dall' *Hales*. Ma pure uno spirito urinoso, siccome abbiamo veduto, esala tuttavia nella distillazione, e contamina l'acqua distillata ne' recipienti. Donde mai questa nuova infezione inaspettata? Dopo tutto ciò, che s' è detto qui avanti, sembra che quest' alito urinoso debba attribuirsi alle tenuissime materie animali sopraindicate sparse per l' acqua, e decomposte dal calore: alito sfuggito intanto in tutte le analisi fatte finora dell' acqua marina, in quanto non era proposito degli analisti il tener conto dell' acqua che svaporava, ma che nelle distillazioni in questione, ove si fa caso e conserva dell' acqua svaporata, si rende sensibile e manifesto esaltandosi col vapore, e infettando l'acqua, come ce ne accertano le Transazioni Anglicane. E tanto per mio avviso è naturale quest' effetto, che se la ragione e tanti indizj non concorressero a persuaderci dell' esistenza di quelle sostanze inerenti all' acque del mare, questo caso potrebbe per avventura farne prova d'ogni eccezione maggiore. Non senza fondamento ho quindi creduto (*c*), e credo, che da questo sapone animale in dissoluzione per l' acque marine tragga origine l' apparenza bituminosa, ch' elle hanno, e che a tanti sagacissimi uomini ha sempre imposto fino a questi ultimi tempi, in cui non s' è mai potuto scuoprire atomo di bitume deciso nè pur nell' acque del mare Asfaltico, ove pareva che se ne annidasse in gran copia. Ciò che di animale contengono tutte le acque marine in istato saponoso non giunge per verità a un pezzo

---

(*a*) Istoria del mare.
(*b*) Trans. Angl. Vol. 48.
(*c*) Si legga la Mem. preced. intorno al natro pag. 39.

al carattere di vero e formale bitume. Ma n'è quasi il germe, se così può dirsi, il principio materiale, essendo proprietà caratteristica de' bitumi il cominciar dall' essere materie saponose. E se questo germe esiste in tutte l' acque marine, come non è permesso di dubitarne, facile è l' illusione; anzi, rigorosamente parlando, è meno fondata l' esclusione assoluta di qualunque principio bituminoso dall' acque del mare, che non è stata l' illusione di tutti i tempi andati. E qui si comprenda dalla discussione che ne abbiamo fatto, da quante difficoltà sia attorniato e premuto questo gravissimo argomento. E se non possiamo darci a credere ragionevolmente, che per impensata e felice casualità possa venirsi a capo di scomporre un magistero di natura sì complicato, quanta è mai la vanità de' tentativi senza numero che si son fatti, e si fanno tuttora per la purificazione dell' acqua del mare da uomini spogli d'ogni principio, onde le novelle del dì, i pubblici fogli, i giornali periodici hanno sovente occasione stucchevole di parlare!

Della congelazione dell' acqua.

La congelazione dell' acqua è stata sempre riguardata come una delle più belle operazioni naturali da che gli uomini presero non a fingere, ma a contemplare ciò che natura opera e produce continuamente sotto gli occhi nostri. Non è per avventura istante di questa metamorfosi che non meriti l' attenzione di un filosofo dal primo velarsi dell' acqua fino al suo intero ghiacciamento. Basta vedere le memorabili osservazioni che vi fecero da prima gli Accademici del Cimento (*a*), e quelle che vi fece poi con incomparabile diligenza il *Mairan* (*b*) per concepire la più alta idea di questa quanto comune altrettanto mirabile operazione. L' acqua vi si comporta come tutti i corpi se non semplici, poco almeno composti, le cui parti integranti, trovandosi per qualunque cagione separate e in istato di fluidità, vengono ri-

(*a*) Saggi di naturali Sperienze ecc.
(*b*) Dissert. sur la Glace.

messe in libertà, comunque ciò accada, di esercitare la lor mutua tendenza, di riunirsi, e di prender forma solida e regolare. In fatti, se circostanza non si opponga, affettano quelle dell' acqua per ogni parte del ripieno di configurarsi a foggia di piume co' fili o laminette costituenti un angolo di 60 gr. co' tronchi. E come la sperienza dimostra, che vario di varie sostanze di natura è questo configuramento sì, che sembra averne ciascheduna uno unicamente ed esclusivamente suo proprio e peculiare; così è cosa naturale il pensare, e il fatto lo conferma, che qualora s' interpongano principj stranieri nel rappigliamento, non può mai perfettamente aver luogo una tale simmetrica disposizione delle parti, nè quel configuramento individuo e singolare, che dicemmo. Quindi un indizio emana capitale forse, e, come pare, non equivoco dell' essere una sostanza ridotta al sommo grado di depurazione da straniere interposizioni, di cui può l' essenza di lei esser capace in natura, qualora passando dallo stato fluido a quello di massa solida figurata, assuma ella la sua precisa e determinata configurazione. E questa è senza dubbio l' intima ragione per cui, ancorchè si conduca la congelazione dell' acqua con tutta la possibile lentezza, e ad onta delle più favorevoli circostanze, non sempre affettano le parti interne del ghiaccio, esaminato attentamente, una medesima figura. Se si facciano ghiacciare otto libbre di acqua in cui sieno disciolti pochi grani di colla di pesce, tutto riesce confuso, e scompigliato il ripieno del gelo, e tutta si risente la massa dell' acqua di quest' ospite tenacissimo, che non dà luogo alla simmetria con cui si disporrebbero naturalmente le di lei parti integranti. Non può pertanto, rigorosamente parlando, la congelazione dell' acqua confondersi sempre con la cristallizzazione, mentre quella può sempre aver luogo che che sia in dissoluzione nell' acqua, e questa non può compiutamente verificarsi nel senso inteso, se non sieno le parti proprie dell' acqua in contatto tra di sè, rimosso ogni altro principio di mezzo. Ma se è fuor di dubbio, che, posta anche la presenza ed interposizione di stranieri principj nell' acqua, non è caso propriamente in cui per un convenevole grado di freddo non debba la dissoluzione rappigliarsi in gelo, che cosa mai accade di que' principj nel solidificarsi del loro dissolvente?

La

La diſſoluzione eſſendo un vero e reale ſtato di combinazione, in cui è rotta l'aggregazione reſpettiva del diſſolvente e del corpo diſciolto affinchè poſſano le parti integranti dell' uno unirſi alle parti integranti dell' altro, ſubito che nel nuovo compoſto vien tolto via uno de' componenti, o le parti di lui tornino ad aggregarſi, in qualunque modo ciò intravenga, naſce vera decompoſizione, la diſſoluzione non ha più luogo, e l' altro componente è in neceſſità di ſepararſi. Così in fatti adopera lo ſpirito di vino concentrato relativamente a molti ſali diſciolti nell'acqua. Infuſo nella diſſoluzione s' impadroniſce dell' acqua, di cui è avidiſſimo, o con cui ha più che co' ſali prevalente affinità, e perciò mancando a' ſali il diſſolvente reſtano abbandonati alla naturale gravità, e precipitano al fondo. Così fa l'evaporazione, che toglie alle ſoſtanze diſciolte l' acqua di diſſoluzione. E così in rigore dovrebbe accadere nell' agghiacciarſi dell' acqua di diſſoluzione, di cui è qui propoſito. O queſta legge operi ſola, o adoperi combinata coll' affinità di aggregazione potentiſſima, che hanno tra di sè le parti dell' acqua, la quale al ravvicinarſi di loro dietro al mancar ſucceſſivo del principio cagione della liquidezza, prevale a qualunque altra affinità di combinazione, ragion vuole, che una tal ſeparazione de' principj ſtranieri ſi verifichi nel rapprendimento dell' acqua in gelo. Ma come finchè l' acqua è liquida, freddata quanto potentemente ſi vuole, queſta precipitazione non può aver luogo, e non ha luogo nè pure allorchè ſia indurata l' acqua, reſtando tutto compreſo nel gelo, non è ſenza fondamento il penſare ch' ella non può verificarſi, che in quel ſolo ed unico intervallo di tempo in cui è quaſi coſtituita l' acqua in uno ſtato di mezzo tra la liquidezza e la durezza. Se dunque ſia iſtantaneo per intenſo e ſubito freddo il paſſaggio dell' acqua dall' uno all'altro ſtato, è coſa evidente ch' è tolto il tempo alla precipitazione de' principj ſtranieri tenuti in diſſoluzione nell'acqua, i quali neceſſariamente reſtano involti nel gelo, e che però quanto men repentino ſarà quel paſſaggio, tanto più favorevole alla purificazione dell'acqua riuſcirà la congelazione. Ma chi non vede che ſe non venga con avvedutezza tolta via immediatamente dopo l' agghiacciamento quella qualunque poſatura, che avrà po-

tuto farsi, sia permesso dire, in questa crisi dell' acqua, tornano a disciorsi que' componenti nel gelo strutto riformando la dissoluzione di prima ? Quindi è che nelle sole mani della natura questa operazione non può avere tutto l'effetto senza i convenevoli ajuti dell' arte, separandosi i principj stranieri per una legge, e riunendosi ben tosto per un' altra. Se dunque s' intenda rimosso il primo sedimento, e soggettato il ghiaccio strutto ad una seconda congelazione, chi non vede di nuovo, che riceve l' acqua un secondo grado di purificazione, e che così gradatamente ella si avvia per altri ed altri ghiacciamenti alla perfetta cristallizzazione dietro a queste parziali e successive depurazioni ? In fatti, estimando bene la cosa, poichè un solo, come s' è detto, è il momento favorevole per questa segregazione, che che si separi nell' agghiacciamento dell' acqua, prima e dopo di cui niente egli adopera a favor dell' intento, per moltiplicare sì fatti momenti è d' uopo moltiplicare le congelazioni necessariamente. Ma se così può procedere la cosa, come porta il discorso, sembra che questo progressivo depuramento per via di agghiacciamenti possa condurre l' acqua all' ultimo grado di purezza, di cui in istato di liquore può ella esser capace. Veramente sin qui non è che ragione, che il faccia presumere a rigore; ma vedremo in appresso, che non è un tale discorso nè pure smentito dall' esperienza, per quanto può aggiugnere alla precisione mentale l' operare sempre imperfetto delle nostre mani.

Applicazione di questi principj alla dolcificazione dell' acqua del mare.

Ecco per avventura un caso non abbastanza atteso, in cui per vie diametralmente opposte viene a capo de' medesimi effetti la natura. La perfetta cristallizzazione, e la tranquilla evaporazione naturale dell' acqua sono patentemente due capitali operazioni estreme, le quali convengono insieme nel disimpegnare e liberare l' acqua da principj stranieri ravvicinandola per opposti mezzi allo stato di acqua purissima. Su questo principio ho fondato le mie ricerche per la dolcificazione dell' acqua marina. Abbandonando quella di queste due

belle operazioni della natura, che non poteva non essere viziata dall' arte, come abbiamo veduto qui avanti, mi sono rivolto all' altra della congelazione artificiale, in cui l' arte entra per sì poco, e tutta può dirsi naturale. Sembra strano, che non avendovi forse chi non sappia, che l' acqua marina perde alquanto di sua salsedine nel congelarsi, non siasi alcuno avvisato giammai di trar profitto da questo fenomeno, e di tentarne la totale purificazione per una via, ch' era pur indicata dalla natura in qualche modo. Considerando ciò che accade tutto dì ne' ghiacciamenti de' vini acquati, delle birre, dell' aceto; nel gelarsi dell' acque impurissime nelle fosse campestri, e ne' paduli; nel trovarsi adunato nelle regioni settentrionali il sale nell' acqua marina sotto il gelo più copioso che non è nell' acqua marina naturale, non può dirsi certamente, che mancassero indizj per internarsi in questa indagine non senza fondamento. Pochi secreti di natura dovrebbero restarci ascosi, se tanto ci aprisse ella di adito, onde penetrarvi, come in questo. Ad ogni modo non s' è mai spinto più oltre l' occhio, investigando sino a qual segno poteva per questo mezzo inoltrarsi la purificazione dell' acqua del mare. E per certo il verificarsi ella imperfettamente nelle mani della natura, del che s' è veduto qualche ragione qui addietro, ha fatto credere a' Fisici impropria la congelazione per un tal uopo.

Ma a questa imperfezione poteva rimediarsi non difficilmente, siccome mi so a dimostrarlo coll' esperienza. Ho scelto per quest' oggetto l' acqua di mare delle Venete Lagune, che mi sono procacciato a Verona, e segnatamente attinta ne' canali tra le abitazioni di Venezia, onde averla delle più impure e complicate, che possa somministrar il mare.

Agghiacciamenti dell' acqua marina.

Volendo conoscere primamente i gradi di freddo più piccoli, co' quali poteva ghiacciar l' acqua marina, tentai col semplice gelo naturale di farne rapprendere sei libbre in un vaso di vetro nello scorso inverno; ma per quanto mi adoperassi non mi riuscì l' intento nè pur trovandosi il mercurio nel termometro di *Reaumur* cinque gradi sotto la congela-

zione naturale. Presi dunque a far uso del sal marino mescolato col gelo pesto, e dietro a molte prove variando la dose di entrambi, osservai che, stando anche il mercurio tre e quattro gradi sopra la congelazione nel termometro, con due parti di sale sopra quattordici di gelo l' agghiacciamento poteva aver luogo. Egli però non era totale, mentre nel mezzo trovava sempre un nocciolo di liquore non gelato. La parte ghiacciata era irregolarissima e rara, come l' hanno osservato i dotti Accademici del Cimento. Ma mi consolai sommamente nel trovar più salsa sempre, più amara, e più disgustosa al palato l' acqua del nocciolo, che non era quella che traeva dal gelo strutto. E così pure la parte gelata nel fondo del vaso era più salsa assai della parte superiore. Queste due osservazioni cominciano fin da bel principio a indicare col fatto, che nell'atto del gelare prendono a cacciarsi le sostanze straniere contenute nell' acqua marina dalle sponde verso il mezzo, come appunto dalle sponde verso il mezzo prendono a formarsi i primi filamenti del gelo; e che, come il conchiudemmo col ragionamento, precipita pure al fondo parte de' medesimi principj stranieri indubitatamente nell'agghiacciamento. Ma volli far prova eziandio di un altro estremo di freddo prima d'inoltrarmi. Proccurai pertanto l'agghiacciamento con due parti di sale marino sopra tre di gelo pesto ottenendo un freddo di 16 gr. sotto la congelazione, cioè un grado più del memorando freddo del 1709. Il ghiaccio dell' acqua marina riuscì più compatto e più duro assai di prima, ma con sorpresa vidi, che nel mezzo restava tuttavia un piccolo nocciolo di liquore amarissimo, e nauseoso oltre ogni credere.

Profittando intanto di questo lume conobbi, ch'era necessario preparare un ricettacolo eziandio nel fondo, il quale comunicando coll' altro che e con poco, e con molto freddo trovava naturalmente nel mezzo, ricevesse in deposito, e più propriamente in dissoluzione ciò che si separava dall' acqua marina. Quindi sarebbe stato agevole il versare quella salamoja fuor del vaso, lasciandovi il solo gelo, col quale poi si sarebbe potuto procedere alla seconda separazione, indi alle altre successive col medesimo artificio fino alla totale purificazione dell' acqua.

M' avvisai dunque di posare in appresso il fondo del vaso coll' acqua marina sopra la sabbia, e profondarvelo un pochino. L' espediente riuscì a dovere. Forando il gelato alla superficie usciva il liquore impuro dal vaso, e vi restava il solo ghiaccio, cui lasciava sgelare naturalmente, e tornava di bel nuovo a sottoporre il gelo strutto all' agghiacciamento. Perchè poi seguisse la congelazione gradatamente immergeva il vaso prima nel gelo naturale semplice, perchè l' acqua marina si freddasse, e s' impedisse il salto repentino nell' essere immessa nel freddo più potente, ove col ghiaccio doveva mescolarsi il sale.

Esperienze con tre parti di sale sopra nove e dieci di ghiaccio.

Preparai prima un vaso di vetro cilindrico graduato, onde conoscere quant' acqua si poneva a ghiacciare, quanto ne restava di liquida nel nocciolo e nel fondo, e quanta per conseguenza ve ne aveva di ghiacciata. Misurava il liquore con una misura cubica di metallo avente per lato un pollice veneto. Misi poscia a svaporare una di queste misure, cioè un pollice cubico di acqua di mare, e trovai che il peso esattissimo del sedimento secco ch' ella somministrò fu di grani 23 raccolti con tutto lo scrupolo, come termine di comparazione. Ciò importa una libbra sopra libbre $27\frac{13}{23}$ di acqua di mare, e così pure assai da vicino trovò l' *Hales* contenersi nell' acqua del Mediterraneo verso l' isola di Malta, cioè una libbra sopra libbre $27\frac{1}{10}$ di acqua marina.

PRIMA CONGELAZIONE.

Posi a ghiacciare cinquantaquattro misure di acqua marina col fondo del vaso di vetro posato su la sabbia. Fatta l' estrazione dopo tre ore circa, versai l' acqua non gelata nel vaso graduato, e trovai ch' era prossimamente ventotto misure. Strutta poi la parte agghiacciata n' ebbi $25\frac{3}{4}$ di quelle misure crescenti. Versai una di queste misure d' acqua del nocciolo in un piattello di porcellana, ed altrettanta in altro di acqua tratta da quel gelo strutto. Fatta a dolce calo-

re ſvaporare l' acqua da entrambi, trovai che il ſedimento ſecco della prima era preciſamente di gr. 36, e quello dell' acqua marina ſtata ghiaccio non aveva che gr. $9\frac{1}{4}$ di peſo. Dunque l' acqua del fondo e del mezzo aveva ricevuto gr. 13 di aumento per pollice cubico, mentre l'acqua ſtata ghiaccio aveva perduto gr. $14\frac{1}{12}$ per pollice cubico, i quali ſi erano diſtribuiti pe' 28 pollici cubici che dicemmo. Ecco col fatto verificata la depurazione di quaſi due quinte parti de' ſali ed altro, ch' era nell' acqua del mare con la ſola prima congelazione.

SECONDA CONGELAZIONE.

Poſi ventiquattro miſure di queſt' acqua di prima purificazione, che conteneva gr. $9\frac{1}{4}$ per miſura di ſoſtanza ſtraniera a congelarſi di bel nuovo. Fatto l' agghiacciamento ne' modi indicati, trovai $6\frac{1}{2}$ miſure d' acqua non gelata. Feci pertanto, come prima, ſvaporare una miſura di gelo ſtrutto, ed altra miſura ſeparatamente di quelle $6\frac{1}{2}$ rimaſe liquide. Il ſedimento di queſta riuſcì di gr. $25\frac{1}{2}$, e quello della prima ſtata ghiaccio appena di due grani. Dunque col ſecondo agghiacciamento s'era ſpogliata l'acqua di gr. 7 creſcenti per miſura, e però aveva perduto l' acqua marina in due congelazioni gr. 21 da' gr. 23 di ſtraniero che conteneva in iſtato naturale per miſura: progreſſo notabile, che mi fece conoſcere che la purificazione s' incamminava a gran paſſi. L' acqua era limpidiſſima, e non aveva nè odore, nè colore, nè ſapore che arrivaſſe a un pezzo a quello di prima.

TERZA CONGELAZIONE.

Di nuovo poſi a ghiacciare diciaſſette miſure di queſt' acqua di ſeconda purificazione. Cavata la boccia dal gelo trovai che il liquore del nocciolo era di quattro miſure creſcenti. Poſte pertanto a ſvaporare una miſura di queſto liquore ed una di acqua tratta dalla porzione ſtata gelo, il ſedimento della prima riſultò di gr. $6\frac{2}{4}$, e appena $\frac{1}{2}$ di grano quello della ſeconda. In conſeguenza in tre congelazioni era ridotta quell' impuriſſima acqua marina a non contenere che

$\frac{1}{46}$ per misura delle sostanze che conteneva in istato naturale.

QUARTA CONGELAZIONE.

Feci gelare dieci misure dell' acqua di terza purificazione, e terminato l' agghiacciamento trovai che l' acqua del nocciolo e del fondo non gelata giugneva appena a $\frac{1}{4}$ di pollice cubico. Svaporata quest' acqua somministrò quasi cinque grani di sedimento. Dell' altra una misura non lasciò sul piattello sedimento, che potesse apprezzarsi, ma solamente un che di untuoso, un velo che s' attaccava alle dita, mucido, ed acre insieme su la lingua.

QUINTA CONGELAZIONE.

Veggendo che nessun sedimento sensibile proveniva da quest' acqua di quarta purificazione, volli accertarmi con un esperimento ancora, se quest' untuosità, cui non sapeva attribuire che alla materia estrattiva, di cui ho parlato poco avanti, e che deve nell' acqua de' canali di Venezia trovarsi in grandissima copia, più che in quella dell' alto mare incomparabilmente, poteva con una nuova congelazione diminuirsi. Feci pertanto ghiacciare quest' acqua per l' ultima volta, e tutta per verità si apprese in gelo; il che fa vedere, che indipendentemente dalle attenzioni usate resiste già per sè l' acqua quanto è più impura al rappigliarsi, ond' è che anche con un freddo di 16 gradi sotto la congelazione abbiamo veduto rimaso un nocciolo liquido precedentemente. Trassi dunque una misura di acqua dal gelo ottenuto radendolo alla superficie, e la feci svaporare. Non ebbi come avanti alcun vestigio salino nel sedimento, ma un po di unticcio rendevasi ancora sensibile; compresi però che, come se ne ravvisava assai men di prima in questo sperimento, era inutile il moltiplicare più oltre gli agghiacciamenti per quest' oggetto, mentre l' acqua era ridotta a grandissima purezza, e l' esperienza indicava che poteva rimuoversi qualunque traccia anche di questo sucidume, se l' acqua del mare ne fosse pregna, come quella de' canali di Venezia, che non può mai esserlo generalmente.

Esperienze con tre parti di sale sopra sei ed otto di ghiaccio.

PRIMA CONGELAZIONE.

Posi a ghiacciare quaranta misure di acqua marina posando, come avanti, sulla sabbia il fondo del vaso. Fatta la congelazione, e rotto in superficie il gelo, versai l' acqua non ghiacciata nel vaso graduato, e la trovai di quindici misure. Strutta una parte del ghiaccio formato, ne posi a svaporare una misura, ed altra misura di acqua del nocciolo, ed ebbi gr. 50 $\frac{1}{8}$ dal sedimento di questa, e soli gr. 6 $\frac{1}{2}$ dall' acqua stata ghiaccio. In fatti era amarissima, e sommamente ingrata l' acqua, che non s' era ghiacciata nel vaso. Serbai pertanto due misure di quest' acqua di prima purificazione per ciò che vedremo.

SECONDA CONGELAZIONE.

Riposi di bel nuovo a ghiacciare il dì appresso venti misure di quest' acqua marina ottenuta per una nuova depurazione. Fatto l' agghiacciamento, il liquore del nocciolo non gelato era di cinque misure crescenti. Posta pertanto la consueta misura e di questo, e dell' acqua stata gelo a svaporare, il sedimento del primo fu di gr. 20 prossimamente, e di un grano appena quello dell' acqua stata gelo. E qui pure serbai due misure di quest' acqua depurata.

TERZA CONGELAZIONE.

Misi di nuovo a ghiacciare dieci misure di quest' acqua di seconda purificazione, e fatta la congelazione, non trovai che due sole misure d' acqua non gelata nel vaso. Fatte, come avanti, svaporare separatamente due misure una di quell' acqua non gelata, ed altra d' acqua stata ghiaccio, dalla prima ottenni gr. 6 di sedimento, e l' altra lasciò sul piattello l' untume che trovammo precedentemente, senza vestigio apprezzabile di sedimento salino. Serbai anche di questa due

due misure, come nelle congelazioni precedenti, e non parendomi necessario di ripetere nuovi agghiacciamenti, il cui effetto era abbastanza accertato anche per rispetto al purgare da qualunque untume, e sucidume l' acqua, m' acchetai de' risultamenti avuti.

Osservazioni sopra il gelo delle acque serbate nelle tre congelazioni precedenti.

Assicurato da queste sperienze, che per ripetuti agghiacciamenti effettuati nel modo esposto qui innanzi l' acqua marina più impura poteva all' ultimo grado di purificazione ridursi gradatamente, m'accinsi a fare qualche osservazione sul ghiaccio dell' acque poco avanti riserbate da farsi ghiacciare contemporaneamente, comparandolo con quello di un' acqua naturale purissima, e col primo gelo immediato dell' acqua marina. Voleva riconoscere col fatto, se m' era apposto al vero pensando che la tessitura de' geli dovesse andare successivamente accostandosi a quella determinata e costante forma, ch' è propria dell' acqua purissima, sola capace di perfetta cristallizzazione, secondo il grado crescente di purezza acquistata nelle congelazioni. Per la qual cosa riposi in boccette di vetro separate due misure d' acqua marina naturale, due di acqua di pioggia raccolta in aria, e feltrata per sabbia più volte (non volendone che fosse tocca dal fuoco), e le due misure serbate per ciascheduna dell' acque marine di prima, seconda, e terza purificazione; e tutte insieme le posi a ghiacciare in un medesimo tino con due parti di sale sopra tre di ghiaccio naturale pesto dopo di averle freddate nel gelo naturale, come in tutte le altre occasioni, per evitare il troppo repentino agghiacciamento. Cavate dal ghiaccio, e rotte le boccette in luogo fresco, mi feci a contemplare con una buona lente ad uno ad uno i ripieni di quelle congelazioni ordinatamente. Ecco le osservazioni, che v' ho fatto.

Ghiaccio dell' acqua marina.

Queſto ghiaccio non era molto duro. L' orditura di lui interna era rada, irregolare, e confuſa; pareva fatta a ſcagliuole di talco, e aveva nel fondo intrecciati i fili a foggia di boſcaglia. La ſuperficie del gelo era del tutto piana, e il teſſuto di lui eſteriore era un pò men confuſo dell' interiore.

Ghiaccio dell' acqua di prima purificazione.

Conteneva queſto ghiaccio tuttavia nel ſuo ripieno un teſſuto di ſcagliuole lunghe, e poco larghe; era più duro del precedente, e in ſuperficie cominciava a moſtrarſi un pò rilevato. L' orditura n' era più che prima regolare, e compoſta di fibre ò fila intrecciate con qualche principio di ſimmetria, interrotta per altro di tratto in tratto da pezzetti di ghiaccio informi, e ſenza configurazione.

Ghiaccio dell' acqua di ſeconda purificazione.

Candidiſſimo era queſto ghiaccio, più duro degli altri, e prominente in modo più ſenſibile alla ſuperficie. La teſſitura interna di lui era più fiſſa, e compatta de' geli precedenti. Le ſcagliuole in una parte apparivano diſpoſte a ſtella, e tendenti quaſi ad un centro; in altra formavano come ventagli con fila procedenti da un punto e formanti de' triangoli, con altre ſeganti a luogo a luogo quelle figure triangolari con direzioni parallele alla baſe de' triangoli. Oſſervai, che le direzioni e gl' incrocicchiamenti erano ad angolo acuto coſtantemente, di modo che ſi vedeva manifeſtamente, che l' agghiacciamento affettava una certa regolarità, e le parti integranti dell' acqua cominciavano già a prendere qualche determinata configurazione.

Ghiaccio dell' acqua di terza purificazione.

Come l'acqua era bensì di terza purificazione contata dallo ſtato naturale di acqua marina, ma aveva realmente ſofferto quattro congelazioni, così in queſto ghiaccio ſi fu preciſamente che trovai deciſe più che mai le apparenze di una ſimmetrica configurazione. Appreſſatovi il gelo che teneva da parte dell' acqua di pioggia ſeltrata e pura, or ſu queſto or ſu quello andava paſſando coll' occhio armato per farne confronto. Oſſervai pertanto, che, come in quello di piovana, partivano le laminette da un tronco come rami di abete, o piuttoſto come le eſtremità delle penne degli uccelli, ma con le fila più rade. Altre ſcappavano come tante reſte intorno ad un riccio di caſtagno. E quanto alla direzione delle laminette, o la ſi riguardaſſe relativamente a' tronchi donde elle ſpuntavano, o nella poſizione loro tra di sè allorchè tendevano a un centro, o s' incrocicchiavano inſieme, o formavano de' gruppetti ſeparati, o erano nella teſſitura del ripieno intrecciate ſenza ordine, appariva ella mai ſempre affettare più viſibilmente e più regolarmente che ne' geli precedenti un medeſimo angolo acuto da una parte, o un medeſimo angolo ottuſo dall' altra. Talchè a prendere l'obbietto per ogni verſo e nella candidezza, e nella durezza, e nella ſimmetrica configurazione ſi accoſtava in modo queſto ghiaccio al naturale di pioggia che aveva in confronto ſotto gli occhi, che non pareva mai di acqua marina e sì ſudicia, come quella ond' era tratto poco avanti.

Sperienze ulteriori intorno all' acqua del mare purificata cogli agghiacciamenti, e concluſione.

Veduto de' progreſſi degli artificiali agghiacciamenti dell' acqua marina, e del renderſi più e più pura l' acqua con le ſucceſſive congelazioni, ottimo conſiglio mi ſembrò quello di far ſaggio dell' acqua purificata direttamente. Preſe dunque otto libbre d'acqua di mare le feci ſucceſſivamente ghiacciare ſei volte togliendo via ogni volta la ſalamoja del mezzo

e del fondo, come avanti, e freddando prima l' acqua nel gelo naturale, indi mettendola nel gelo pesto mescolato col sale, e tutte adoperando le cure, onde parlammo, perchè riuscisse pura e spoglia d' ogni straniero principio, quanto può essere all' industria conceduto di ottenere. Ne' seguenti articoli stanno esposti i cimenti, che n' ho fatto in confronto dell' acqua di pioggia.

I. L' acqua era limpidissima, senza alcun immaginabile odore, dolce più dell' acqua di pioggia che aveva un pò di adusto; ma era floscia non iscorrevole, e assai men vivace dell' acqua di fonte.

II. Pesato in entrambe uno stesso pezzo di piombo con bilancette sensibili ad un quarantesimo di grano, ho trovato che la gravità specifica dell' acqua di pioggia era alla gravità specifica di quest' acqua marina purificata come 780 a 780 $\frac{1}{10}$.

III. In due vetri cavi tersissimi feci svaporare naturalmente pari quantità di quest' acqua, e di quella di pioggia. Se restò un po di appannamento sul vetro contenente l' acqua marina purificata, non restò meno appannato l' altro vetro, che pur conteneva acqua di pioggia raccolta in aria, e non di primo recapito.

IV. La sensibilissima tintura di tornasole non si alterò in quest' acqua per alcun modo.

V. La soluzione di argento non vi fece che disciorsi, e sparpigliarvisi, ma non comparve quella bianca mucellaggine che precipita, allorchè l' argento trova qualche atomo di acido marino con cui combinarsi nell' acqua.

VI. Il nitro mercuriale fatto a freddo produsse qualche nube biancastra, che precipitò poi con un' apparenza di coagulo, ma non in forma decisa caseosa, come fa se si trovi acido marino nell' acqua. Ma dove può esservi minuzia di materia estrattiva sottilmente inerente, e singolarmente marina, una tal precipitazione è equivoca, perchè ha luogo anche in questo caso, come può ognuno accertarsene coll' esperienza.

VII. Ma nè pure il zucchero di Saturno precipitò in polve bianca, come avrebbe fatto se fosse stato nell' acqua presente briciolo di sal marino, o acido marino libero, che non poteva.

VIII. Il ſapone di Venezia vi ſi diſciolſe facilmente e perfettamente.

IX. Ma non volendo far uſo d'altri reattivi fuor di propoſito, poſſedendo qualche copia di queſt' acqua purificata, per ultimo cimento preſi a berne il mattino a digiuno per più giorni. Per quanto attentamente mi applicaſſi a conoſcere ſe incomodo alcuno me ne derivaſſe per avventura, non mi ſono mai accorto, nè riſentito di alcun effetto diverſo da quello che ſuol produrre in me l' uſo giornaliero dell' acqua comune. Dopo tutto queſto pare non irragionevole il penſare, che ſe venga per qualche tempo aereggiata l' acqua marina purificata a dovere per queſta via, tenendola eſpoſta all' aria in vaſi aperti di poco fondo, ſia ella per acquiſtare quella vivacità che le manca, come dicemmo nel primo articolo. In fatti come non ſarà ella ſpoglia in ſommo grado di quell' aria puriſſima, che avviva le acque correnti, e che potrebbe dirſi, come pel fuoco, per gli animali, e per tanti altri magiſteri naturali, così per l' acqua, neceſſaria e vitale, dopo tante congelazioni? Egli è di fatto, che in queſta operazione, nel ravvicinarſi le parti integranti dell' acqua tra di sè, reſta anche l' aria eſcluſa nell' aggregazione come ogni altro corpo ſtraniero, o compreſa negl' interſtizj sì, che toſto che il può, ſi ſprigiona in bolle da ogni canto. Queſto ſprigionamento accade principalmente in que' medeſimi intervalli di tempo favorevoli allo ſgombramento dell' altre ſoſtanze, di che s' è parlato, in cui è l' acqua in uno ſtato di mezzo tra la liquidezza e l' induramento. E certamente può dirſi che queſta eſpulſione di aria ſi faccia in quell' atto più potentemente, che in ogni altro modo conoſciuto. Imperciocchè ſi diſtilli una certa quantità di acqua, la ſi purghi nel vuoto, la ſi faccia paſſare quanto ſi vuole pel mercurio, per la ſabbia finiſſima, operazioni tutte efficaci nel privar d' aria l' acqua, e finalmente la ſi faccia congelare. Se ſi abbia l' avvertenza di ſpezzare preſtamente il gelo in bricioli sì, che prenda la conſiſtenza del ſorbetto, ſi vedrà sbucar aria in bolle da tutte le parti, e in tanta copia, che niente ſi direbbe aver operato que' mezzi tutti uniti per iſpogliarnela: quindi lo ſtato di languore in che trovo ridotta l' acqua marina purificata con tante congelazioni ſucceſſive,

e la neceſſità di aereggiarla per molto tempo che ho indicato. E non ſi creda già ch' io caratterizzi ſenza fondamento per aria puriſſima l' aria del gelo, chiamandola quaſi vitale per l'acqua, come pel fuoco, e per gli animali; imperciocchè ſe ſi ſperimenti a cacciar l'aria atmosferica dalla capacità di un fiaſco, la cui metà ſia occupata da acqua ſtillata, e adattando poſcia ſtretta alla bocca di lui una veſcica floſcia ſi faccia due o tre volte gelare l' acqua e ſgelare ſucceſſivamente, ſi troverà che l' aria della capacità e quella che ſi raccorrà nella veſcica, ch' io chiamo aria del gelo, è pura puriſſima a tutte le prove quanto può eſſerlo quella che ſi trae dal nitro o dal precipitato roſſo. Del che baſti qui l' eſſerſi ſolamente fatto cenno per non divertirſi dal propoſito più del dovere.

Terminiamo pertanto queſta Memoria col ridurre a ſommi capi le conſeguenze, che poſſono dalle coſe eſpoſte legittimamente dedurſi, e con una breve digreſſione intorno a' ghiacci naturali del mare.

I. Tutto conferma il detto qui innanzi, che la perfetta criſtallizzazione dell' acqua fa per vie oppoſte quello, che fa la tranquilla evaporazione, liberando natura per entrambe l' acqua da' componenti ſtranieri, e ravvicinandola allo ſtato di acqua pura.

II. In conſeguenza mettendo un' acqua minerale avente in diſſoluzione ſtranieri principj a ghiacciare coll' avvertenza di freddarla per gradi, e di preſervare l'infima parte della maſſa dal rappigliamento, accade nelle ſtrette che riceve l' acqua dal freddo all' intorno, e nell' atto ſegnatamente del perdere che fanno le materie incorporate l'acqua di diſſoluzione, che quella parte, cui non è interdetto il movimento, ſi ſepari e vada a depoſitarſi ov'è tuttavia mantenuto nell' acqua lo ſtato di liquidezza.

III. Tolta via queſta parte liquida dal vaſo, e fatta ſtruggere la parte ghiacciata, ſe torni queſta a ghiacciare con le ſteſſe avvertenze di prima, torna a ripeterſi un altro momento favorevole per una nuova ſeparazione, e ricorre altra parte di materia, ch' era rimaſa nell' acqua, e dove il liquore non è gelato sì, che più pura di prima rieſce l' acqua rappreſa in gelo.

IV. E così via via procedendo con altre ed altre congelazioni, governate sempre a quel modo, più e più l' acqua si purifica, quanto più si moltiplicano i momenti proprj per un tal uopo, cioè quanto più si accosta l'acqua ad una perfetta cristallizzazione, ch' è il caso di somma purezza di cui l' acqua è capace.

V. Le sperienze istituite sull' acqua marina de' canali di Venezia, complicata quant' altra mai dell' acque minerali conosciute, fanno ampia fede dell' efficacia di un tale processo, col mezzo del quale si perviene a dolcificare perfettamente quest' acqua, che ha sempre eluso tutti gli artificj adoperati finora, fuorchè la spontanea evaporazione, ch' è di natura al par di questo. Il fedele andamento delle progressive depurazioni osservato scrupolosamente, la corrispondenza a' gradi di purezza crescente nella configurazione de' ghiacci più e più tendente alla regolarità simmetrica e conosciuta delle cristallizzazioni dell' acqua purissima, i saggi fatti sull' acqua finale depurata, col ratificare i principj su' quali è fondato il metodo, richiamano a favore di lui l' attenzione de' Fisici.

VI. Se clima o stagion fredda il permetta, gli agghiacciamenti naturali dell' acqua marina al sereno non hanno bisogno che di essere guidati dalla mano degli uomini senza alcuna spesa. E se non possano ottenersi che con le congelazioni artificiali, non va perduto briciolo di sale da mescolarsi con la neve, o col ghiaccio naturale, tutto ricuperandosi il sale dal gelo strutto coll' evaporazione. Quindi nelle regioni fredde, ove abbonda il ghiaccio marino, una parte del ghiaccio diventa strumento onde purificar l' altra prestamente, e sicuramente.

VII. Ma non solamente su la terra può trarsi vantaggio dal proccurare al sereno il naturale ghiacciamento, e righiacciamento dell' acqua marina per dolcificarla, ma nelle navigazioni eziandio sul mare. E oltre alla naturale anche l' artificiale congelazione può venire in acconcio su' vascelli con apposite conserve di ghiaccio naturale recate, direi quasi, per lievito di nuovo gelo da rifarsi ed aumentarsi coll' acqua marina in navigando. E non è impossibile eziandio, che cessi un dì anche la necessità di caricarsi di simili conserve, qualora

riesca di rendere praticabili in grande i modi conosciuti di far gelo senza gelo, o altro se ne trovi men di loro dispendioso e di facile esecuzione; argomento di nuova indagine pe' Fisici nobilissimo, attesa l' applicazione che può avere quant' altra mai utile agli uomini nelle lunghe navigazioni anche nelle stagioni e regioni calde, or poi che a pure congelazioni è ridotto il mistero del dolcificare l' acqua marina perfettamente.

VIII. E chi non vede, che ove la sola state è ora opportuna alla raccolta del sale marino nelle saline, anche nel verno può d' ora innanzi operarsi la separazione del sale, qualor venga ne' quadri evaporatorj introdotta a ghiacciare l' acqua marina nelle lunghe notti vernali, e si raccolgano le salamoje del fondo, ove precipita e si aduna assai più della metà del sale tenuto in dissoluzione nell' acqua secondo le nostre sperienze, traendo anche dal freddo un profitto giornaliero non atteso?

IX. Non essendo possibile, che l' acqua del mare lungi dall' abitato, e dalle coste possa giammai contenere il sucidume dell' acqua de' Veneti canali, non è da farsi attenzione a quel qualunque appannamento de' vetri che nelle evaporazioni all' aria lasciava l' acqua nostra purificata, il che non sarebbe accaduto coll' acqua attinta in alto mare. Ma in ogni caso, come ho potuto purificare perfettamente un' acqua contaminata da abbondante copia di colla di pesce, feltrandola per sabbia dopo due sole congelazioni, materia animale che ha presa tenace più di ogni altra sull' acqua; così può esser questo il mezzo sicurissimo onde liberarsi da ogni scrupolo, se si dubitasse che gli agghiacciamenti ripetuti non avessero con tutte le altre materie escluso anche ogni minuzia estrattiva. Essendo ella, se pur potesse rimanervene, sotto forma saponosa, e però più sospesa nell' acqua che disciolta, propriamente e rigorosamente parlando, la sabbia è il feltro più acconcio che possa immaginarsi per separarla dall' acqua, al cui effetto non arriva mai carta sugante, e nè pur la bollitura consigliata da molti. L' uso intanto che ho fatto per molti giorni io medesimo dell' acqua de' canali di Venezia dolcificata col metodo esposto, sempre a digiuno senza il più piccolo incomodo, quando i saggi suggeriti dalla Fisica

per riconoſcere la purezza di un' acqua non baſtaſſero, decide per certo dell' innocenza ſua con prove di fatto.

X. E per torle finalmente d' intorno il languore che s'è detto, la poca ſcorrevolezza, i difetti di tutte le acque comuni non battute da lungo tempo, e proprj eziandio del gelo ſtrutto d' acqua puriſſima, le quali divengono floſcie ed inette a rammollire i più teneri cibi (*a*), l' eſpediente dell' aereggiarla lungo tempo sì, che s' impregni d' aria, e ſi ravvivi come la miglior acqua di fonte, è efficaciſſimo, giacchè in dolcezza, purezza, e leggerezza non cede queſt' acqua a quella di pioggia, ſiccome abbiamo veduto.

De' Ghiacci naturali del mare.

S' è provato, quanto può eſſerlo nella Fiſica, dietro alle moltiplici ſperienze deſcritte in queſta Memoria, che il primo agghiacciamento dell' acqua del mare, tuttochè regolato coll' arte, condotto per gradi, e diſpoſto in guiſa che a' componenti ſtranieri reſti luogo a ſepararſi e depoſitarſi fuor del ghiaccio, non è baſtevole nè a diſſalarla perfettamente, nè a purgarla d' ogni materia eſtrattiva; è provato, quanto può eſſerlo nella Fiſica, che il rappigliamento in gelo dell' acqua del mare, naturale e ſpontaneo, non giunge mai che a ſpogliarla in parte de' ſuoi componenti. E come negli artificiali agghiacciamenti accade per eſperienza, così ne' naturali deve intravenire, che quella porzione di componenti, che ſi ſepara nelle ſtrette che dà all' acqua il freddo, ſi traſporti in quella parte ove più tarda a rappigliarſi l' acqua, eſſendo ſucceſſivo non ſimultaneo per ogni parte l' agghiacciamento artificiale o naturale, ch' egli ſia. Quindi nell' artificiale congelazione in vaſi, ove il freddo è applicato tutto all' intorno, la congelazione procedendo da ogni canto verſo il mezzo, quivi è la parte più tarda a ghiacciare, e quivi, come s' è veduto, ſi fa appunto depoſito de' componenti cacciati dalle ſponde. E quindi all' oppoſito ne' naturali ghiaccia-

(*a*) Muſſchenbroek Introd. ad Phil. nat. §. MDXIV.

menti dell' acqua del mare, ove il freddo è propriamente applicato alla ſuperficie eſterna, la congelazione facendoſi dalla ſuperficie in giù, verſo il fondo propriamente de' laſtroni di gelo ſi è che dee farſi depoſito, più che in altra parte, de' componenti che ſi ſeparano dall' acqua marina. Poſti queſti pochi ed or fatti incontraſtabili principj, di molti fenomeni potremo rendere ragione adeguata, i quali hanno dato luogo a ſentenze diſcordi men per errore, che per confuſion di fatto. E primamente parlando de' laſtroni, che vengono dalle coſte dell' Ollanda, e vanno galleggiando pel mare, trovati perfettamente dolci dal *Boyle*, dal *Bartholino*, e dal *Reyhero*, ſi ha tutto il fondamento di credere che appartengano in origine a' fiumi, cioè ad un' acqua perfettamente dolce. In fatti a chi non è nota l' immenſa copia di ghiacci galleggianti, che recano nelle vernate al mare tanti fiumi di grandiſſima portata, che vi metton ſoce da quelle coſte. Un ghiaccio naturale perfettamente dolce par che non poſſa dirſi ghiaccio d' acqua marina che non ſi dolcifica altrimenti alla prima ed unica congelazione, ſe le ſperienze noſtre fatte e ripetute con tutto lo ſcrupolo meritano fede. E forſe da fatti conſimili non ben depurati hanno tratto motivo di penſare il *Kircher*, il *Borichio* ed altri autori, che l' acqua marina ſi dolcifichi in ghiacciando, mentre non fa, come or ſappiamo di certo, che perdere una parte del ſuo ſale in un primo agghiacciamento, e non ſenza cura eziandio preparato e diretto. D' onde mai dunque i monti di ghiaccio galleggianti ne' mari ſettentrionali dell' Europa, e dell' America, di cui è dolciſſima l' acqua? E' vero che nella deſcrizione de' viaggi del *Marthens*, del *Vood*, e d' altri è detto avervene nella Baja di Hudſon, e nella Groenlandia di ſalſi, del che qui appreſſo; ma per aſſerzione d' altri navigatori, della cui fede non è chi poſſa dubitare, è trita notizia che ſmiſurate e altiſſime moli di ghiaccio dolciſſimo galleggino pure in que' mari. Quand' anche voglia accordarſi, che il fondo originario di queſt' iſole ſia di ghiaccio fiumale, ove la coſta ſia da grandi fiumi interſecata, l' altezza notabile ch' elle hanno di 100, 200, e fin oltre a 500 piedi ſopracqua (ſenza far conto della parte immerſa, ch' è maggiore di gran lunga della parte ſopraſtante, com' è facile a deſumerſi dalla

gravità ſpecifica del gelo dolce che ſta a quella dell' acqua marina di quelle latitudini, ſiccome ne ho fatto eſtimazione, come 80 a 93) obbliga a ricorrere ad altre cauſe per la loro ſormazione. A me dunque pare che la naturale e locale condizione di que' climi, ove cade neve dal cielo il più dell' anno, poſſa riſolvere la queſtione ſenza obbietto. Contro il fatto neſſuno può dubitare, che coſta a coſta non ſi diſtendano in que' mari grandiſſimi laſtroni di ghiaccio marino, indipendentemente dal dolce, che può formarſi alle foci de' fiumi, ove ve n' abbia, i quali tratto tratto ſi fendono con orribile fracaſſo, come il teſtificano i viaggiatori, ſi ſtaccano dalle ripe, e vengono nelle maree ondulati e inoltrati qua e là pel mare ſenza legge. La neve cadente vi ſi ammonticchia ſopra ben preſto, lega e commette i più proſſimi, e fa di loro il primo ſtrato fondamentale della fabbrica. Le nevi ſucceſſive ingroſſano ed alzano il lavoro, e così via via creſcendo la maſſa e indurandoſi più e più pel freddo fitto ed inſiſtente, que' monti ſmiſurati vengono a formarſi galleggianti pel mare, che i navigatori trovano poi dolci, com' eſſer debbono originariamente. Se non poſſiamo additare alcuno ſpettatore di fatto che allo ſtaccarſi de' laſtroni fondamentali che dicemmo dalle terre, e al primo inoſſarſi dell' iſole in queſtione abbia fatto attenzione, le circoſtanze deſcritteci da' viaggiatori coſtretti ad aprirſi il varco tra di loro co' navigli poſſono far fede, che l' aumento ed ingrandimento di loro vien dalla cauſa, che adducemmo. Veggaſi tra gli altri il viaggio al Sud dell' intrepido *Cook*. Mentre n' era circondato per ogni parte ben oltre i 60 gradi di latitudine auſtrale, e trovavale ſopracqua dolci a ſegno, che ne faceva proviſione l' equipaggio per ſua bevanda, veniva quaſi continuamente neve dal cielo, e infieriva il freddo oltre miſura sì, che aveva ſotto gli occhi l' atto ſteſſo del creſcere e ricreſcere dell' iſole cotidianamente, ove a ſtruggimento alternativo non dava luogo il rigore perſiſtente del freddo. Ma come ſi accorda la dolcezza dell' acqua di queſt' iſole di ghiaccio, ch' è di fatto, con la ſalſedine d' altre infinite che nuotano nella Groenlandia, nella Baja di Hudſon, nella nuova Zembla, e di cui era per avventura copia inſie-

me con le dolci ne' mari Auſtrali, ch' è pur di fatto (*a*)? Non ſi conſondano i fatti. La condizione di queſt' iſole di ghiaccio tuttavia ſalſugginoſo è altra da quella dell'iſole dolci. Quelle non ſono che ſmiſurati laſtroni di gelo d' acqua marina ſolitarj e vergini, ſe così può dirſi, cioè non ancora impaſtati di neve e cacciati ſott' acqua, mentre l' altre ſon ſatte, come s'è detto, di neve ſoprappoſta a neve ſtivata a grande altezza, e ghiacciata ſucceſſivamente, e i laſtroni che hanno ſervito loro di primo fondamento più non appariſcono, trovandoſi ſott' acqua profondamente ſommerſi. Quindi la dolcezza in queſte del gelo ſopraſtante, e il ſalſugginoſo dell' altre, in cui è tutto il ſale che rimane nel ghiaccio dell' acqua marina dopo un primo ed unico naturale ghiacciamento. Se la mole non le diſtingueſſe le une dall' altre, e ſingolarmente l' altezza, ch' è tanto notabile, e non può che nelle dolci verificarſi a quel ſegno, la condizione ſalſa, oltre alla forma, le caratterizza abbaſtanza, perchè poſſano diſtinguerſi in ogni caſo. Il non eſſerſi mai conoſciute a ſondo le mutazioni che può indurre l' agghiacciamento nell'acqua marina, e il limite di loro, non ha permeſſo che queſti ed altri tali obbietti foſſero abbaſtanza dilucidati, ed ha piuttoſto dato luogo, com'è naturale, a moltiſſimi equivoci. In fatti ſopra le oſſervazioni mentovate di *Marthens*, e di *Vood* s' è indotto a giudicare l'illuſtre *Mairan* (*b*) che neſſun intaccamento per avventura ſi faccia alla ſalſedine dell' acque marine coll' agghiacciamento, giugnendo a credere, che quel po' di dolce, che ſi trovaſſe alla ſuperficie de' ghiacci natanti, provenga *par la ſecretion que ſe fait alors de l' eau douce & de l' eau ſalée, comme nous l' avons remarqué des parties ſpiritueuſes du vin expoſé au grand froid*. Altri poi dalle maſſe nuotanti di gelo dolce hanno conchiuſo (*c*), che la naturale congelazione dolcifica perfettamente l' acqua marina, che non è vero. In fatti ſe queſti Autori, dice il *Mairan*, aveſſero preſo da queſti ghiacci la

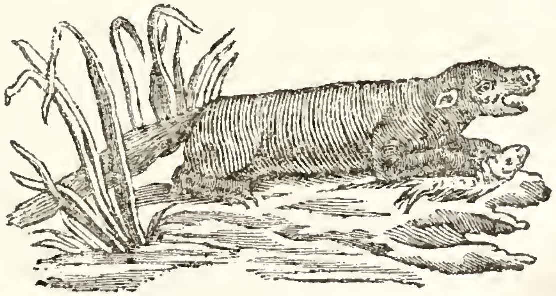
---

(*a*) Fred. Marthens voy. dans la Baje de Hudſon, & Suppl. aux voy. de Vood, & de Marthens.

(*b*) Diſſ. ſur la Glace Par. II. Sect. III. Cap. VI.

(*c*) Kircher Mund. Subt., Borichius in Act. Haſnienſibus, Bartholinus de nivis uſu medico.

parte, ch' è ſott' acqua, *ils auroient trouvé que la glace en etoit auſſi ſalée que la mer même*. Ma ſe il ghiaccio ondeggiante pel mare bensì dolce, ma non marino, può indur qualcuno in errore, il ghiaccio marino indubitatamente non dolce può a vicenda dar luogo ad un' oppoſta illuſione. Imperciocchè è vero, che nel ghiacciamento dell' acqua marina quella parte ſalina, che può ſepararſi, precipita a fondo, eſercitandoſi, come dicemmo, l' azione del freddo dalla ſuperficie in giù in un liquore continuo, del che ſi profitta ſu le coſte de' mari ſettentrionali, al dir di *Walerio*, per cavar ſale copioſamente dell' infima parte de' ghiacci marini; ma non è poi da conchiuderne contro il fatto, che l' agghiacciamento niente adoperi ſull' acqua marina, e molto meno che poſſa naſcere ſeparazione, non già di ſale, ma d' acqua dolce dalla ſalſa nel ghiacciare dell' acqua marina, come ne' liquori ſpiritoſi. I fenomeni di queſti ghiacciamenti or ſon fatti abbaſtanza paleſi e familiari dietro alle ſperienze precedenti per non laſciar più oltre confondere i fatti, e impedire gli equivoci in avvenire. Per il che non è forſe ſenza frutto, che ci ſiamo alquanto intertenuti in queſte dilucidazioni. Tutto è prezioſo nella Scienza naturale, ove traluca per grande ventura in che che ſia raggio di chiara verità.



SAGGIO

SOPRA L' EFFICACIA DELL' OLIO DI OLIVO NELL' ARTRITIDE VAGA.

Del Sig. Giovanni Antonio Marino Medico Primario dell' Ospitale della SS. Annunciata di Savigliano in Piemonte.

PRESENTATA

Dal Sig. Vincenzo Malacarne.

§. I.

Quanto sia grave morbo l'Artritide Vaga (*a*) quanto frequente, come difficile a curarsi, facile a rinnovarsi, lungo, doloroso, atroce, crudele, e spesse fiate perseverante fino all'estinzione del senso, e della vita, e chi v'ha fra medici che nol sappia? Oh quante fiate, ancorchè metodicamente trattato oltrepassa i quaranta giorni! Quante da acuto, siccome comparve, si trasmuta in cronico! Avvi forse mezzo per raddolcirne almeno i dolori, senza rischio di fissarlo, e perpetuarlo coll' opio? E chi osa mai vantarsi d'aver sempre potuto prevenire la sua metastasi dalla prima sede nelle parti esterne ai visceri vitali?

§. II.

Io m' occupava in simili pensieri già da molti anni, poichè me ne somministrava occasione frequente di osservare la

(*a*) Con questo nome io intendo, e comprendo tanto l'artritide reumatica della classe 1.ª ord. 1.° gen. 1.° quanto il reumatismo artritico della stessa classe gen. 3.° spec. 3.ª descritti nella *Notologia metodica* di *Francesco Sauvages*.

moltiplicità degl' infermi di tale ſpecie di malattia, che ſovente occorrono nell' Oſpedale che io reggo, ed aveva ben cento volte chiaramente, e coſtantemente veduto riſolverſi, e giudicarſi più o meno prontamente queſta malattia in ogni ſeſſo, in ogni età, e da qualunque diſſimile principio derivante, ſempre mai col mezzo di criſe fatta per ſudore, per l' orina, e per li ſeceſſi concotti. Avvertii che il ſudore ſolo la mitigava, che l' orina ora abbondante, ora ſtranguorioſa, talvolta la raddolciva nell' aſprezza, ma che ſempre mai ſi ſuperava pienamente dalla ſopravvenuta diarea biloſa, e tormioſa (*a*).

§. III.

Cercava perciò da lungo tempo, ed andava eſplorando come, e con quali mezzi ſi ſarebbe potuta diſporre la natura a queſte ſpecie di criſi più ſicuramente, e più facilmente di quanto ſin allora m' era ſtato conceſſo praticando i varj metodi da' più eccellenti autori propoſti, ma invano; quando che inopinatamente m' avvenne d' avere ritrovato a caſo ciò, che collo ſtudio, e l' arte ottenuto non aveva fino allora. Una oneſta donna maritata (*), d'età d' anni trenta, d' ottimo aſpetto, temperamento, e ſanità, gravida nell' ottavo meſe, mi ſi offre a curare a dì 20 del meſe di Gennajo del 1765. Queſta era detenuta da febbre remittente accompagnata da dolori vaghi artritici, e ſpecialmente nel ginocchio ſiniſtro, con tumidezza edematoſa del medeſimo. Erano di già traſcorſi quattordici giorni ſenza che dai replicati ſalaſſi, dall' uſo degli aperitivi ſaponacei, dai ſudorifici, fomentazioni, empiaſtri ricevuto aveſſe il menomo ſollevamento, poichè ſebbene la febbre foſſe notabilmente ſminuita, i dolori articolari incrudelivano. Le ſeccie erano reſtie fino dal quarto giorno della malattia ai cliſteri, ed ai purganti; le orine per lo contrario uſcivano limpide, e crude in copia, nè il ſonno conciliare ſi poteva col mezzo de' narcoti-

(*a*) *Nihil æque propemodum hoc morbo adfectos adjuvat, atque tormina, vel quocumque modo fluens alvus. Lommius Obſ. Med. lib. 2. pag. 273 de arthritide.*

(*) La Signora *Maſſa* nata *Tomatis*

ci; i polsi si erano resi fiacchi, e celeri crescevano i dolori, ed eravi minaccia d' aborto. Mi venne a mente di esplorare la virtù demulcente dell' olio de' semi di lino, ma appena proposto fu ricusato dall' inferma, ed in sua vece si esibì di trangugiare una mezza libbra d' olio vergine d' olivo di Nizza che riteneva in casa. Glie lo concedo; era la sera, e se la inghiottisce ripartitamente in più volte prima che s' inoltri la notte. Questa ne segue tranquilla con placido sonno non interrotto da dolori; e sull' aurora del XVI le ritrovo i polsi molli, nasce un blandocrasso sudore universale, il quale viene accompagnato da orine stentate, frequenti, parche, torbide, crasse, e laterizie, seguitate da feccie bilose, pultacee, e ne sono gli scarichi preceduti da tormini del ventre. Sulla sera appena si fa palese un residuo di febbre, il ginocchio appena dolente al movimento comparisce notabilmente meno gonfio, si ripete la stessa dose d' olio nel giorno XVII, e per due volte alternativamente ancora ne' giorni seguenti con lo stesso felice esito; onde si trovò perfettamente risanata l' inferma, ed in pochi giorni potè felicemente sgravarsi nel giorno XII di Febbrajo, ed al parto ne seguì un ottimo puerperio senza che sino ad ora abbia mai più sofferta recidiva dell' artritide.

§. IV.

Non erano passati tre mesi da questa prima felice inaspettata guarigione, che mi si presentarono tre soggetti in un medesimo tempo assaliti da artritide. Questi erano tre soldati del Reggimento la *Regina Dragoni* ritirati nel loro militare Ospedale, di cui era allora Chirurgo maggiore il Sig. *Provenzale*. Di questi il primo, giovane assai, era appena il primo giorno che incominciava a lagnarsi di dolori agli articoli, e con qualche tumidezza de' medesimi; il secondo già da tre giorni se ne lagnava, e tutti due erano assaliti dalla febbre; il terzo poi languiva già da tre mesi, tormentato da crudeli dolori vaganti da una articolazione all' altra, per cui sebbene variamente medicato da diversi valenti Professori, divenuto era quasi impotente al moto, magro, squallido, senza sonno, e tristo. Intrapresi di tutti tre nello stesso

ſteſſo tempo la cura, e dopo due ſalaſſi al primo, ed uno al ſecondo, premeſſa in tutti una conveniente purga, preſcriſſi ad ogni uno mezza libbra d' olio d' olivo da prenderſi ſulla ſera, la quale fu ripetuta per ben quattro volte di due giorni l' uno, alternativamente, e con sì fauſto evento che mediante le ſteſſe critiche evacuazioni d' alvo, d' orina, e di ſudore, nel nono giorno, ceſſata la febbre in que' due, che n' erano ſtati affetti, liberi d' ogni dolore, atti ad ogni movimento, ſenza che ſia comparſa orma di recidiva, eccettuatone qualche paſſaggiero riſentimento all' occaſione delle notabili, e ſubite variazioni dell' atmosfera, perſettamente riſanati ſi reſtituirono al loro dovere.

§. V.

Un ſervo (*a*) d' età d' anni 40 nel meſe d' ottobre dell' anno 1767 era da più meſi travagliato da doloroſa artritide vaga cronica ſenza febbre; e queſti ſebbene di robuſto temperamento egli foſſe, per la tumidezza delle articolazioni rigide e dolenti, ſvogliato, privo d' appetito, incapace di ſufficiente ſonno la notte, era divenuto inetto al ſuo officio: aveva ſino allora inutilmente tentato di ſollevarſi dal male col mezzo di lunghi, attivi, ed in apparenza adattati rimedj, onde io lo miſi all' uſo dell' olio d' olivo nella forma ſopra memorata, ed in termine di quattordici giorni trovoſſi felicemente riſanato.

§. VI.

Nell' anno 1768, e nel meſe di ottobre giacevano immobili in due letti ſeparati due uomini d' età virile, e di temperamento atletico (*b*) crudelmente travagliati da acuta artritide vaga; la quale in ambidue ſpecialmente s' era fiſſata alle ginocchia con tumore infiammatorio. Il primo, il

(*a*) *Lagnaſco* ſervo in caſa dell' Illuſtriſs. Sig. Marcheſe *Taffini* d' Acceglio.
(*b*) *Giovanni Roſſo* falegname, e *Bordigone* Facchino.

quale (premeſſi tre o quattro ſalaſſi, ed una purga antiflogiſtica) ſi aſſoggettò all'uſo, e metodo indicato dell'olio d'olivo, nel decimo ottavo giorno trovoſſi libero da ogni tumidezza, e dolore, ſolo reſtandovi l'inerzia, e la debolezza al movimento. Il ſecondo, che per ragione di avverſione innata all'olio, lo rifiutò, ſebbene trattato metodicamente giuſta il metodo di *Sydenamio*, e di *Uxamio*, appena dopo quattro meſi di rimedj continuati fu in caſo di abbandonare l'Oſpedale, e reſtituirſi al travaglio.

§. VII.

Una vergine d'anni quattordici, allora (*a*) non ancora menſtruata, già da qualche meſe clorotica, afflitta da frequenti emicranie, con apparente tumidezza d'abdomine ſino dalla ſua infanzia, fu ſorpreſa nel giorno 18 del meſe di febbrajo dell'anno 1769 da febbre acuta accompagnata da fieriſſimi dolori alle articolazioni de' piedi con tumidezza, i quali di poi vagarono, ed infeſtarono ſucceſſivamente preſſo che tutte le articolazioni per fino delle vertebre del dorſo, e del collo. Premeſſi replicati ſalaſſi giuſta le indicazioni, e purgazioni, e cliſteri, coll'uſo di due libbre d'olio d'olivo interpolatamente bevuto a quattro oncie per volta, e d'un linimento da me (*) praticato, e ripetuto più volte ſopra il tumore dolente, ai due del meſe di marzo ſuſſeguente libera dalla febbre, appena riſentiva qualche dolore nel movimento, ſicchè potè paſſeggiare ſenza appoggio per la camera, e ſul fine del meſe uſcire di caſa. Queſta ſteſſa donzella alcuni anni dopo ſoffrì una recidiva di tale malattia: era io allora trattenuto in caſa da infermità, onde fu curata da un mio collega con altra non iſprezzabile maniera,

(*a*) La Signora *Roſa Gheid*.

(*) La ricetta del linimento balſamico, di cui io mi ſervo per raddolcire, e diſſipare i tumori, e dolori artritici qualora attaccano il tronco, la quale non trovai in alcuna delle farmacopee a me note, e che ſi conſerva nel noſtro Oſpedale, ſi è la ſeguente. „ Rc. Thereb. venet. libb. 2. „ Ceræflavæ libb. 3. mir. elect., & „ aloes ſeccotr. aa. onc. 3. maſtic. & „ olib. aa. onc. 1. & ſemis. Contuſa „ quæ contundi debent indantur omnia in retorta vitrea Loricata, ex „ arenæ igne gradatim aucto balſamum elice „.

ma languì per mesi fra dolori, e tumidezze articolari prima di ristabilirsi in sanità.

§. VIII.

Sul principio del mese di marzo nell'anno stesso 1769 fui chiamato a visitare un uomo d' età d' anni 40 (*a*), il quale giaceva immobile in letto trattenutovi da acuta febbre, e da artritide vaga atrocissima già da otto e più giorni senza avere ricavato alcun sollievo da quattro salassi, e da molti altri rimedj ordinatigli da un altro Medico. Lo determinai con grande stento a bevere alcune oncie d' olio d' olivo, e gli feci ungere alcuni luoghi più dolenti col linimento menzionato; ne ricavò un notabile sollievo, ma non potè indursi a continuarne l' uso, sia perchè ripugnava la natura sua all' olio, sia perchè si trovò superata la febbre. Fu questi dappoi trattato per ben due mesi continui con vario metodo, e con molte medicine, ma appena trovossi in forze a potere lasciare l'Ospedale ai 25 di maggio susseguente ancora obbligato di servirsi delle stampelle per sostenersi.

§. IX.

Una donna cachettica quadragenaria molestata (*b*) da due mesi da vaga artritide senza febbre, per cui soffriva continue vigilie, ai 22 di maggio dell' anno stesso a mia persuasione bevette quattro oncie d' olio d' olivo, che non le promosse alcuna evacuazione, e lasciolle nausea fino all' indomani; nel qual giorno le ordinai un emetico, che bene purgolla per vomito, e per secesso con notabile sollievo, e dormì nella notte succedente. Ai 25 prese di nuovo una dose d'olio, per cui svanirono le tumidezze, ed i dolori vaghi, restandogliene un solo fisso alle coste spurie, che fu superato col linimento sopra descritto; risvegliossi l' appetito da lungo tempo perduto, ed in breve ricuperò le forze, e la sanità.

(*a*) *Tavella*.
(*b*) *Onoria Piana*.

§. X.

Un' altra donna d' età d' anni trenta (*a*) dopo un puerperio mal condotto fu assalita da febbre biliosa, alla quale s' aggiunse una vaga artritide dolorosissima. Era questa trattata da un Medico mio amico, e che un tempo fu mio discepolo (*), col quale aveva più volte fatta menzione dell' efficacia dell' olio d' olivo in tale malattia, per lo che lo propose per ben due volte in consultazione con altro Medico chiamato a sollievo dell' inferma, ma per ben due volte fu rigettata la proposizione, e fu preferto il metodo antiflogistico del *Sydenamio* promettendosene una felice sicura guarigione fra il termine di giorni quaranta. Ma l' inferma irritata da dolori, e stanca di tollerarli, allettata dal più pronto sollievo promessole dal primo col mezzo dell' olio, dopo alcuni giorni si determinò ad intraprenderne l' uso, e continuarlo. La qual cosa fu con sì prospero successo, che nel decimo terzo giorno trovavasi libera e dalla febbre, e dai tumori, e dal dolore, senza che siale succeduto mai più nulla di morboso. Partecipommene egli l' osservazione sua prima, nella quale sollecitamente notò la virtù anodina dell' olio, per cui di leggieri i dolori si assopirono, e le permettevano placido il sonno, la diaforetica, che mostravasi con un continuato blando madoro della pelle, e l' alterante critica tanto nelle orine che, di limpide siccome comparivano in principio, s' erano colorite, e deponevano un marcioso sedimento, quanto nelle feccie fattesi pultacee, giallastre, e copiose.

§. XI.

Giaceva in letto da venti giorni, inchiodatovi da atrocissimi dolori artritici vaghi ai piedi, alle mani, ed alle gi-

(*a*) *Maddalena Alladio.*

(*) Il Sig. Dottore *Provenzale* già da alcuni anni aggregato al Collegio di Medicina della Regia Università di Torino, e Medico della casa Reale.

nocchia, un Religioso mio amico (*a*), per sollevarlo dai quali s' erano proposti, e praticati numerosi rimedj da varj Medici, che lo visitavano, senza vantaggio alcuno. Viaggiando io mi fermo accidentalmente nel Convento in cui dimorava, e lo veggo. Propongo il mio metodo, che s' accetta, e s' intraprende nel momento medesimo, ed io parto. Nel terzo giorno al mio ritorno già lo trovo passeggiante per la camera.

§. XII.

Cento e più consimili esempj di pronte, e felici cure io potrei quivi aggiugnere operate in ogni stagione, in vario clima, in ogni età, in diverso sesso, e temperamento, se fosse d' uopo, che per brevità tralascio, e ristringomi ad aggiungerne due soli, per li quali viene provata l' efficacia dello stesso rimedio nelle recidive, ed una terza osservazione, la quale chiaramente dimostrerà nello stesso soggetto quanto prevalga il metodo mio sopra ogni altro.

§. XIII.

Il primo caso di recidiva, che mi avvenne, fu in un soggetto giovane atletico (*b*), il quale nell' anno 1771 sorpreso da gagliarda febbre accompagnata da atrocissimi dolori artritici vaghi, prevj sei salassi, l' applicazione di numerose coppette tagliate sul dorso, e leggieri purghe, in meno di quattordici giorni col mezzo rammentato trovossi libero, e guarito. Ma abusando del suo stato pochi giorni dopo espostosi incautamente all' atmosfera fredda, ricadette nella febbre, e ne' tumori, e dolori articolari. Lottò fra questi mali inutilmente praticando varj adattati rimedj, finchè ripetuto l' uso dell' olio prontamente se ne sentì liberato.

(*a*) Il Mto. R. Padre *de Asti* di Vigone Maestro di Teologia Agostiniano.

(*b*) Mr. *Faletti* allora guardia del Corpo di S. M. il Re di Sardegna.

§. XIV.

Ecco il secondo. Trovavasi crudelmente travagliato da fiera artritide vagante, con tumore ne' piedi, nelle ginocchia, nelle mani, e ne' gomiti da più d' un mese nella città di Cuneo sul finire dell' inverno un giovane (*a*) Cavaliere mio amico, senza che sollevamento alcuno si sentisse da una faraggine di rimedj apprestatigli. Io gli aveva fatto suggerire per mezzo del suo fratello l' uso metodico dell' olio, ma ne fu impedito da chi lo curava. Dispettatosene questi, e recatosi in Cuneo lo indusse a tollerare con grave incomodo il viaggio per trasferirsi in Savigliano, lo che fu accettato, ed eseguito colle maggiori possibili cautele. Qua giunto principiò l' indomane ad usare l' olio, e dopo d' averne bevute due libbre in tre giorni, nel quarto potè discendere dal letto, e per eccesso di contento, fece alcuni passi a misura di ballo con una zitella di casa. Abusò egli del suo felice stato, s' espose all' aria fredda, ed umida di notte tempo, e fu di nuovo assalito dalla febbre, e dai dolori con tumore specialmente in un ginocchio, ma con due libbre d' olio in pochi giorni per sempre liberossene.

§. XV.

Aveva sofferta in Torino una artritide vaga reumatica acuta un mio amico di giovane età (*b*), sono ormai alcuni anni, la quale fu metodicamente curata da un valente Professore; penò tuttavia alcuni mesi prima di potere abbandonare la camera, e sentiane le reliquie dolorose durante tutto l' inverno susseguente. Ricadette nella stessa malattia nella state dell' anno 1783, e mediante l' uso dell' olio giusta il metodo indicato, in pochi giorni trovossi interamente guarito senza reliquia di male.

(*a*) Il Sig. Cavaliere di *Massangy* Ufficiale nel Regimento della Regina Fanteria.

(*b*) Il Sig. D. Akami Prefetto del Collegio delle Regie Scuole di Savigliano.

§. XVI.

Volli sperimentare se così faustamente superare si poteva il reumatismo semplice, sia che spontaneamente, e primitivamente attaccasse le braccia, o le diramazioni del nervo ischiatico nelle coscie e nelle gambe, e piedi, o qualunque altra parte senza tumore; ossia che il reumatismo succedesse all' artritide. Lo sperimentai negl' insulti di podagra, e di gonagra, ma non ne ottenni mai più, che una leggiera diminuzione de' dolori, quantunque oltre il tempo, e la dose consueta continuato. Tentai similmente il paragone dell' olio de' semi di lino con quello d' olivo, ma senza frutto; ed ultimamente per un villano robusto, che ricoverossi nell' Ospedale, già essendo stato da più di due mesi travagliato da fiera artritide vagante per ogni articolazione, a lui feci prendere in dosi ripartite più libbre dell' olio di lino infruttuosamente, dovetti ricorrere a quello d' olivo, col mezzo del quale in due settimane fu egli in caso di lasciare l' Ospedale, e recarsi al suo tetto intieramente guarito.

Corollarii.

1. Dalle esposte osservazioni risulta che l' olio d' olivo preso internamente giusta il metodo additato premessa la soddisfazione delle indicazioni, che si presentano, si è il più pronto, il più sicuro, ed efficace rimedio nell' artritide vaga reumatica.

2. Che in uno stesso tempo compisce le veci di rimedio anodino, diaforetico, e purgante.

3. Che guarisce mediante crisi apparente.

4. Che conviene egualmente in ogni età, in ogni temperamento, in ambi i sessi, in ogni stagione.

Onde preferire si debba con giusta ragione ad ogni altro medicamento in questa malattia, e possa meritare il nome di *Specifico* della medesima.

Agisce forse l' olio d' olivo nel corpo umano in certa data quantità introdotto rettificandosi così vantaggiosamente per mezzo de' filtri, pe' quali passa; per mezzo degli umori co'

quali s' associa, che così purificato, e spogliato d' ogni aliena crassa sostanza, perduta ogni fissità possa appiano, e liberamente penetrare nelle cellette del tessuto adiposo? Coll' olio contenuto in tali cellule avrà sicuramente una grandissima affinità, ed ivi si renderà capace, ed atto a sciorre le particelle della sostanza, che compone il fermento artritico, dalla congestione delle quali ne nasce il tumore, ed il dolore, onde rese scorrevoli, e forse assimilate ed alterate, atte divengano ad essere più facilmente trasportate, e cacciate per le strade congruenti delle escrezioni dell' alvo, dell' orina, e del sudore. Quanta affinità possa avere l' olio dai vegetabili spremuto con l' olio animale, s' impara specialmente dalla sagacissima analisi fatta di quello d' olivo dal chiarissimo, ed esimio Sig. *Vincenzo Pozzi* pubblicata nel Volume sesto pag. 75 e seg. dell' Accademia dell' Instituto di Bologna, nel fine della quale, e nell' ultima sperienza consta che l' olio si ridusse a forza di rettificazioni ad una pellucidità, e limpidezza tale, che emulava l' acqua, senza vestigio di fissità, e che quell' olio adoperato col mezzo di ripetute fregagioni sopra il carpo d' una mano affetto da ribelle torpidezza, lo ristabilì nel suo pristino stato di sensitività, e di moto. Ved. il luogo citato, con tutto il dilicato processo analitico degno d' ogni lode.

Cautele, ed Avvertimenti.

I.

Sempre che l' artritide sarà accompagnata da febbre, e che i polsi al tatto si manifesteranno pieni, e duri, e massimamente se il sangue estratto comparirà cotennoso, si dovrà premettere il salasso, e replicarlo largamente, e prima d' intraprendere l' uso dell' olio, e nel tempo stesso che già si prende, qualora l' indicazione si presenti.

II.

Non si deve intraprendere l' uso dell' olio se prima il canale intestinale non s' è sgombro con adattato purgante, ed il

il ventricolo, se occorrano nausee od altro indicante, votato con blando emetico; e l' uno, e l' altro s' avranno a ripetere qualora le nausee, e la lingua fecciosa non s' emendassero consecutivamente a' primi.

III.

Premesso il purgante, o l' emetico, ed intrapreso l' uso dell' olio, quando i secessi non si rendono facili, io soglio aggiungere ad ogni dose d' olio una dramma di sale comune, e con esso meno nauseante diviene l' olio bevuto, e lubrico si rende l' alvo; oppure fo praticare clisteri incitanti il secesso.

IV.

L' olio d' olivo deve sciegliersi recente, puro, non rancido, e se si può avere di quello conservato in bottiglie, o fiaschi. La dose (sebbene stabilire non si possa eguale in ogni caso) mi risulta però dalle numerose osservazioni, che non debbe essere minore di due libbre prese a dosi ripartite di quattro oncie caduna nello spazio di due, od al più di tre giorni. Sono però qualche volta necessarie le tre libbre, e più per vincere un morbo antico, e ribelle, che la prudenza del Medico curante saprà regolare.

V.

Debbesi avvertire, che qualora l' artritide dalle articolazioni si porta con pericolo ai muscoli del torace, del collo, del dorso, o dell' abdomine inducendo dispnéa, e tosse, mi sono felicemente servito per risolverla del linimento del balsamo vitale descritto nella nota del §. VI. o del balsamo Anodino di *Guidone*.

VI.

Il vitto deve essere tenuissimo in ogni caso di *piressia* compagna dell' artritide, cioè di soli brodi di vitello alterati

con erbe ſaponacee, ed alquanto più pieno ſarà qualora l'artritide non ſia febbrile, ma cronica, e lenta; ed allora conſiſta in pochi vegetabili miſti di carni animali tenere, e poco vino ſi bea.

VII.

I leggieri dolori reſidui, e le debolezze delle articolazioni, qualora oltrepaſſano un certo tempo proporzionato alla intenſità, e lunghezza del morbo precedente, lo che accade pur qualche rara volta, eſigono per ſuperarli o l' uſo delle terme, o l' *inſolazione*, a' quali ajuti una ſol volta in tanto numero di cure m' avvenne d' eſſere ſtato obbligato di ricorrere.

VIII.

Dall' uſo interno dell' olio per più giorni continuato, in tanta quantità, ſebbene in molti ſiaſi ſuſcitata nauſea, giammai però non ho veduto naſcere veruna pertinace debolezza di ventricolo, nè le conſeguenze d' un appetito proſtrato, ſiccome da molti ſi teme.

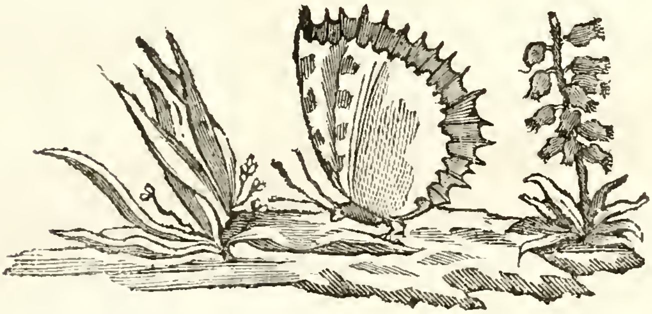
IX.

Siami lecito d' aggiugnere una oſſervazione. Ebbi a notare in alcuni, e ſingolarmente ne' giovani, e negli uomini ſalaci, che l' olio preſo in così egregia doſe in sì breve tempo, il quale ſuole quaſi ſempre produrre teneſmo di veſcica con ſollievo de' dolori articolari, ha in alcuni indotta una ſpecie di moleſta tentigine con priapiſmo, la quale ſi è ſempre mai calmata in un ſol giorno mediante bevande copioſe nitrate, ed emulſioni.

§. X.

Debbo ſoggiugnere, che non ha guari m' incontrai in due caſi ſingolari, ne' quali trovai l' artritide ribelle all' uſo metodico dell' olio d' olivo. Il primo fu in una vecchia forſe

ottuagenaria ſoggetta di già a replicate recidive, ed in cui rimanevano palpabili nodoſità antiche nelle articolazioni dei carpi. Il ſecondo fu in un ſoggetto giovane bensì, e che per la prima volta ne era attaccato, ma complicata era l' affezione artritica colla ſifilide, e forſe da queſta dipendente. In ambidue però ſe l' olio non ha totalmente ſuperata la malattia, non mancò tuttavia di calmare in gran parte l' acutezza del dolore, e di ſminuire notabilmente le tumidezze articolari.



SOPRA ALCUNI FENOMENI

DE' FOSFORI BOLOGNESI NE' DIFFERENTI FLUIDI AERIFORMI.

Del Sig. Conte Morozzo.

Da lungo tempo nutriva fra me il penſiere di eſaminare i fenomeni della luce del fosforo di Bologna ne' differenti fluidi aeriformi, e conſiderando queſto fenomeno come una vera, quantunque debole, infiammazione, penſava che queſte ſperienze potrebbero riuſcire molto intereſſanti ſia per riconoſcere nuove proprietà di queſti differenti fluidi aeriformi, ſia per meglio riſchiarire i fenomeni della fosforeſcenza di queſta pietra.

Trovandomi nella ſcorſa primavera in Bologna, e avendo avuto più volte occaſione di diſcorrere con quei Signori dell' Iſtituto (*) della loro pietra fosforica, il Sig. Dottore *Camillo Galvani* mi regalò alcuni pezzi di detta pietra, ed una quantità di fosfori da lui preparati, accompagnando queſto ſuo dono di un dotto ed intereſſante libretto da lui pubblicato ſopra la pietra Bologneſe. Mi trovai perciò in caſo d' intraprendere le progettate eſperienze, le quali avendomi dato luogo a molte intereſſanti oſſervazioni, le reputo non indegne della pubblica luce.

La pietra fosforica Bologneſe fu definita dal Generale *Marſigli* una materia *gipſea* (*a*), e da *Valerio* fu claſſificata ne' geſſi ſotto il nome di *ſpathum gypſoſum cryſtallizatum*. Da Margraff è detta *gypſum ſpathoſum*, da Cronſted *marmor metallicum*, da Kirvan *baroſelenite*, da Bergman *ſpathum ponderoſum*; il quale ſpato peſante impropriamente fu da alcuni anche chiamato ſpato geſſoſo o ſelenitoſo.

(*) Mi ſi permetta, che qui renda una pubblica teſtimonianza di gratitudine verſo que' Signori dell' Iſtituto, che sì gentilmente mi hanno favorito.

(*a*) *Comment. Bonon.* I. pag. 184.

La pietra Bolognese non ha gran durezza, è molto pesante, non fa effervescenza veruna cogli acidi prima d' essere calcinata in contatto co' carboni. Il Sig. *Macquer* crede doversi definire spato pesante selenitico.

Dopo le belle scoperte di *Bergman* e di *Scheele*, credesi questa pietra della natura degli spati pesanti, cioè a dire un composto di terra pesante coll' acido vitriolico sopraccaricato di flogisto (*a*).

In queste pietre alcune volte la terra pesante non è pura, ma è penetrata o dal petrolio, o è frammischiata con gesso; viene allora chiamata da *Cronsted*, *lapis hepaticus*, per causa dell' odore di fegato di zolfo, che essa manifesta.

Non essendo l' oggetto di questa mia Memoria di dare un' analisi di questa pietra, ma solo di esporre l' esperienze da me fatte coi fosfori preparati colla medesima, e ciò dispensandomi da ulteriori ricerche sopra la sua natura, passerò ad esporre la maniera con cui si preparano detti fosfori.

Si riduce la pietra in polvere impalpabile, indi impastandola con bianco d' uovo allungato con acqua, se ne fanno dei pezzi rotondi di circa un pollice di diametro, i quali lentamente fatti seccare si mettono poi a calcinare fra mezzo a' strati di carbone per lo spazio di tre ore circa (*b*).

I fosfori, di cui mi sono servito ne' varj esperimenti, erano di peso mezz' oncia circa.

Riposi un pezzo di fosforo in una boccetta di cristallo riempita d' aria atmosferica, ed un simil pezzo in altra boccetta (*c*) ripiena d' aria deflogisticata ricavata dal nitro; li esposi entrambi alla luce del giorno per quattro in cinque minuti (*d*); indi fattili portare in una camera oscura, dove stava cogli occhi chiusi da alcun tempo, vidi splendere di vivissima luce quello che era rinchiuso nell' aria deflogi-

(*a*) La pietra di Bologna, esposta allo specchio ustorio, ha manifestato un odore penetrante di zolfo. Vedasi il Diz. di *Macquer*.

(*b*) Si consulti il citato libro del Dott. *Galvani* al cap. IX. delle varie preparazioni della pietra Bolognese.

(*c*) Queste boccette di cui mi serviva erano della capacità di una libbra d' acqua distillata.

(*d*) Fu osservato che questi fosfori risplendono di luce più viva quando sono esposti fuori del contatto de' raggi solari.

ſticata, e molto minore oſſervai eſſere la luce del pezzo riposto nell' aria comune.

Un pezzo di fosforo riposto in una boccetta aperta, ed un altro in una boccetta chiuſa col ſuo turaccio, ambe le boccette ripiene d' aria comune, furono eſposti alla luce, ed eſaminati in luogo bujo; non oſſervai differenza veruna nella luce fosforica (*a*).

Un pezzo di fosforo chiuſo nell' aria ſtata flogiſticata da un carbone acceſo divenne molto meno lucido, che nell' aria comune.

Due pezzi di fosforo chiuſi l' uno nell' aria fiſſa ricavata dalla terra calcare coll' olio di vitriuolo, e l' altro nell' aria deflogiſticata, di viviſſima luce queſto era lucente, quando l' altro appena moſtrò una debole luce.

Laſciato quello nell' aria fiſſa per 24 ore, eſposto quindi alla luce, ed oſſervato, trovoſſi appena ombra di luce; laſciato ancora queſto fosforo per 24 ore nell' aria fiſſa, eſposto di nuovo alla luce, ſi moſtrò privo affatto di fosforeſcenza.

I pezzi di fosforo, che ſi laſciano per alcun tempo nell' aria fiſſa, prendono un odore penetrantiſſimo di ſegato di zolfo.

Tolto un pezzo di fosforo dalla boccetta ripiena d' aria fiſſa, ed immerſo in una boccetta ripiena d' aria puriſſima deflogiſticata, e dopo 24 ore eſposto alla luce, vidi che il fosforo aveva ripreſo molta luce; non deggio per altro ommettere, che giammai la ſua luce non fu così vivace come nello ſtato naturale, e molto meno aſſai ſe foſſe ſtato ſempre nell' aria deflogiſticata.

Un pezzo di fosforo riposto in una boccetta ripiena d' aria infiammabile, ricavata dal ferro coll' acido vitriolico, eſposto ſecondo il ſolito alla luce per alcuni minuti, parve luminoſo, ma con luce più debole che nell' aria comune, più viva però che nell' aria fiſſa. Laſciatolo nella boccetta per 24 ore parve pure luminoſo, e così pure ſe ve lo laſciava

---

(*a*) Per conſervare lungo tempo la fosforeſcenza di queſta pietra calcinata, provò il Dott. *Galvani* a chiuderla ermeticamente in un globetto di criſtallo, ed oſſervò che la luce di queſti fosfori non era notabilmente diminuita.

per alcuni giorni, sempre era questo risplendente quantunque di debol luce.

Avendo dopo 24 ore esaminata l' aria infiammabile, con mia sorpresa trovai che alcune volte più non era infiammata dalla candela accesa, e che questa vi ardeva come nell' aria comune; e l' aria divenne ottima per la respirazione animale, come vedremo in appresso.

Il fosforo, che restò in quest' aria, divenne verdastro assai.

Un pezzo di fosforo rinchiuso nell' aria nitrosa ricavata dal ferro coll' acido nitroso, esposto come gli altri alla luce per 10 minuti, mostrò una debolissima luce, che svanì in pochi secondi. Conservato questo per 24 ore nella boccetta, ed esaminato anche nelle prime ore, non si manifestò più lucente; aperta la boccetta, con somma mia maraviglia non si videro vapori rutilanti per la comunicazione coll' aria atmosferica, nè meno si sentì odore d' acido nitroso.

Questo fosforo fu intonacato di una sostanza verde chiaro-giallastra, la quale sembrava zolfo. Con un coltellino ne staccai alcuni grani, i quali messi sopra un ferro rovente mi dimostrarono essere un composto di zolfo e di sal nitro.

I pezzi di fosforo, che restarono più di 24 ore dentro l' aria nitrosa, quantunque nuovamente esposti alla luce, all' aria aperta più non ripresero fosforescenza veruna, e questa non potei altrimenti proccurarla, che col calcinarli di nuovo fra mezzo a strati di carbone.

Le rapportate esperienze ci fanno vedere, che i fosfori splendono più o meno vivamente secondo la qualità de' fluidi aeriformi in cui sono introdotti, e che seguono la stessa legge delle altre sostanze combustibili, le quali ardono di vivissima luce nell' aria deflogisticata, e si spegnono nell' aria fissa, nella nitrosa, e nella flogisticata; accendono questi in vero l' aria infiammabile, indi si spegnono; qui all' incontro la debole fiamma del fosforo non è atta ad accenderne l' aria, ma continua questo a risplendere senza accenderla.

Il celebre Priestley nelle molte ingegnose sperienze da lui fatte sopra le differenti specie d' aria non mancò di osservare, che un pezzo di fosforo di Kunkel messo nell' aria acida vitriolica, nell' aria nitrosa, e nell' alcalina, non s' infiammò, nè diè luce veruna. Sappiamo all' incontro che scintil-

lante e viva si è la luce d' un pezzetto di fosforo, che s' introduce nell' aria deflogisticata, e che l' occhio non può reggere allo splendore del suo lampeggiamento. Che se ne' primi non vi fu diminuzione d' aria, poichè non seguì infiammazione, qui all' incontro la diminuzione fu molto considerabile, e l' aria divenne flogisticata, poichè vi fu vera combustione.

Lo stesso non succede, come abbiamo osservato, nei fosfori composti colla pietra Bolognese, ne' quali quantunque la loro luce sia prodotta da una vera infiammazione, questa essendo così debole, riesce perciò insensibile la diminuzione, che questi producono nelle arie atte a mantenere la fiamma, e non abbiamo strumenti sensibili a segno di marcare queste picciolissime variazioni (*a*).

I sorprendenti fenomeni, che ho osservato nell' aria infiammabile, e nell' aria nitrosa, dove stettero rinchiusi alcun tempo i fosfori, mi fecero conghietturare che questi fluidi aeriformi erano cangiati di natura: cercai dunque d' indagare le nuove proprietà di questi fluidi dopo che sono stati alcun tempo in contatto con detti fosfori.

Il che ho eseguito esaminando questi fluidi aeriformi co' tre mezzi seguenti.

1 Colla fiamma di una candela.

2 Coll' eudiometro.

3 Colla durata della vita animale.

Sebbene abbia trovato spesse volte incerto il primo, e molto fallace il secondo, qualora però i loro risultati combinino

---

(*a*) Intrapresi pure alcune sperienze col piroforo di *Homberg* introdotto ne' diversi fluidi aeriformi, ma avendo perduta molta della sua attività il piroforo da me impiegato, credei opportuno prima di proseguire dette sperienze di preparare io stesso il piroforo, variando anche l' ordinaria preparazione, e seguendo il metodo del Dott. *Bowlis* rapportato da *Priestley*, ciò che sinora non ho potuto eseguire.

Si è da presumere per altro che i risultati di queste sperienze saranno conformi a quelli ottenuti col fosforo di *Kunkel*, ed a quelli della pietra fosforica Bolognese, con quelle modificazioni per altro dovute alla maggiore o minore intensità nella combustione.

Halles e *Priestley* già sperimentarono gli effetti del piroforo nell' aria comune, e questa ne fu diminuita e flogisticata.

no col terzo, il quale ho sempre considerato come il più sicuro mezzo, credo che sicuri si potranno considerare i risultati ottenuti.

Siccome le sperienze, ch'io passo a descrivere, hanno una stretta connessione con molte altre da me fatte, così per non ripetere molte delle cose dette, prego il cortese lettore di dare una scorsa a due mie Memorie, l' una sopra la respirazione animale nell' aria deflogisticata, la quale trovasi nel Giornale di Fisica (agosto 1784), e l'altra sopra alcune singolari eudiometriche osservazioni sopra l' aria deflogisticata nella quale è morto un animale, e questa trovasi negli Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino (per gli anni 1784 e 1785).

Avanti di passare alle sperienze, mi pare necessario di dare una corta notizia dell' eudiometro di cui mi sono servito, acciocchè meglio possa ognuno ripetere a suo talento quest' esperienze, o concedere quel grado di certezza alle mie.

Un tubo di cristallo di 18 pollici d' altezza, e di un pollice di diametro, diviso in misure eguali alla capacità della boccetta, di cui mi servo per introdurre le diverse qualità d' aria nel tubo, forma lo stromento.

Ognuna di queste misure segnata nelle pareti del cristallo viene divisa in cento parti eguali sopra una mobile scala, che si adatta al tubo.

Incominciava a passare nell' eudiometro (questo sempre ripieno d' acqua piovana ed immerso in una vasca d' acqua) una misura dell' aria da esaminare, indi ne riponeva una d' aria nitrosa, le quali avrebbero dovuto occupare dugento parti, qualora non vi fosse assorzione, indi teneva conto delle parti assorte o sia distrutte, e notava quelle che rimanevano, come qui appresso.

Misure dell' aria ad esaminarsi	Misure d' aria nitrosa	Parti	Assorte	Restano
I.	I.	200		

Ho con questo metodo proceduto ad esaminare l' aria comune e i diversi fluidi aeriformi come qui appresso.

ARIA COMUNE.

L' aria comune, nella quale reſtò un pezzo di fosforo per 3 giorni, eſaminata colla candela, queſta reſtò acceſa come nell' aria comune.

Un paſſero viſſe in queſt' aria un egual tempo, che nell' aria atmosferica.

Eſaminata quindi coll' eudiometro una miſura di detta aria, ed una d' aria nitroſa, cioè 200 parti furono ridotte a 133, cioè a dire ne furono aſſorte o ſia diſtrutte parti 67.

Una miſura d' aria atmosferica pura, ed una d' aria nitroſa, cioè 200 parti furono ridotte a 130, cioè a dire ne furono diſtrutte 70 oſſia $\frac{3}{100}$ di più che nella ſperienza antecedente, il che ſecondo la dottrina ricevuta dimoſtra che l' aria in cui reſtò il fosforo ſi è qualche poco viziata.

ARIA FISSA.

Nell' aria fiſſa ricavata dalla pietra calcare coll' acido vitriolico, dove reſtò un pezzo di fosforo per due giorni,

La candela introdotta ſi ſpenſe, eſaminata poſcia coll' eudiometro, queſta ſomminiſtrò i riſultati ſeguenti cioè:

Una miſura di queſt' aria, ed una d' aria nitroſa, cioè 200 parti furono ridotte a 175, cioè ne furono diſtrutte 25.

Un animale ci viſſe preſſo che a quattro minuti, ed eſplorata l' aria dopo la morte dell' animale colla candela acceſa, queſta ſi ſpenſe.

Per evitare ogni equivoco ho pure eſaminato coll' eudiometro l' aria fiſſa pura di cui mi era ſervito, e riconobbi che una miſura di queſta, ed una nitroſa non fecero la menoma diminuzione.

Meritando queſto fatto importante di eſſere attentamente eſaminato, ripetei la ſperienza avendo laſciato il fosforo nell' aria fiſſa per 4 giorni intieri.

I riſultati furono che queſt' aria non era capace d' alimentare la fiamma.

Eſaminata coll' eudiometro una miſura di queſt' aria, ed una d' aria nitroſa, queſte 200 parti furono ridotte a 160 cioè ne furono diſtrutte 40.

Un paſſero introdotto in una boccetta ripiena di queſt'aria ci viſſe 6 minuti e 30 ſecondi, ed una candela ſi ſpenſe.

Eſaminata queſt'aria dopo la morte dell'animale col mezzo dell'eudiometro, una miſura di queſta ed una d'aria nitroſa, cioè 200 parti furono ridotte a 170, cioè a dire ſolo ne furono diſtrutte 30, il che proverebbe qui, che l'animale ha viziato l'aria di un quarto.

Noi ſappiamo che un animale meſſo nell'aria fiſſa ci muore in pochi ſecondi, e che l'aria fiſſa unita colla nitroſa non produce diminuzione veruna.

Aria Infiammabile.

Nell'aria infiammabile, dentro la quale reſtò un foſforo per due giorni, introdotta una candela, queſta ci arſe alcune volte come nell' aria comune, alcune volte ne infiammò l' aria ſenza che abbia potuto riconoſcere la cauſa di queſte variazioni.

Eſaminata coll' eudiometro, queſta fu notabilmente diminuita. Un animale poſto in queſt' aria ci viſſe molto più, che nell' aria comune.

Parendomi molto intereſſante l' eſaminare queſto fatto, ripetei più volte la ſperienza, e, come diſſi, eſaminata colla candela non ſempre ne infiammò l'aria, ma ſempre però la candela reſtò acceſa.

Eſaminata coll' eudiometro una miſura di queſta ed una d'aria nitroſa, cioè 200 parti furono ridotte a 175, cioè ne furono diſtrutte 25.

Una ſeconda miſura d'aria nitroſa non produſſe più diminuzione veruna.

Diverſi animali introdotti in queſt' aria non ſolo ci viſſero un tempo conſiderabile, ma alcuni un doppio tempo di quello che vivono nell' aria comune.

Eſplorata dopo la morte dell'animale queſt'aria colla candela, queſta ritrovai che alcune volte s'infiammò, altre volte ſi ſpenſe.

Eſaminai quindi queſt'aria dove morì l' animale, una miſura di queſta ed una d' aria nitroſa, oſſia 200 parti furono

ridotte a 165; ne furono dunque assorte 35 cioè 10 di più della stess' aria nella quale non era morto l' animale.

Questo singolare fenomeno, che l' aria dove morì un animale esplorata coll'eudiometro mostri un grado maggiore di salubrità della stessa aria non viziata dalla respirazione, mi sarebbe paruto sorprendente, se già non avessi osservato che l' aria deflogisticata, dove un animale è morto, unita alla nitrosa produce una diminuzione maggiore assai della stessa aria pura (*a*).

Cercando d' indagare la ragione perchè l' aria infiammabile, che è micidiale di sua natura, qualora stia per 48 ore in contatto con un pezzo di fosforo, possa diventare respirabile, ed alimentare la fiamma, non dalla fosforescenza di questa pietra calcinata, ma da' componenti di questa parendomi doversi ripetere; e pensando che questa contiene una specie di fegato di zolfo unito alla terra pesante, mi cadde in pensiero di esaminare l' aria infiammabile dentro la quale fosse riposto un pezzo di fegato di zolfo d' eguale volume e peso del fosforo impiegato.

Riposi dunque in una boccetta ripiena d' aria infiammabile un pezzo di fegato di zolfo d' egual volume del fosforo impiegato.

Dopo 48 ore esaminata l' aria colla candela fu leggiermente infiammata.

Un passero riposto dentro quell' aria ci visse pressochè lo stesso tempo che nell' aria atmosferica.

Esaminata quindi coll' eudiometro, osservai che una misura di quest'aria, ed una misura d'aria nitrosa, cioè 200 parti furono ridotte a 170, così che ne furono distrutte 30.

La stess' aria nella quale morì l' animale esaminata pure coll'eudiometro nella stessa maniera, 200 parti furono ridotte a 160, così che ne furono distrutte 40, cioè a dire 10 di più che nell' aria dove non era morto l' animale; risultati presso che conformi a quelli ottenuti col fosforo di Bologna.

Non devo omettere di far osservare, che nel tempo che

(*a*) Leggasi la citata Dissertazione sopra alcune singolari eudiometriche esperienze (Memoires de la R. Acad. de Scien. de Turin pour les années 1784 e 1785).

il pezzo di fegato di zolfo era appeso per un filo al turaccio della boccetta ripiena d' aria infiammabile, si vide coperto d' umidità, e che cadevano poi di tempo in tempo alcune goccie giallo-rossigne, che altro non erano che la scomposizione del fegato di zolfo operata dalla parte acquosa dell' aria, ma non ho esaminato questo liquore.

Sperimentai pure quale effetto avrebbe prodotto un miscuglio di limatura di ferro con zolfo impastato con poca acqua.

Avendo dunque lasciato per 48 ore nell' aria infiammabile detto miscuglio, esaminatane quindi l' aria colla candela, questa si accese.

Un passero introdotto dentro una boccetta ripiena di quest' aria, morì in un minuto.

Esaminata quindi coll' eudiometro una misura di quest' aria, ed una d'aria nitrosa, 200 parti furono ridotte a 180, così che ne furono distrutte 20.

E l'aria, dentro la quale morì l'animale in sì breve tempo, fu ciò non ostante più diminuita, poichè 200 parti furono ridotte a 173, cosicchè ne furono distrutte 27 cioè 7 di più che la prima.

Aria nitrosa.

L' aria nitrosa (ricavata dalla dissoluzione del ferro nell' acido nitroso), nella quale riposi un fosforo per 48 ore, quando fu aperta la boccetta, che la conteneva, più non parve rutilante coll' aggregazione dell' aria comune, nè più si sentì odore veruno d' acido nitroso, come già dissi.

Introdotta una candela accesa, questa immediatamente si spense.

Un passero introdotto in quest'aria ci visse 2 minuti, cioè a dire qui visse un qualche benchè menomo tempo, quando nell' aria nitrosa sola un animale non conta che 5, o 6 secondi di vita.

Dopo la morte dell' animale la candela si è pure spenta.

Esaminata quindi coll' eudiometro l' aria nitrosa dove stette il fosforo, cioè mescolando una misura d' aria nitrosa pura con una misura di questa, 200 parti furono ridotte a 180, così che furono distrutte 20.

E passando ad esaminare la stess' aria in cui morì l' animale, 200 parti furono ridotte a 175, cioè furono distrutte 25 in vece di 20.

Ripetei più volte questa sperienza, ed i risultati furono sempre conformi ai sopraddetti.

Nella vita degli animali non ci fu variazione che di pochi secondi.

Non provai nemmeno differenza veruna ne' risultati, qualora in vece dell' aria nitrosa ricavata col ferro impiegava quella fatta con l' ottone sia per le prove eudiometriche, sia per riempire la boccetta.

I risultati conformi ottenuti nell' aria infiammabile dal fosforo e da un pezzo di fegato di zolfo mi determinarono a sperimentare qual effetto avrebbero prodotto nell' aria nitrosa.

Rinchiuso perciò un pezzo di fegato di zolfo nell' aria nitrosa e lasciatolo per tre giorni, vidi questo ne' primi momenti ricoprirsi d' umidità, e formarsi delle goccie trasparenti come acqua, le quali cadevano di tempo in tempo.

Aperta la boccetta, penetrantissimo fu l' odore dell' acido nitroso, la candela si spense, ed un animale morì in pochi secondi; esaminata l' aria coll' eudiometro, questa non soffrì che una diminuzione di $\frac{6}{100}$ d' una misura.

Il pezzo di fegato di zolfo, lasciatolo seccare ad un moderato calore, mostrò una confusa cristallizzazione; raccolto questo sale, e gettandone alcun poco sopra un ferro rovente, parte s' infiammò con fiamma cerulea lasciando un odore di zolfo, e parte si fuse con sibilo mostrando di essere un composto di zolfo e di sal nitro.

Le differenze osservate nel miglioramento dell' aria nitrosa ed infiammabile m' indussero ad esaminare quale effetto avrebbe prodotto un pezzo di fegato di zolfo nell' aria fissa.

Lasciato dunque un pezzo di fegato di zolfo rinchiuso per tre giorni in una boccetta ripiena d' aria fissa, indi esplorata colla candela, questa si spense.

Una misura di quest' aria, ed una di nitrosa, cioè 200 parti furono ridotte a 150, così che ne furono distrutte 50.

Un passero introdotto in quest' aria morì in meno di due minuti. Esaminata l' aria dopo la morte dell' animale, una misura di questa ed una d' aria nitrosa, cioè 200 parti furo-

no ridotte a 130, cioè 70 furono diſtrutte, oſſia 20 di più della ſteſs' aria dove non vi fu l' animale.

Aria deflogisticata.

L'aria deflogiſticata ricavata dal nitro, dentro la quale reſtò un pezzo di fosforo per 48 ore, eſaminata colla candela acceſa, queſta di viviſſima luce ſu riſplendente.

Un paſſero meſſo in queſt' aria viſſe tre in quattro volte più che nell'aria comune, cioè un egual tempo, che nell'aria deflogiſticata pura.

Dopo la morte dell' animale la candela ſi ſpenſe.

Un ſecondo paſſero meſſo in queſt'aria, dove il primo morì, viſſe ancora un' ora ed un quarto. Eſplorata dopo la morte dell' animale colla candela, queſta ſubito ſi ſpenſe.

Meſſo quindi un terzo paſſero nella ſteſſa aria, queſto viſſe tre quarti d' ora, la candela ſi ſpenſe pure.

Vidi da queſte ſperienze, che l' aria deflogiſticata, dove reſtò un fosforo, era preſſochè egualmente atta alla reſpirazione animale, come l' aria deflogiſticata pura, ma ſolo era nociva alla fiamma.

Ho dimoſtrato altrove colla ſperienza (*a*), che alcune volte un' aria che è buona e reſpirabile eſtingue la fiamma, ed altre volte un'aria quantunque allunghi la fiamma e la renda vivace, e riſplendente, rieſce mortifera per gli animali, i quali vi muojono in pochi ſecondi (*b*).

Ho particolarmente oſſervato nelle varie aggregazioni da me fatte dell'aria deflogiſticata colle diverſe arie inſette, che in quelle viziate dal vapore del zolfo, dal miſcuglio della limatura di ferro col zolfo, o dal fegato di zolfo, quantunque gli animali nella durata della lor vita ſeguiſſero la ragion diretta della maggior quantità d'aria pura impiegata nel miſcuglio, ciò non oſtante introdotta la candela acceſa dopo la morte dell' animale ſempre ſi ſpenſe.

Ora nel noſtro caſo de' fosfori Bologneſi credo doverne ripetere la ragione dal fegato di zolfo, che ſi trova in eſſi.

(*a*) Diſſert. journ. de Phiſique (aouſt 1784).
(*b*) Mémoires de l' Académie R. de Turin pour les années 1784 1785.

Paſſai ad eſaminare coll' eudiometro codeſt' aria deflogiſticata in cui reſtò un fosforo rinchiuſo, come pure la ſteſs' aria dopo la morte dell' animale: e ſiccome ſappiamo che l' aria pura non vien ſaturata da una ſola miſura d' aria nitroſa, ne miſi nell' eudiometro fino a ſaturazione; ſiccome pure i riſultati ſono anche diverſi dalla diverſa bontà dell' aria deflogiſticata impiegata, eſſendo per così dire impoſſibile di eſtrarla dal nitro, o dalle altre ſoſtanze ſempre allo ſteſſo grado di bontà, così rapporterò le ſperienze fatte con due diverſe qualità d' aria deflogiſticata.

	Miſure d' aria deflogiſticata	Nitroſa	Parti	Aſſorte oſſia diſtrutte	Reſtano	
Primo ſperimento.	I	I	200	135	65	
		I	300	250	50	
		I	400	250	150	cioè ſaturata
	Miſure d' aria deflogiſticata dove ſtette un fosforo 3 giorni.					
	I	I	200	145	55	
		I	300	170	130	
		I	400	270	230	cioè ſaturata
Secondo ſperimento.	Miſure d' aria deflogiſticata pura.					
	I	I	200	125	75	
		I	300	248	52	
		I	400	275	125	
		I	500	275	225	cioè ſaturata
	Miſure d' aria deflogiſticata dove reſtò un fosforo 3 giorni.					
	I	I	200	130	70	
		I	300	225	75	
		I	400	225	175	cioè ſaturata
	Miſure d' aria deflogiſticata dove reſtò il fosforo, e dentro la quale morì un animale.					
	I	I	200	133	67	
		I	300	133	167	cioè ſaturata

Si

Si oſſerva dalla inſpezione della tavola antecedente, che l'aria deflogiſticata in cui reſtò un fosforo, fu maggiormente diminuita nell' eudiometro, che la ſteſs' aria pura, e che quella poi dove morì un animale lo fu maggiormente ancora.

Deſiderando di oſſervare quali riſultati il fegato di zolfo ripoſto nell' aria deflogiſticata avrebbe ſomminiſtrato, due furono gli ſperimenti da me fatti. Mi ſervii in entrambi della ſteſſa qualità d' aria deflogiſticata, ma nel primo l' aria fu eſplorata dopo tre, e nel ſecondo dopo dieci giorni che il fegato di zolfo vi fu rinchiuſo.

Nel primo ſperimento l' aria eſplorata con una candela, queſta vi ardè con viviſſima luce.

Un animale viſſe un' ora circa, cioè a dire (relativamente alla capacità del vaſo impiegato) doppio tempo che nell' aria comune. Dopo la morte dell' animale la candela ſi ſpenſe.

La diverſa diminuzione di queſte arie coll' aggregazione dell' aria nitroſa ſi oſſerva nella tavola ſeguente.

	Miſure d' aria deflogiſticata dove reſtò un pezzo di fegato di zolfo per 3 giorni.	Nitroſa	Parti	Aſſorte oſſia diſtrutte	Reſtano
Primo ſperimento.	1	1	200	45	155
		1	300	80	220
		1	400	120	280
		1	500	160	340
		1	600	200	400
	La ſteſs' aria dove morì un paſſero.				
	1	1	200	55	145
		1	300	90	210
		1	400	120	280
		1	500	135	365
		1	600	140	460
Secondo ſperimento.	Miſure d' aria deflogiſticata dove ſtette 10 giorni un pezzo di ſegato di zolfo.				
	1	1	200	115	85
	Una ſeconda miſura d' aria nitroſa non produſſe più la menoma diminuzione.				
	La ſteſs' aria dove morì un paſſero.				
	1	1	200	40	160
	Una ſeconda miſura di aria nitroſa non produſſe più veruna diminuzione.				

I riſultati della prima ſperienza ſono molto conformi a quelli ottenuti col fosforo di Bologna, colla ſola differenza che nell' aria dove reſtò il fegato di zolfo ſono ſtate neceſſarie cinque miſure d'aria nitroſa per la completa ſaturazione, in vece che nell' aria ove reſtò il fosforo baſtarono tre, la diminuzione della ſteſs' aria dove morì un animale fu anche maggiore nelle prime miſure d' aria nitroſa.

Quanto al ſecondo ſperimento, quantunque ſia ſtata molto diminuita l' aria dove reſtò per 10 giorni un pezzo di fegato di zolfo, ſi oſſerva che la medeſima aria in cui è morto un animale non produſſe una maggior diminuzione coll' aria nitroſa, ma all' incontro eſſa fu minore.

Io ne attribuisco la ragione al più lungo tempo, che vi restò il fegato di zolfo, ed alla quantità d' aria fissa che vi riconobbi nell' agitarla coll' acqua di calce.

Il complesso di queste sperienze ci somministra le seguenti riflessioni:

1. Che i fosfori Bolognesi introdotti ne' diversi fluidi aeriformi ne alterano e ne cangiano la natura.

2. Che rendono atta, per un breve tempo, alla respirazione l' aria fissa e l' aria nitrosa.

3. Che non solo rendono respirabile l'aria infiammabile, per un corto spazio di tempo come le precedenti, ma che la rendono migliore dell' aria comune.

4. Che si osserva una specie di rapporto tra i risultati eudiometrici di alcuni fluidi aeriformi, in cui restò un animale, quando vi sia stato un fosforo, cioè che l' assorzione ossia la distruzione di una misura di queste arie con una d'aria nitrosa è maggiore che nelle stesse arie dove non restò nè il fosforo nè l' animale.

5. Che in tutte le arie nelle quali è morto un animale si produce dell'aria fissa, poichè esplorate coll'acqua di calce sempre vi fu precipitata la terra calcare, il che non succede nelle stesse arie dove restò un fosforo (*a*).

6. Che quantunque diversi fluidi aeriformi siano resi migliori per la respirazione animale mediante il contatto del fosforo, tali però non sembrano, se solo colla fiamma s'esplorano.

7. Che le emanazioni del zolfo sono più nocive alla fiamma, che alla respirazione animale, qualora esse sono frammischiate con altre sostanze aeriformi.

8. Che col fegato di zolfo introdotto nelle diverse arie fattizie s' ottengono de' risultati molto conformi a quelli del fosforo Bolognese.

9. Che i fluidi aeriformi contengono tutti un principio acquoso abbondante, il quale meriterebbe di essere attenta-

(*a*) Senza rapportare in fine d' ogni sperienza la prova fatta coll' acqua di calce, ho giudicato meglio comprenderle qui tutte in questa specie di corollario.

mente esaminato, poichè quest' esame contribuirebbe assaissimo a rischiarare questa scienza ; sopra tutto dopo le nuove teorie della conversione dell' acqua in aria.

10. E per fine resta chiaramente dimostrato 1. che le sperienze eudiometriche sono molto fallaci per giudicare della bontà dell' aria rispetto alla respirazione, 2. che l' arder della candela non è sempre un indizio sicuro della bontà dell' aria per l' economia animale, 3. che le proprietà dell' aria atmosferica sono molto diverse da quelle di tutte le fattizie aggregazioni che si sono finora tentate con i varj fluidi aeriformi per imitarla: verità che ho già altrove con altri sperimenti dimostrate.

Se difficile riuscirà la spiegazione di molti fenomeni da me descritti, e particolarmente perchè l' aria deflogisticata, mediante la respirazione animale o col contatto del fosforo Bolognese, venga maggiormente diminuita nell' aggregazione della prima misura d' aria nitrosa che non fa l' aria deflogisticata pura, avrò almeno moltiplicati i fatti, e scoperte nuove proprietà ne' fluidi aeriformi, i quali potranno un giorno contribuire a formare una ragionata teoria sopra questo nuovo ramo di Scienza.

A D D I Z I O N E

Sopra alcune Pietre Fosforiche.

Avendo consumato nel corso di queste sperienze la maggior parte de' fosfori Bolognesi, e non osando più tentare nuove sperienze con quelli che nelle diverse sostanze aeriformi già furono più volte introdotti, e che avevano perduto in parte la facoltà fosforica, ansioso per altro di continuare, e ripetere le intraprese sperienze nell' aspettativa di nuovi fosfori, che gentilmente mi furono subito spediti da Bologna dal Dott. *Camillo Galvani*, intrapresi di sperimentare, se preparando lo spato pesante nella stessa maniera della pietra Bolognese, l' avessi reso fosforico : feci pertanto a tale oggetto le seguenti sperienze.

Lo ſpato peſante del Rochery in Moriana (*a*) polverizzato, ed impaſtato col bianco d' uovo allungato con acqua, indi calcinato frammezzo a ſtrati di carbone, divenne fosforico: la ſua luce fu viva, ma più bianca che la pietra Bologneſe.

Collo ſpato peſante del Monferrato (*b*) feci de' fosfori ſimili al primo, la di cui luce era viva, ma biancaſtra; aveva queſto fosforo l' odore di fegato di zolfo come quelli di Bologna.

Collo ſpato peſante *et puant* del Rochery nella Savoja (*c*) ottenni de' fosfori con luce più viva de' due primi; l' odore di fegato di zolfo era anche più intenſo.

Cercando d' indagare ſe la fosforeſcenza di queſte pietre dipendeſſe particolarmente dalla terra peſante, che ne è la baſe, oppure dall' acido vitriolico in eſſe combinato, eſaminai

1.° La terra peſante pura; queſta divenne fosforica (*d*).

2.° Lo ſpato peſante rigenerato dalla terra peſante coll' acido vitriolico, il quale divenne fosforico egualmente, e non ſi oſſervò nella loro luce alcuna differenza.

3.° La terra peſante, la quale conteneva qualche porzione d' aria ſiſſa, ed eſſa divenne egualmente fosforica.

4.° La terra peſante pura calcinata con fegato di zolfo, la quale divenne pure fosforeſcente, ma molto meno che la terra peſante pura (*e*).

Dal che mi pareva poterſi conchiudere che nella terra peſante riſiedeſſe ſolo la virtù fosforica. Ma avendo poi conſultato due eccellenti Memorie del Sig. *Margraff* negli atti della Reale Accademia di Berlino (*f*), di cui non aveva no-

(*a*) Scoperto dal Sig. Intendente Cav. di S. Real Corriſpondente della R. Accad. delle Scienze, a cui deve la medeſima molte importanti ſcoperte.

(*b*) Fu queſto ſpato ſcoperto dal Dott. *Bonvicino* Socio della R. Accad. delle Scien. di Torino, alla gentilezza di cui devo le preparazioni della terra peſante per gli ſperimenti qui appreſſo.

(*c*) Queſto ſpato ſi trova nell' iſteſſo monte dell' altro.

(*d*) Ho preparato la terra peſante nella ſteſſa maniera che la pietra Bologneſe.

(*e*) Eſaminai pure la terra degli oſſi, la quale contiene ancora una porzione dell' acido ſosforico, ma queſta non divenne in verun modo fosforica.

(*f*) Tom. 6, 7 pour les années 1749, 50.

tizia, osservai che quel valente Chimico dopo un'esatta analisi della pietra Bolognese ha composti molti fosfori artificiali col mezzo di diverse pietre, e concrezioni calcaree; come pure collo spato fusibile, col *glacies mariae* &c.

Per accertare il fatto, sarebbe necessario di ripetere molte delle sperienze fatte dal *Margraff* e colla scorta delle nuove scoperte fattesi da' Signori *Bergman*, e *Scheele* sopra la terra pesante, esaminare se alla sola sostanza della terra pesante, la quale è spesso frammischiata nelle diverse pietre esaminate dal celebre Accademico di Berlino, deggiasi la proprietà fosforescente; oppure se questa si debba all'acido col quale sono saturate dette pietre, come pensò il *Margraff*.

Il Sig. *Dufay* nelle Memorie dell' Accademia di Parigi (*a*) assicura che tutte le pietre calcaree, o contengano acido vitriolico, o ne siano affatto prive, possono diventare fosforescenti.

Questa opinione sembra coincidere co' pochi sperimenti da me fatti, colla differenza per altro che io gli ottenni colla terra pesante scevra d' acido, ed egli colla terra calcarea,

Io non entrerò in ulteriori discussioni a questo proposito, non essendo questo l' oggetto principale delle mie ricerche: solo mi sono contentato di accennare quanto da me si è fatto (quasi per accidente) per risvegliare forse in qualche Chimico il pensiero di analizzare attentamente da qual principio dipenda la fosforescenza delle diverse pietre, e se questo carattere possa considerarsi come essenziale per far classificare queste pietre in una categoria particolare.

(*a*) Année 1730.

OSSERVAZIONI FISICHE

ISTITUITE

Nell' Isola di Citera oggidì detta Cerigo

Dal Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI Regio Professore di Storia naturale nell' Università di Pavia, e indirizzate

Al Sig. CAVALIERE LORGNA.

LA lontananza, che per sì lungo intervallo mi separa dall' Italia, non può fare ch' io non torni sovente ad essa col pensiero, e che io non conservi viva nel cuore la ricordanza de' miei cari, ed illustri Amici, fra' quali ella, Sig. Cav. ornatissimo, tiene un sì onorevole luogo; e che nel tempo stesso io non sia ricordevole a me medesimo delle promesse a lei fatte prima di lasciare Pavia, cioè a dire di mandarle, durante il mio soggiorno qui in Pera, qualche scritto fisico da pubblicarsi nel Terzo Tomo della *Società Italiana*, ove per ventura io m' abbatta in qualche soggetto non affatto immeritevole di aver luogo in sì splendida, e rispettabil Raccolta. E al certo negare non posso che prima anche di giungere a Costantinopoli siasi a me offerta più d' una opportunità, onde intraprendere qualche nuova, e forse non del tutto dispregevole osservazione: mediante la protezione, e il favore dell' illustre Bailo Veneto, col quale ho avuto l' onore di viaggiare, presso il quale ho l' altro di soggiornare, propensissimo a secondare tutti quei desiderj, che tornar possono a vantaggio della Fisica, e de' geniali miei studj. (*a*) Io qui adunque voglio comunicarle alcune curiosità

(*a*) L' Eccellentiss. Cav. *Girolamo Zulian*, Ministro ragguardevolissimo, che ad un fino gusto per le tre Arti Sorelle, e per ogni maniera di amena, e di scientifica letteratura, accoppia una rara modestia. Non potrò mai esprimere abbastanza quanto io debba a questo illuminato soggetto, al quale finchè io viva professerò la mia più sincera, e più devota riconoscenza.

naturali presentatemisi in viaggio, e nate in certa guisa da uno di quegl' infortunj, cui pur troppo non infrequentemente va soggetto chi naviga il mare. La sera de' 29 settembre prossimo scaduto lietamente da noi veleggiavasi su la nave Bailera nell' Arcipelago, e quando con favorevole maestrale ci lusingavamo in poco più d'un giorno di giungere al Tenedo, un'improvvisa furiosissima tramontana accompagnata da un orrido temporale, sopraggiunta alle due ore della notte, e continuata fino al giunger dell' alba, ebbe poco meno che a perderci tutti. Non già che la burrasca fosse qualcosa di straordinario. Ma la terribile circostanza di trovarci da una parte nelle vicinanze della Morea, e di essere dall' altra nel mezzo d' un bosco d' isole e di scogli, la totale oscurità della notte, che affatto ci toglieva il veder queste terre, la nave che, per non essersi potuto per la repentina violentissima forza del vento ammainar tutte le vele, ricusava di ubbidire al timone, e quindi invece di andare innanzi con la prora, veniva dall' ira del vento, e dai colpi del mare per traverso cacciata, ci mettevano nel più imminente pericolo di fatalmente rompere a qualche terra. Non è di questo luogo il descriverle l' orrore, la costernazione, e diciam anche l' avvilimento, onde fummo compresi, a riserva di ben pochi, degli altri più coraggiosi, tra' quali non si vuol tacere l' Eccellentiss. Bailo, che con universale ammirazione si portò, durante tutta l' orribil tempesta, con imperturbabilità, e fermezza d' animo niente inferiore a quella dei più sperimentati sul mare; e solamente lasciò vedere di non andare esente da quel prudente timore, che in simili traversie non dissimulano gli eroi. Le dirò solo, che a' miei dì non evvi stata notte che paruta mi sia più lunga di quella, nè aurora che sospirato abbia con tanta impazienza quanto la vegnente, la quale in un con le tenebre sgombrò dall' animo costernato i nostri ben giusti timori. Siccome però il vento nord, avvegnachè più rimesso, non desisteva all' indomane di soffiare con empito, noi fummo astretti con la nave a tornare addietro, e dopo l' aver perduto più di cento miglia di cammino già fatto, si diede fondo presso la spiaggia di Citera, dove alcune ore appresso approdò eziandio l' altra nave di guerra, che accompagnava la nostra, ma con gli

gli alberi rotti, e le vele squarciate, e così mal concia per la sofferta tempesta, che si rese inabile a potere seguirci dappoi. L' uno dei due vascelli, che venivano di conserva con le navi, non ci raggiunse, che dopo un tempo lunghissimo, e fummo in timor grande, che fatto non avesse naufragio, dopo l' avere inteso che in quell' orribile notte molti bastimenti eran periti. L' esserci noi dunque ancorati a quella spiaggia, e l' avere dovuto restarvi otto giorni pe' venti alla nostra navigazione contrarj, fu cagione ch' io potessi replicatamente, e in più siti osservare Citera; e tali osservazioni formeran l' argomento di questa lettera.

All' udire, ch' io sono per recarle nuove di Citera, probabilmente ella penserà che tali nuove sieno liete e piacevoli, per partire da un paese, che a giudizio dell' antichità è stato sempre a Venere carissimo. Non dirò io già che vero sia quanto leggiadramente ci narra *Virgilio* intorno all' accorto pensiere di questa amabile Dea, di quivi trasferire Ascanio addormentato, nel tempo che Amore sotto le sembianze di lui lo inviava a Cartagine per innamorare l' infelice Didone. Neppure io so se sussista l'asserzione di altri, che Venere in Citera sortisse i suoi natali, o che, pervenutavi da giovinetta, in tal luogo fermasse sua stanza. Ma a me sembra bene non potersi rivocare in dubbio quanto ci fa sapere Pausania, che parlando di Venere Urania dice, che a' suoi giorni esisteva in Citera un tempio a lei sacro, riputato il più antico, e il più celebre di tutti quelli ch'ella avea nella Grecia, e che in questo tempio rappresentavasi armata la statua della Dea. Quindi, s' io diritto estimo, ne viene che quest' isola allora doveva essere spesso visitata da' forestieri, e per la divinità, che vi presedeva, non potea non esser tenuta in sommo onore da tutti. E però non è a maravigliare se anche adesso il nome di Citera risveglia subito in noi idee gioconde, idee vantaggiose per essa. Ma se creder dobbiamo che una volta salita fosse a tanta riputazione, io posso dirle con tutto il candore, che presentemente non ne conserva che il nome. Del tempio sì famoso non apparisce più vestigio di sorta. Si ignora pur anche il sito dove esisteva. Solamente da' pescatori si mostrano sulla spiaggia in luogo poco distante da quello dove si gittò l' ancora i bagni di

Venere (*a*). Ma che ſono mai coteſti bagni ? Un rozziſſimo anguſto cavo lavorato dall' arte dentro una rupe, con qualche apparenza di ſolajo formato di pietre, ſenza che quivi ſtagni o gema la più picciola quantità d' acqua, e che ſembra più che altro un chiuſo per garantirvi dalla pioggia il minuto armento. Nè l' iſola ſi può chiamare punto delizioſa, nè tollerabilmente ferace. Qui il clima è a vero dire aſſai dolce e ſoave, eſſendo voci ignote ghiacci e nevi nel verno. Qui evvi paſſaggio grande di quaglie ne' meſi d' agoſto, e ſettembre, ed io a tempo vi giunſi per potere guſtarne di quelle, che furono più tarde a pervenirvi, e le ho trovate ſaporitiſſime. E' probabile, che da queſt' iſola tragittino a dirittura alle coſte dell' Africa. Ma di primavera ritornando in Europa battono altra ſtrada. Non così è delle tortore, che due volte l'anno, cioè in ſettembre ed in marzo, fanno la loro comparſa in Citera quantunque meno aſſai numeroſe delle quaglie. Ma queſti uccelli di paſſaggio qui ſi arreſtano ſoltanto alcuni giorni, più per una ſpecie di neceſſità, cioè a dire per trovarvi un punto d' appoggio, onde dar bando alla ſofferta ſtanchezza, e così prepararſi a valicare tratti più lunghi di mare, che per trovarvi l' eſca a loro proporzionata, eſſendo l' iſola ſopra ogni credere ſteriliſſima. Delle quattro parti ſi può dire che tre ſono nudo ſcoglio. E quella porzione ancora, che dai coloni viene coltivata, ſiccome riſtrettiſſima, non produce che poco grano, e poche uve, l' uno e l' altre però di eccellente qualità. Quindi è che gli abitanti mal grado l' ampiezza dell'iſola, che in giro s' eſtende a ſeſſanta miglia, trovano appena di che ſuſſiſtere nelle produzioni che qui raccolgono. E però non è a ſtupire, ſe ne' tempi addietro Citera dir potevaſi la Siberia de' Veneziani, dove cioè veniva rilegata la feccia della nazione.

Le notizie fin qui eſpoſte, quantunque in sè non diſutili, non ſono però quelle per cui ora le ſcrivo. Quattro oggetti hanno per preferenza fiſſata la mia attenzione, e mi ſono paruti meritare quella del pubblico: ſottoponendoli però prima al

(*a*) La ſpiaggia preſſo cui approdammo ſi denomina S. Niccolò.

ſavio giudizio di lei, che oltre l'eſſere arteſice ſovrano nelle Matematiche, è giudice abiliſſimo nelle Scienze naturali. Entro adunque ſenza più nell' eſpoſizione di queſti oggetti, e le dico di avere ſcoperto, 1. che l' iſola di Citera è vulcanica, 2. che nelle materie vulcaniche, che la compongono, ſi trovano incaſtrati moltiſſimi oſtraciti d' inſigne grandezza, e più pettiniti, gli uni e gli altri mirabilmente petrificati, e niente dalla violenta azione del fuoco pregiudicati, 3. che un' intiera montagna è piena d' oſſa umane e belvine impietrite, 4. che un lato dell' iſola preſenta una ſotterranea grotta rabeſcata, e adorna di materie ſtalattitiche molto curioſe, e molto iſtruttive. Eſaminiamo a parte a parte queſti fenomeni.

I. La maſſima parte dell' iſola riſulta, come già diſſi, di nudi ſcogli. Ciò ſi ſcorge prendendoſi la pena di ſcorrerla in molti luoghi. Queſti ſcogli non ſi poſſono veder meglio, e nella maggiore loro ampiezza, e in ſito più adattato ad eſpiarne l' interno, quanto eſaminandoli davvicino ſul mare. Quivi appariſcono a guiſa di muraglie di ſtraordinaria altezza, per lo più perpendicolari all' orizzonte, le quali continuando con le parti di dentro dello ſcoglio vengono a produrre enormi montagne. La perpendicolarità è nata, a mio avviſo, da' violenti colpi di mare, che dal battere continuo corroſe avendo le parti più baſſe degli ſcogli, hanno obbligato le più alte e pendenti a cadere, giù ſtraſcinate dal proprio peſo. Queſte verticali muraglie non preſentano alla viſta quell' ordine di ſtruttura, che è ſtato da me oſſervato in diverſi altri ſcogli che attorniano il mare, ed in quelli ſopra tutto, che circondano il famoſo golfo della Spezia, o che ſono littorali alle due riviere di ponente e levante di Genova. Colà gli ſcogli e le montagne ſono un compoſto di ſtrati ſoprappoſti a ſtrati, di groſſezza, di andamento, d'intreccio, di compoſizione diverſi (*a*). Somigliante tenore di ſtruttura è ſtato da me notato a Corfù, e al Zante in mol-

(*a*) Veggaſi la mia ſeconda lettera relativa a diverſi oggetti foſſili e montani, ſtampata nel Tomo ſecondo della *Società Italiana*, e riprodotta negli *Opuſcoli ſcelti* di Milano.

tissime di quelle rupi lapidee e scoscese, che soprastanno al mare. Ma non si ravvisa il più picciol segnale di strati ne' monti, e negli scogli di Citera. Sembran tutti formati d'un pezzo senza avere tante volte ne' loro componenti la più picciola sensibile differenza. Solamente le loro parti pare che sieno state insieme unite tumultuariamente da un principio agente affatto irregolare. Ma non si può esprimere quanto informi, quanto orridi sieno quegl' immensi gruppi di montagne e di scogli: oltre al non permettere l' appigliarvisi sopra vegetabili di sorta, non offrono alcun piano, alcun declive, ma si sollevano pressochè tutti in angoli, e in punte aguzze, cosicchè tanti in certa tal guisa somigliano infinitamente in grande ad una pina, che dopo l' essere stata esposta al sole, per l' aprimento delle sue cellette si rende tutta quanta armata di punte. Il color dominante è il rosso, più o meno carico, più o meno sbiadato. E di qui penso nato l' equivoco di qualche antico scrittore, che forse per nobilitare vie più quest' isola a Venere sacra ha decantati i suoi monti sopraricchi di porfidi. Non evvi favola più favolosa di questa. In genere di pietre vetriscibili, e di altre analoghe io non vi ho trovato che alcuni pezzetti di diaspro, de' quali cadrà meglio il destro di ragionare più sotto. Senza fallo il color rosso, comune alla maggior parte dei porfidi, e ai siti scogliosi e montuosi di Citera, avrà imposto a questi scrittori. Cotal rosso fiorisce il più su pietre margacee, ed esaminato ben bene, comincia a far sospettare che tali pietre sofferta abbiano l' azione del fuoco. Almeno in vicinanza de' vulcani non rade volte si trovano pietre, o terre tinte di quel colore; e allorchè feci questa prima osservazione in Citera, mi vennero alla mente alcune scorie vesuviane, che si conservano nel pubblico Reale Museo di Pavia, somigliantissime nel rosso alle nostre. Il mio sospetto andò poi crescendo, e si fece in fine una pruova completa dai seguenti fatti. 1. In alcuni luoghi dell' isola rompendosi co' picconi diverse pietre per far calce, replicatamente ho potuto osservare, che nella corteccia, ed anche in qualche parte del loro interno sono mezzo calcinate, cosicchè con la punta d'un coltello, ed anche talvolta con l' unghia si rompono o radono; e quivi appajono cenerognole; il nocciolo poi, che è

d'un berrettino livido, e che trovasi di molto più duro, non è punto calcinato. 2. Frequentissime sono le pomici quivi osservate. Mai o quasi mai non si trovano sparse sul suolo, ma sono aderenti ai monti, e agli scogli, o a parlare più filosoficamente, vengono a formare una porzione di essi. Manifestano ben chiaro i principali caratteri di questo poro igneo. Sono porosissime, aspre al tatto, mezzo bruciate, poco o nulla muovonsi dagli acidi, e alcune si osservano leggiere in modo, che non vanno al fondo dell' acqua marina. Queste pomici risaltano sopra tutto da certe corrose cavità qua e là sparse nelle montagne, tanto in quelle che torreggiano sul mare, quanto nell'altre che s'internano nell' isola. 3. A chi con riflessione mira con l' occhio e pondera con la mente questi luoghi deserti, si disascondono le aperte vestigia de' già spenti vulcani. Nel picciol viaggio da me fatto per visitare la caverna, di cui più basso dovrò parlare, mi si presentarono tre bocche o crateri, che avevano tutta l' apparenza di avere un giorno vomitato fuoco. Oltre al color rosso, e alle pomici quivi più spesse, avevano attorno in più d' un luogo ammassamenti di materie, che dal più superficiale esame fattovi attorno non ismentivano la natura di lave. Sono di quelle già state in buona parte fuse, e che hanno un aspetto tra il terreo e lo scoriaceo. Livido oscuro si è il loro colore. Rompendone alcune ed esaminandole in più luoghi, parte si trovan formate d' una pasta omogenea, e parte di altra eterogenea, la quale merita d' essere brevemente descritta. Oltre a buon numero di pagliette micacee, che vi luccicano dentro, questa qualità di lava eterogenea è un composto di pietruzzole nericcie, amorfe, le più piccole appena discernibili dall' occhio ignudo, le più grandi niente maggiori d'un granel di pepe; che mostrano chiaramente di avere sofferto un grado di fusione, senza però avere del tutto perduta l'irregolare lor forma. Oltre a queste ve ne sono delle più grandi, di figura tondeggiante, ma più o meno calcinate. E tanto le prime pietruzze quanto le seconde vengono avvolte ed inzeppate da una sottile materia lapidea, la cui natura coll' occhio solo non è conoscibile. Ma gli acidi minerali danno a vedere, ch' essa è margacea, sì però che l' argilla viene superata d' un terzo cir-

ca dalla calce. Le pietruzze piccole e grandicelle testè menzionate sottoposte alla medesima analisi offrono gli stessi risultati. Ed il simile si vuol pur dire di quelle lave, che ricevuta avendo maggiore cottura sono di pasta omogenea. Queste ultime però non sono state da me trovate, che attorno ai tre mentovati vulcani. Ma le lave eterogenee, quelle che dimostrano avere meno sofferta la forza ignea, sono prodigiosamente abbondanti in Citera.

Per tutte queste pruove vede adunque l'occhio perspicace di lei, Sig. Cavaliere pregiatissimo, vero essere quanto in primo luogo ho asserito, cioè a dire questa tanto celebrata isola esser vulcanica. A pienamente persuaderne chi leggerà questa lettera, mi è piaciuto di esporle con qualche dettaglio. Per altro chi è conoscitore di queste materie, ed ha veduto vulcani o spenti, o che ardono, oppure in qualche naturale Museo ha studiato le pietre vulcaniche, e dall' abitudine ha avvezzo l' occhio a conoscerle senza equivoco, e a distinguerle dall' altre che non sono tali, al primo metter piede in Citera, massime dalla spiaggia dove noi ci arrestammo, si accorge subito di questo fatto della natura: e per tale è stato altresì tostamente conosciuto dall' Eccellentissimo Bailo, per quella sperimentale cognizione da lui acquistata negli eruditi suoi viaggi al Vesuvio, e in altri siti vulcanici presso Napoli.

Di sopra ho detto trovarsi in Citera qualche picciol diaspro. Questa pietra ha un misto di verdognolo e di rosso, e si trova in pezzuoli staccati e sparsi sulle montagne, oltre a qualche ciottoletto alle sponde del mare, ritondato dall' agitazione dell' onde. Diversi poi di questi pezzi dalle contratte screpolature, per cui facilmente si rompono, e dai perduti colori non oscuramente danno a conoscere di avere provata la presenza del fuoco.

II. Entriamo adesso a parlare del secondo fenomeno, che risguarda i testacei rinchiusi o aderenti alle materie vulcaniche. Da noi è già stato accennato esser questi ostriche e pettini. I secondi non si veggono tanto frequenti, e la loro grandezza è mediocre. Le prime sono numerosissime, e dire si ponno di statura gigantesca. La lunghezza in alcune oltrepassa i nove pollici, e la larghezza s' estende al mezzo pie-

de. La grossezza vuole altresì esser notata, che arriva più volte ad un pollice e mezzo. Ne' pettini non ho mai trovato le due valve insieme unite, e come si veggono quando sono abitate dall' animale. Non così dell' ostriche, diverse delle quali sono in contatto con le due valve, e la cerniera connette e lega strettamente l' una con l' altra. Di queste ne può veder una di mezzana grandezza rappresentata nella Tavola dalla Fig. I. dove appajono le due valve di volume diseguale, come appunto è proprio d' un tal genere di testacei. Mirasi di profilo la valva maggiore piena di crespe, e come embricata. Nei molti e diligenti esami fatti attorno a questi testacei, mi sono sempre appariti nel maggior grado petrificati, senza manifestare il più picciolo indizio di calcinazione, o d' altro vizio o lesione sofferta per l' azione del fuoco.

Questo doppio genere di conchiglie occupa differenti siti nella pietra vulcanica. Ve n' ha taluna aderente alla sua superficie, e che subito si presenta alla vista dell' osservatore. Ma ve ne sono altre nascoste dentro di essa, e che in conseguenza non si manifestano, che spezzando la pietra, e queste sono in numero molto più grande delle superficiali. Ove la mano operi con qualche destrezza, se ne estraggono molte d' intiere, ed in tutte le loro parti benissimo conservate. Ve n' ha però altre, che avuta anche questa avvertenza, si scoprono rotte, anzi vi sono più massi, che in buona parte non risultano che dei loro frammenti.

Il fenomeno del trovarsi testacei petrificati su i monti, e dentro di essi, non ha niente di nuovo, niente di singolare in natura; che anzi questo è un fatto frequentissimo ad osservarsi, e di esso son pieni i libri de' naturali Scrittori. Ma a me sembra ben nuovo, e affatto singolare che v' abbia testacei intatti dentro alle pietre vulcaniche; nè io so se da altri sia mai stato osservato simil fenomeno. E di vero sembra inconcepibile come l' azione del fuoco alterando più o meno le terre e le pietre, fino a produr in esse un grado di vetrificazione, non abbia pur danneggiato i testacei col calcinarli, e col ridurli anche in polvere, come si osserva nel fuoco ordinario. Che se l' erudita curiosità di lei mi chiedesse, come qui dunque è ita la cosa, io non esiterei un momento a con-

fessarle la mia ignoranza, e solamente a guisa di dubbio o sospetto io le esporrei come concepisco che andata sia la faccenda. Due, a mio avviso, esser possono le ipotesi intorno ai vulcani di Citera; o che questi hanno esercitato il loro potere nell' isola già preesistente, ovveramente che è stata da essi prodotta. Nella prima ipotesi fa mestiere supporre che quando il fuoco ha agito nell' isola, si trovassero già in questa i testacei, essendo affatto inverisimile per non dir repugnante, che quell' agente struggitore ve gli abbia recati. Ma in questa supposizione io non so capire come i più non sieno stati distrutti, e gli altri notabilmente alterati, talchè questi non manifestino anche adesso evidenti segni di calcinazione più o meno inoltrata. Vero è che non si trovano mai attaccati o seppelliti nelle pomici, e nelle lave perfette, dove cioè le materie hanno provata la piena fusione del fuoco, ma in quelle soltanto, che ricevuto hanno un primo grado di cottura. Tuttavia io non comprenderò mai come questo grado, che è stato abile a cagionare un principio di fusione nelle pietre, non abbia più o meno danneggiati questi corpi calcari. Nell' altra ipotesi poi a me parrebbe il fenomeno di non sì malagevole spiegazione. Suppongasi adunque che Citera sbucata sia dal mare in grazia d' uno o più vulcani. I fuochi sotterranei adunque cominciato avendo con immensa forza ad agire sotterra, avranno a poco a poco sollevato il fondo del mare, sul quale par naturale che si trovassero quelle due qualità di conchiglie, le quali in conseguenza si saranno sollevate esse pure, e saranno uscite dall' acqua all' uscirne dell' isola stessa. Il fuoco poi non avrà potuto recare ad esse sensibile oltraggio, per esserne stata rintuzzata la forza dall' elemento dell' acqua, non ostante che nelle parti interne di que' grandi aggregamenti di terra, che hanno servito alla formazione dell' isola, abbia proseguito ad agire, e quindi a sollevare gli aggregamenti fuori dell' onde marine fino ad una data altezza. Ne abbiamo un parlante esempio nell' ostriche niente pregiudicate dal fuoco avvegnachè trovate su la nascente *Isola nuova*, quando nel 1707 per l' azione d' un vulcano attualmente usciva dall' Arcipelago. Vero è che dagl' indicati indizj di vulcani spenti nell' isola sembra non potersi negare, che l' attività del fuoco siasi esercitata

fercitata per qualche tempo fulla fuperficie pofteriormente alla fua formazione. Ma vero è non meno, che dove efiftono quelle bocche vulcaniche, non efiftono conchiglie, le quali tutte fono raccolte, ficcome ho detto, dove la potenza ignea è ftata minore. Ma in quefta ipotefi le oftriche e i pettini quando ufciron dell'acque erano nel loro ftato naturale, non in quello di petrificazione, ficcome fono al prefente. Quefto cangiamento facilmente fi fpiega fol che riflettafi, che reftate effendo feppellite dentro la terra, i fucchi lapidifici, che cangiato hanno quefta in pietra, hanno fatto il fimile per rapporto ai teftacei; e gli acidi comprovano in effetto effere la loro petrificazione calcare, voglio dire della natura delle pietre, dentro cui fi trovano avvolti.

Non ho omeffo d' interrogare gli abitanti di Citera, e in ifpecie i pefcatori, fe quel tratto di mare, che attornia l'ifola, dà ricetto a pettini e ad oftriche fimili alle trovate fra le materie vulcaniche, e la rifpofta concordemente è ftata negativa. Quindi argomentar fi potrebbe, che le fpoglie di quefti animali foffero piuttofto di paefi ftranieri, e che quivi fieno ftate recate dal mare. Senza negare la poffibilità della cofa io crederei più naturale il penfare, che in tempi rimotiffimi moltiplicaffero in quel fondo di mare cotefti viventi, ma che coll' andar del tempo fiafi perduta la razza, o perchè diftrutta affatto dagli uomini, o perchè mancati gli alimenti atti a nodrirla, o per qualunque altra a noi fconofciuta cagione. Volendo noi confultare i viaggiatori filofofi, e gli ftorici più accreditati, non mancano efempli di fatti confimili, e voglio dire di pefci, e d'altri animali acquajuoli, che una volta venivan pefcati in certi tratti di mare, o in certi fiumi e laghi, quantunque oggidì in quei luoghi fteffi non fe ne prenda pur uno. E la medefima cofa ha pur luogo negli animali terreftri. Un efempio valga per tutti, tratto dalla fteffa Citera. Non fono più di trent'anni, che, per atteftazione di quegl' ifolani, i fuoi monti più elevati abbondavano di groffi avoltoj, che davano gran pena ai paftori, per predare gli agnelli allora quando in que' luoghi pafcolavan le greggie; e che fino all' offa fpolpavano le pecore, i cavalli, i buoi, fe qualcuno di tai quadrupedi per malattia perito veniva abbandonato fu qualche luogo deferto. Eppure

adesso per loro asserzione non si trova pur uno in tutta l'isola di questi ingordi e sozzi volatili. E perchè adunque lo stesso non può essere accaduto ai pettini, e all' ostriche, di cui ora parliamo? Tanto più che i testacei di queste specie, se a mancar vengano in un sito, non possono essere surrogati da altri più lontani; non essendo come i pesci, che col beneficio del nuoto si trasferiscono agevolmente da luogo a luogo nell' acque dolci o salsugginose: ma i nostri testacei si possono chiamar prigionieri di quel punto di spazio su cui sono nati, restando ivi eternamente fissi, nè avendo altro moto che quello di aprire, e di chiudere la crostosa loro casetta.

Tolta di mezzo questa difficoltà che mi poteva esser fatta, la sincerità mia non mi consente il dissimularne un' altra, o almeno di toccare un quesito, che nel leggere la mia lettera verrà a lei probabilmente in animo di propormi. Questo si è, se io abbia fondamento di prove, che i fuochi sotterranei, piuttosto che d' essere usciti dall' isola già esistente, l' abbiano generata eglino stessi, mentre il fenomeno delle conchiglie, che meglio s' intende nella seconda supposizione che nella prima, non è per un Filosofo una prova di questa generazione.

Su questo oscurissimo punto io le esporrò quelle leggieri conghietture, che fatta mi hanno preferire tale opinione. In più luoghi ho voluto espressamente su d' una barchetta costeggiar l' isola, per vedere se que' monti e quelle rupi, che nascondonsi nel mare, finiscono d' esser vulcaniche prima di arrivarvi; ed ho sempre trovato che continuano ad esser tali anche sott' acqua, fin dove può giunger la vista. Tal cosa io ho potuto nettamente osservarla tanto in que' dirupi che verticalmente s' internan nell' acque, quanto in quegli altri che piegano, e formano dentro al mare un piano inclinato. Un tal fatto mi ha dunque indotto a credere, che i fuochi sbucati sieno di sotto al mare, e che sollevati v' abbiano que' gran cumuli di terra convertitisi in seguito in pietra, i quali parte s' inalzan sull' acque, parte si occultano nel loro seno. Quasi sul principio di questa lettera si è notato, che i monti e gli altri luoghi dell' isola non sono a strati, ma rappresentano come un gran tutto, le cui parti han-

no l' apparenza d' essere state insieme accozzate da una cagione affatto irregolare. E tal cagione io non saprei meglio rinvenirla che nel fuoco, che con moto violento e tumultuario balzando all' insù l' isola, non le abbia conceduto di venir formata di strati, o suoli, come si osserva nella più parte delle montagne. L' esempio d' altre isole dell' Arcipelago prodotte da vulcani mi ha fatto vie maggiormente prediligere questa ipotesi. Riferisce *Strabone* (la cui autorità ne' racconti della Grecia è di sì gran peso) che al suo tempo fra le due isole Terasia, e Tera era già uscita dal mare un' isola di dodici stadj, prodotta da sotterranei fuochi; e che in seguito i Rodiani approdarono a quest' isola, e vi fabbricarono sopra un tempio dedicato a Nettuno (*a*). L' isola nuova testè accennata riconosce ella pure la medesima origine vulcanica, ed è molto probabile che dallo stesso principio sieno state una volta prodotte l' altre due isole, che tengono in mezzo la nuova, cioè la piccola, e la grande *Cammeni*, denotando appunto questo greco vocabolo, quantunque corrotto, *bruciata*. Per le osservazioni da me instituite in altri luoghi di questo mare io avrei con che abbondantemente confermare il mio assunto; ma queste notizie fisiche unite ad altre diverse mi riserbo a miglior tempo di renderle pubbliche.

III. Intanto facciam parola del terzo fenomeno, ch' è quello dell' ossa fossili. Queste alla maniera de' testacei hanno un sito determinato dove esistono, che è un' erta montagna fatta a cono troncato nell' apice, situata al mezzodì dell' isola, e posta in vicinanza del mare, lontana poco più di mezzo miglio dalla città, o piuttosto dal meschino villaggio, che ritiene il nome dell' isola, e diciassette miglia dal luogo dei testacei. Dove cominciano l' ossa la montagna ha il giro d' un miglio, e di lì andando fino alla sua cima non evvi parte tanto alla superficie, quanto nel suo interno (fin

(*a*) *Inter Theram, & Therasiam e pelago prorupere flammæ, quæ per dies quatuor mare totum æstuans atque ardens reddiderunt. Tum educta altius sensim velut machinis insula, & ex fluitantibus terris composita exhalavit, quæ duodecim stadiorum circuitum continet. Inde cessante casu, tum imperantes mari Rhodici primum capta fiducia ad locum navigantes, templum Tutori Neptuno in insula ædificarunt. Lib. 1.*

dove almeno ſi può ſcavare) che non ſoprabbondi di queſte ſpoglie animali. Gli abitanti ſteſſi chiamano un tal ſito *la montagna dell' oſſa*. Con picconi ed altri arneſi ne ho fatto trar da più parti, cercando, quando ho potuto, di averle unite alla matrice petroſa, dentro cui ſono immerſe, curioſo di ſapere a qual genere di animali appartengano, quale ſia il loro ſtato, e quello della pietra a cui ſono legate. Non evvi ſtato meſtiere di molto ſtudio per conoſcere che la più parte ſono umane. Credo di averlo potuto chiaramente comprendere da alcune falange delle dita, da qualche pezzo di radio e di tibia. L' eſatta convenienza di queſt' oſſa con le naturali trovata nella ſuperficie, nella grandezza, e figura, nella ſoſtanza, e direzione delle parti, non ce ne laſcia, a mio avviſo, dubitar punto. Di più il medico condotto di Citera, uomo che per una certa ſemplicità di coſtumi, e naturale ingenuità, mi è ſembrato degno della maggior fede, mi aſſicura di aver veduta ſcavata da quel monte una mandibola umana corredata de' ſuoi denti, e un pezzo di cranio umano con le ſuè diſtinte ſuture. Ho detto che la più parte di coteſti oſſi appartengono alla noſtra ſpecie, per indicare che alcuni ſono belvini, quantunque non abbia potuto conoſcere di qual genere ſieno di animali, e ſolamente ſono determinato a credere, che appartengano piuttoſto a quadrupedi che ad altri viventi. Il loro colore sì all' eſterno che nell' interno è bianchiſſimo a riſerva di andare talvolta offuſcata la ſuperficie di macchiuzze dendritiche, come ſpeſſo ſi oſſerva ſu le lamine o ſtrati che compongono l' avorio foſſile. Non ſono punto calcinati, ma interamente impietriti; quindi hanno la durezza, e il peſo delle pietre. Le oſſa ſpugnoſe conſervano la naturale ſpugnoſità, e le fiſtuloſe l' interno lor cavo. Coteſto cavo non è mai riempiuto da materia terroſa, molto meno dalla propria midolla impietrita, ſapendoſi già che le parti animali dotate di molta mollezza, come la midolla dell' oſſa, non vanno mai ſoggette ad impietramento, per la troppa facilità d' infracidare, e guaſtarſi. E per la ſteſſa ragione non è a domandare, ſe nell' eſame de' teſtacei nell' antecedente articolo mentovati mi ſia abbattuto in qualcuno corredato del ſuo oſpite petrificato. Rompendo minutamente alcuni groſſi pezzi di pietra dove

annidano l' ossa, vi si trovano dentro seminate per tutto, altre intiere (queste però assai scarse), altre spezzate, altre ridotte in minuzzoli. Nella figura II. sta di profilo espresso al naturale un osso rotto, e rinchiuso nella sua petrosa matrice, e nella figura III. il medesimo osso mirato di prospetto. Tanto la pietra matrice che l'ossa partecipano della natura calcare; e la prima talmente serra, e quasi dissi ferrumina le seconde, che a formar vengono un corpo solo, e da questa fortissima adesione ne viene la somma difficoltà di staccarle intatte dalla matrice. Si fa dunque chiaro che quest' ossa, non altrimenti che i descritti testacei, sono state una volta inviluppate e sepolte in una molle terrosa materia, la quale dal petrificarsi che ha fatto, cagionato ha lo stesso effetto sull' ossa. Si è anche in qualche sito cavernoso conformata in piccioli ed eleganti cristalli spatosi, che a queste petrificazioni conciliano bellezza maggiore.

Ma qui trovo un divario rilevantissimo tra la sostanza lapidea, che imprigiona i testacei, e l' altra che imprigiona le ossa; ed è che quest' ultima non fa conoscere il più picciolo indizio d' esser vulcanica. E' un composto d' una pasta margacea indurita, giallo-rossigna, e di picciole pietre altresì margacee, quantunque tal pasta sia talvolta solitaria. Questo composto non ha niente di simile per ciò che appartiene ai contrassegni del fuoco nè con la pietra a testacei, nè con ciò che di caratteristico si osserva nell' altre pietre vulcaniche. Non è mai ch' esso apparisca in qualche parte fuso oppur calcinato.

Ma qual fisico agente trasportò mai su quella montagna tanta moltitudine d' ossa? ed essendo la più parte umane, come e d' onde si sono raccolti in un luogo solo tanti individui della nostra specie? S' ella, Sig. Cavaliere ornatissimo, mi facesse mai queste domande, le risponderei che se molti capi di questa lettera le ho finora scritto con mano tremante per l' arduità somma della materia, il timore a più doppj in me ora si accresce, accorgendomi di doverle dir cose, che poco soddisfacendo me stesso, molto meno saranno per soddisfare il virtuoso suo genio. Ciò nondimanco m' accingo ad ubbidirla lusingandomi che presso me potrà valere di qualche scusa l' oscurità del soggetto. Essendo l' ossa dentro a mate-

rie non sottoposte agli ardori del fuoco, sembrami che potrebbe egualmente intendersi come si trovano su quel monte e nel suo interno, tanto supponendo che esistessero prima sul fondo di mare dove ora è Citera, e che sieno state in alto sollevate al formarsi dell' isola, quanto immaginando che alla medesima già formata siensi unite e mescolate in appresso. Solamente ad ispiegare l' impetramento dell' ossa d' uopo sarebbe in entrambi i casi supporre che le medesime non sieno rimaste a fior di terra (poichè allora esposte all' azione dell' aria, e delle meteore si sarebbero insensibilmente scomposte e distrutte); ma sibbene che sieno state profondate e nascoste nella terra molle, dalla quale restando a poco a poco penetrate, sieno passate dallo stato animale al lapideo. Di fatti cosa richiedesi perchè un corpo, sia vegetabile, sia animale, passi alla condizione di pietra? Niente altro, a giudizio mio, se non che dall' acqua, onde rimane sotterra penetrato, venga spogliato delle parti fluide saline ed analoghe, ritenuto soltanto il tessuto consistente fibroso; che gli spazietti lasciati vuoti dalle accennate particelle già uscite, vengano riempiuti dalla terrestre glutinosa materia petrificante; e che tal materia a poco a poco si dissecchi, ed induri.

Se si dovessero ascoltar gl' isolani, converrebbe dire che dove adesso esiston le ossa, una volta vi fossero i cimiterj del paese. Questa almèno è l' opinione universale, la qual però a me non quadra per più ragioni. Primieramente osservo che i cimiterj, quantunque d'antichissima origine, sogliono essere disadatti alla petrificazione dell' ossa. A comprovare la mia asserzione potrei recare in mezzo più fatti, ma per servire alla brevità mi contenterò di due soli. Giunti essendo noi li 12 ottobre con la nave Bailera in faccia al principio dell' Attica, alla distanza di 21 miglia da Atene, nè potendo per un forte rovajo proseguire il viaggio, si gittò l' ancora presso al *Capo Colonne*, che è un Promontorio così chiamato per 14 bellissime colonne di marmo, piantate sulla sua cima, le quali sono l' avanzo di un tempio famoso, per detto di Pausania e di altri, consecrato a Minerva Suniade, la qual Dea portava tal nome da quel Promontorio denominato Sunio. Intendentissimo, siccome è, d' ogni bell' arte S. E. *Zulian*, recatosi sul luogo in compagnia di me e di altri pochi, ol-

tre l' aver fatto prendere il disegno di quel prezioso resto di antico sabbricato, ordinò anche di far ivi scavare in più d'un luogo, se mai qualche bassorilievo, od altrettale nobil pezzo si fosse per avventura disotterrato. Ma l'esito non corrispose al lodevole suo desiderio; ed in quella vece ad una data profondità non si cavaron che ossa umane, e tra l' altre una tibia intiera e qualche cranio. Erano nello stato naturale di ossa senza apparire punto petrificate. Non è già verisimile che fosser d' uomini ivi sepolti allorchè quel tempio era da' Greci tenuto in grande venerazione; penserò piuttosto che succeduto ciò sia in tempi assai posteriori, e de' Greci cristiani, che convertendo nel proprio lor culto quel tempio, dessero dentro di esso sepoltura a' defunti. In tal supposizione, che a me pare ragionevole, egli è al certo qualche migliajo d'anni che esistono nel Promontorio sotterra quell'ossa, senza avere contratto un primo principio d' impietrimento, per mancare le condizioni a questa metamorfosi necessarie.

Ma io posso fornirle l' esempio d' una serie d' anni maggiore, e tuttavia inetta alla petrificazione dell' ossa ne' cimiterj. Parlo di quelle recentemente scoperte nel Ducato di Modena, e nominatamente nel territorio di Scandiano. Quivi adunque alla profondità di più piedi smuovendo il suolo, si scopre in certi luoghi una terra nera soffice e sbriciolata, che per esser margacea è un eccellente ingrasso pei prati, e pe' campi. Questi tratti di terra, che non sono però di molta estensione, nè molto profondi, rinserrano più urne, la più parte spezzate, con ossa umane dentro, oltre a molte altre ossa congeneri di mezzo a quella terra disseminate. Tra la medesima si osservano pure molti carboni non fossili, ma di legna bruciate, o come diciam di fornace. Chi ha qualche notizia delle usanze romane relative ai defunti, facilmente comprende il resto. Quell' ossa dunque erano le reliquie de' cadaveri, le quali con certe misteriose cerimonie si collocavano dentro dell' urne, ed in alcuni determinati siti si riponevan sotterra. Siccome poi non poche si trovano anche fra la terra disperse, è d' uopo dire che non tutte si rinchiudevan nell' urne. Egli è noto che la qualità dell' urna, cui si affidavano l' ossa, soleva essere proporzionata alle facoltà di quelli, a' quali apparteneva il defunto. Se ricchi, quel

funereo arnese era di granito, di diaspro, di porfido, d' alabastro ecc. Se poveri, veniva lavorato di semplice terra. Dire adunque bisogna, che l' urne disotterrate nello stato di Modena provenisser da gente non facoltosa, mentre che tutte sono di terra. S' intende anche facilmente perchè cagione in que' cimiterj si rinvengan carboni. Senza fallo erano il restante delle legna bruciate, che servito avevano pe' roghi, su' quali si erano posti ad ardere e a consumarsi i defunti. Venendo poi al proposito degli ossi, io che su tai cimiterj ho instituite le fin qui esposte osservazioni, non ne ho trovato pur uno petrificato fra tanti che ho rotti ed esaminati. Ritengon sempre lo stato naturale di osso, e i più sottili, come i cranj, acquistato hanno qualche grado di friabilità. Eppure la diuturnità del tempo non era loro mancata, onde contrarre se non una compiuta, una iniziale almeno petrificazione. Il difetto di questa lenta operazione della natura, così ne' due accennati cimiterj, come in tanti altri, deriva, a quel ch' io penso, dalla mancanza del succo glutinoso e lapidifico; e quindi è che in tai siti la terra non è mai o quasi mai indurata in pietra. All' opposito di quel che veggiamo, dove si scoprono petrificazioni vegetabili od animali, le quali il più sogliono aver sede dentro alle pietre scissili, calcari, o margacee, e non rade volte selciose.

A questa grave difficoltà contro l' opinion popolare, che quel monte pieno d' ossa umane in Citera fosse anticamente il luogo dove si seppellivano i defunti, se ne aggiungon due altre di egual peso, secondo ch' io ne giudico, che m' ingegnerò di esporre con la maggior brevità. Si è detto che quella montagna è conica, che la base dove cominciano ad apparire le ossa ha il circuito d' un miglio, e che queste s' estendono a gran numero fino alla cima, tanto nelle parti esterne, che nelle interne. Non è improbabile che anche il nocciolo della montagna sia ricco di questi corpi stranieri. Ma anche independentemente da questa supposizione, volendo noi attenerci a quello che appare, ogn' un vede il numero sterminato d' uomini che quivi dovevano esser raccolti per aversi quell' immensa moltitudine d' ossa, il qual numero sembra di gran lunga superiore a quello che formano i cadaveri de' cimiterj delle più popolose città.

Per

Per ultimo se quella vulgare credenza fosse verace, siccome per una lunghissima successiva serie di anni si avrebbe seguitato a sotterrare i morti in quel luogo, così il grado di petrificazione nell' ossa non sarebbe eguale in tutte: ma le prime quivi seppellite godrebbero d' un maggiore impietramento dell' altre consegnate alla terra in tempi posteriori; quelle poi degli ultimi tempi esser dovrebbono le meno petrificate di tutte. Ma niente di ciò si ravvisa in quest' ossa, le quali sono tutte ad un modo petrificate, cioè perfettamente petrificate. Questa è dunque una prova dimostrativa, che tutte quante sono state ad un tempo rinchiuse in quel luogo, professando io poi d' ignorare altamente, come, in qual tempo, e per qual causa siasi quivi potuta ragunare tanta moltitudine d' uomini. Possiamo soltanto con sicurezza dedurre, che questa causa è stata violenta, rinchiuse avendo l' ossa a molta profondità, il che non possiamo capire senza ammettere che quella montagna sia stata allora considerabilmente smossa e sconvolta. Quell' ossa poi, che si staccano dalla superficie, non è già che quivi si sieno in pietra convertite, essendo cosa certissima, e confermata dall' esperienza, non darsi petrificazione nè vegetabile nè animale, che ne' luoghi sotterranei, dove cioè niente può la viva azione dell' aria. Ma si sono rese superficiali dal corrodimento delle pietre soprastanti, cagionato a poco a poco dall' acido aereo, e dalle meteore.

Il fenomeno degli ostraciti, e pettiniti dentro alla pietra vulcanica mi è paruto singolare, nè mi suggerisce la memoria d' aver letto in altri autori simile combinazione. Ma non è lo stesso dell' ossa umane petrificate, essendovene diversi esempli presso i Naturalisti, tra' quali merita distinta menzione il celebre mio amico Abb. *Fortis*, che parla d' un simil fatto nel suo libro sopra Cherso ed Osero, scritto con tanta eleganza di stile, e profondità di dottrine. E qui laudo il prudente suo riserbo di non volere nulla decidere intorno all' ossa da lui scoperte, essendo questi in realtà oscurissimi fenomeni, volendo rischiarare i quali, non possiam giocare che ad indovinarla, e piacesse a Dio che l' indovinassimo in bene. Quantunque qual cosa evvi fra le petrificazioni animali che non abbia il suo mistero, e che non sia avvolta da im-

penetrabili nebbie? E non è forse di questo genere il fenomeno dell' ossa d' elefanti, disotterrate nelle più fredde regioni del nord, e per conseguenza in luoghi tanto remoti ai nativi di questi enormi quadrupedi? E non hanno egualmente il loro malagevole, il loro arduo, le petrificazioni dei pesci, e di tanti altri animali, massimamente per essere la più parte esotici a que' paesi, di dove si estraggono? Ma i due fenomeni a mio avviso più difficili a comprendersi, più sorprendenti e più strani sono gli osservati da me, l' uno gli anni addietro nella Riviera di ponente di Genova, consistente in una infinita congerie di pettini impietriti componenti una serie di montagne dell' estensione al di là di settanta miglia, de' quali pettini è in buona parte formata quella nobilissima città marittima; l' altro fenomeno veduto ultimamente in Troja, e a Costantinopoli, giacchè le immense ruine della prima città, e le strade, gli acquedotti, e la massima parte delle fabbriche della seconda costano d' un marmo biancheggiante, non d' altro generato che di sole telline petrificate. Maraviglia non picciola ella è senza fallo che queste tre grandiose ed illustri città sieno state fabbricate di spoglie animali, e l' osservazione giungerà sicuramente nuova al lettore. Ma la maggior maraviglia, per non dire sorpresa, e il fatto di più difficile spiegazione si è per mio avviso, come un numero di testacei sopra ogni credere sì grande, sì sterminato, quale si è quello che ha servito di costruzione a quel lunghissimo tratto di monti ligustici, e l' altro all' edificazione di Troja, e di buona parte di Costantinopoli, si riduca a due specie nè più nè meno, essendo i pettini nel primo caso, e le telline nel secondo d' una medesima qualità, senza che altri pettini, altre telline specificamente diverse, ovveramente crostacei d' altro genere vi si veggano mai mescolati. Dopo tante e sì lunghe dispute siam tuttavia nell' umiliante incertezza, se una generale agente cagione seppellito abbia sotterra, e quasi ad un tempo questa prodigiosa quantità d' uomini, di quadrupedi, di pesci, e d' altri acquatici, e terrestri animali; o più veramente se a produrre sì memorabili effetti concorse sieno più cause particolari, in diversi tempi, e in diversi modi operanti. Sappiam solamente, perchè l' esperienza cel mostra chiaro, che questo od unico, o

molteplice principio ha cagionato nel nostro pianeta i maggiori sconvolgimenti, e che ne' siti più elevati de' monti, e alle più profonde loro radici ha sepolto questi viventi, discoprendosene le reliquie di alcuni, altre all' altezza di 10000 piedi sulla superficie dell' oceano, altre alla profondità di 14000 dentro gli strati delle montagne. Ma se queste rivoluzioni, se questi violenti trasporti di animali in regioni straniere, sieno state l' effetto o di qualche universal cataclismo, o di tremuoti, o di vulcani, o di altrettali tumultarj agenti, dobbiam confessarlo senza rossore, che da noi totalmente s' ignora. In tanta oscurità di cose, e scarsezza di dati, a me sembra che il miglior partito sia quello di notare diligentemente, e senza prevenzione i naturali fenomeni, avventurando al più qualche sospetto o conghiettura, e proponendolo al lettore filosofo per quello unicamente che vale. Forse verrà un tempo che i materiali in più età raccolti servir potranno a' più tardi nipoti per architettare qualche più ragionevol sistema degl' immaginati fino al presente, se pure sarà dato all' uomo il penetrare tant' oltre.

IV. L' isola di Citera, che fin' ora è stata il soggetto de' nostri discorsi, ci presenta una quarta curiosità naturale, non men degna delle tre altre d' esser narrata. Questa si è una sotterranea caverna situata a ponente, non più di tre miglia lontana alla montagna dell' ossa, ed un quarto di miglio al mare. Rozzamente ovale si è la sua bocca al di suora, ma internamente rappresenta un triangolo rettangolo isoscele, il cui angolo retto è alla sommità della bocca. Questa bocca, assai ampla, serve d' ingresso ad una spaziosa stanza, sul cui piano si mira un meschino altare circondato d'un muricciuolo posticcio, nel quale qualche rara volta si celebra da' Greci la Messa, per essersi, dicono, quivi trovata l' immagine di S. Sofia. Le pareti laterali, e la volta della stanza sono di pietre calcari, senza che l' arte v' abbia avuta veruna parte, su le quali appajono più macchiuzze, che a prima giunta si crederebbon licheni, ma che meglio espiate non sono che accozzamenti di granella stalattitiche attaccate a quelle pietre. E da questo fatto si comincia ad accorgere, che la caverna presenta un fenomeno niente diverso da quello che in tante altre si osserva, voglio dire de' pori acquei. Quelle gra-

nella che nel rossigno biancheggiano, e che hanno forma rotonda, se si rompano e microscopicamente si osservino, si trovan formate di laminette concentriche, le une sovrastanti all' altre; e quindi apparisce che hanno appunto i caratteri di quell' acquee pietruzzole volgarmente dette *ooliti*.

Se dalle pareti laterali rivolgeremo l' occhio alla parete opposta alla bocca, qui i corpi stalattitici si presentano in folla. Si può dire che quella parete sia unicamente composta di essi. La parte adunque esteriore di lei è formata d'un numero immenso di stalattiti, non già coniche come le ordinarie, ma irregolarissime nella figura, e piene di sinuosità, di bernoccoli, di tumori. Il restante poi della parete è una solida crosta della grossezza di più piedi, stalattitica essa pure, e nell' esterna apparenza fatta a onde ed a zone. Sul piano della stanza posto in vicinanza della parete risaltano altresì più rialzamenti stalattitici, generati dalle goccie d' acqua cadenti da quella volta. Rottine diversi, si vede essere la primiera loro origine un picciol tumore, al quale sono sovrapposti altri e poi altri successivamente più grandi. Sembra la loro genesi essere presso a poco accaduta, come quando della cera fusa o del sevo seguitano a lungo a cadere sopra d' un piano, oppure quando vi cade goccia a goccia dell' acqua, che per l' eccessivo freddo via via si rappiglia, ed indura. Le goccie di quella volta sono pregne di materia terrestre: cadute sul pavimento, il fluido acqueo a poco a poco svapora, le particelle terrestri per la mutua attrazione si uniscono, e in certa guisa si coagulano, e da questi successivi indurati coaguli ne nascono que' piccoli monticelli o tumori. Le stalattiti pendenti agli archi della stanza, le quali sono esse pure a strati sopra strati, come ne mostra la rottura, ammettono un'analoga spiegazione, che è quella pure che dal *Wallerio*, e da altri si suole assegnare per consimili acquei lavori. Nè da un principio diverso si vuol ripetere il solito corpo crostoso, onde massimamente la parete è formata. Le acque, inzuppate di sottile terrestre materia, da prima probabilmente non hanno prodotto che stalattiti verticali, che coll' andar del tempo allungatesi, sono giunte infine a toccare il suolo, e ad attaccarvisi. A queste nel medesimo piano sonosi aggiunte altre e poi altre, e dal mutuo loro accostamento ne è final-

mente nata quella crostosa sotterranea parete. La spiegazione per le cose, che qui appresso dirò, riceverà ulterior grado di persuasione. Intanto avverto essere la materia, onde sono composti i corpi stalattitici mentovati, e gli altri da mentovarsi, calcareo-spatosa. Proseguendo il cammino dentro la grotta, si entra in una seconda stanza alquanto men capace della prima, mentre che questa ha di larghezza interna 72 piedi, e 59 di lunghezza, quando la larghezza della seconda stanza è di piedi 38, e la lunghezza di 46. Qui la cosa più osservabile si è un tramezzo stalattitico che divide la seconda stanza da una terza, grosso molti piedi, traforato irregolarmente, e che in più d' un luogo sembra formato come di grossi tronchi, che si dividono in rami; e i tronchi si sollevano dal pavimento, e i rami vanno a piantarsi negli archi della caverna. Qui pure si fa manifesto essere stata la formazione di quel tramezzo una conseguenza dell' acque cadenti dall' alto, e generanti con le terrestri loro particelle da prima delle stalattiti, le quali col decorso degli anni cresciute di numero e ingrossate, e stesesi fino a terra, hanno formata quella specie di tramezzo. E siccome questo fu da me trovato vestito d' un sottil velo acquoso, ad onta dell' aridissima autunnale stagione, egli è fuor di dubbio che in avvenire que' fori per le aggiunte terrestri materie si andranno chiudendo, e che in fine quella parete o tramezzo verrà ad essere interamente solido e tutto d' un pezzo. Non più che due stanze mi rimanevano da osservare per poter dire di aver veduto tutto l' interno della caverna, cioè una terza ed una quarta: e qui dirò con Dante, che queste due stanze sono mute di luce; per considerar le quali vi fu dunque bisogno di fiaccole accese, e non mancarono entrambe di presentarmi nuovi curiosissimi oggetti. I lavori, gli scherzi, le bizzarrie cagionate dall' acque sono innumerabili, e conosco mancarmi le parole per adombrarne alcune. Oltre a gran numero di stalattiti giù pendenti dalle curve volte, ed altre risaltanti a foggia di coni ottusi dal terreno, si veggono più colonne qua e là occupanti il vano di que' tenebrosi orrori, altre diritte, e quasi dalla natura fusate, altre bistorte bernoccolute o scabrose, altre liscie e sfuggevoli, altre saglienti alla superficie per cordoni che longitudinalmente le corro-

no; e tutto quel colonnato ſembra il poſſente ſoſtenitore di quegli archi minaccievoli e lordi. Nè qui mancano baſſorilievi che rozzamente ſomigliano ad uomini e ad animali, o che hanno l' ombratile ſembianza quando di alberi forniti di pedale, di rami, di ramuſcelli, quando di padiglioni, e perfino d' organi corredati delle lor canne. Termina poi quella incantata ſcena nel più interno della montagna ſenza ulteriore apertura o sfogo, che prolunghi al non mai ſazio ricercatore il piacere di contemplare come la ſagace natura ne' più cupi ſeni della terra ſa operar maraviglie, ſenza curar punto la gloria d' eſſer veduta.

Reſtrignendo in poco le coſe in queſt' ultimo capo già eſpoſte, col ridurle tutte alla conſiderazione de' pori acquei, onde riccamente è fornito quel ſotterraneo ſpeco, raccolgo che la materia che li compone non è della più nobile, nè della più ricercata, non eſſendo nè criſtallina, nè biancheggiante, come ſi ſcorge in più altre caverne, e come negli anni ſcorſi emmi apparita quella d' una cava ſcorrente ſotto i filoni de' prezioſi marmi carrareſi. Coteſti pori tuttavia preſentano un fenomeno che molto intereſſa il penſatore filoſofo. Concerne eſſo la lunghezza del tempo impiegatavi per eſſer prodotti. Ve n' ha alcuni, precipuamente nella quarta ſtanza, formanti delle maſſe groſſe per ogni verſo più di 30 piedi. Qual prodigioſo numero di ſecoli vi ſarà egli ſtato richieſto per l' attuale formazione di eſſe? Un fatto riferito dal *Vallisneri*, e ragguagliato ad un mio, metterà più in chiaro la coſa. Queſto rinomatiſſimo mio concittadino viſitato avendo nel 1705 ſull' Appennino di Modena una caverna chiamata la *Grotta che urla*, e tra l' altre coſe veduto avendovi ſul piano di eſſa in vicinanza della bocca un monticello di materia ſtalattitica, generato da goccie cadenti dalla ſommità della caverna, riflette nel ſuo Trattato delle fontane, che ſe quel ſotterraneo ſtillicidio proſeguirà a cadere ſul monticello, queſto a poco a poco s' aggrandirà in guiſa, che giungerà un giorno a chiudere il varco ai curioſi. Nel 1783 eſſendomi io recato alla Grotta che urla, cioè 78 anni, da che venne deſcritta da queſto Naturaliſta, ebbi il compiacimento di ritrovarvi lo ſteſſo monticello, ma tuttavia aſſai umile, e ben lontano dal far ſoſpettare d' eſſer

vicino a vietar l' ingresso alla grotta. Se adunque nello spazio di 78 anni noi siamo autorizzati a pensare che quel cumulo stalattitico si è di poco accresciuto ; di quale innumerabile moltitudine d' anni sarà stato mestieri per generare quell' ammasso lapideo di 30 e più piedi? Tanto più che lo stillicidio cadente sul cumulo della Grotta che urla è molto maggiore di quelli che danno origine ai corpi stalattitici della grotta di Citera. Venendo poi questa grotta, e la montagna, dentro cui si nasconde, a constituire una porzione dell' isola, non è a dubitare ch' ella pure sia sopra ogni credere antichissima.

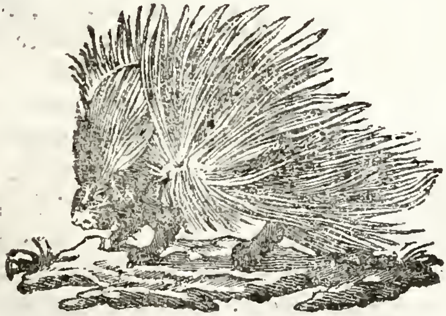
Una breve considerazione ponga fine a questa lunga mia diceria. Quella Citera, che presentemente mirasi dal passeggiere qual rifiuto della natura, per non essere che un seminario di pietre vulcaniche, di scogli, di deserte montagne, penserem noi che tale sia anche stata dalla primiera sua origine? O più veramente che cangiata la natura del suolo, di fruttifera e deliziosissima ch' ella era da prima, abbia degenerato a poco a poco, ridottasi in fine alla presente miserabile squallidezza? Non nego io già che queste degenerazioni sieno uno di que' tanti accidenti, cui vanno soggette le parti del globo. Siavi un paese internamente pieno di scogli, ed esternamente vestito d' una grossa crosta terrosa. Questa, per essere montuoso il paese, venga corrosa, e via recata ne' fiumi dall' impeto delle pioggie, a tal che dopo un lunghissimo giro di anni più non rimangan di esso che i nudi scogli. Allora quel luogo sarà ridotto a somma sterilità, e ad orridezza, quando per lo innanzi esser potea secondissimo ed amenissimo. Ma io presumo che niente di simile sia avvenuto in Citera. Conciossiachè s' ella originalmente è derivata da vulcani, siccome penso di avere bastantemente mostrato, quel disgustoso, quello squallido, che presenta oggigiorno all' occhio, doveva presentarlo non meno ne' suoi principj. Che anzi io porto opinione che allora fosse più deserta, più ributtante, notissimo essendo, che le lave e l' altre produzioni vulcaniche dopo un lungo intervallo in parte si scompongono in terra; e da questo scomponimento credo io derivati que' brevissimi tratti di terra, che empiono alcune picciole valli, alcuni bassi fondi dell' isola, e che mal corrispondono

ai voti dell' avido agricoltore. Citera dunque ne' tempi che fioriva la Grecia esser doveva quale a un di presso la veggiam oggi: e il tempio a Venere sacro che nel suo seno accoglieva, e i frequenti sacrifizj che offerivansi alla Dea, e la copia de' forestieri che vi accorrevano, hanno senza fallo cotal luogo levato in fama e celebrità, fattasi anche maggiore dalle penne amplificatrici de' Greci.

Eccole quelle poche osservazioni, e lievissime conghietture che ho potuto raccogliere intorno a Citera, che in buona parte ho scritte sul mare, e che giunto a Costantinopoli ho il piacere di mandarle. Cercherò di comunicarnele qualche altra, se pure avrò ozio bastante, prevedendo di dover essere quindi innanzi occupatissimo, non tanto nella continuazione di mie ricerche sopra cose naturali, e segnatamente marine, quanto per mettere insieme nuove raccolte, onde arricchir maggiormente il pubblico Reale Museo di Pavia, per ubbidire ai superiori ordini dell' Imperial Corte di Vienna, e del Reale Governo di Milano, questo appunto essendo stato il doppio oggetto de' miei viaggi in Levante.

Ella continui a volermi bene, ch' io continuerò ad essere con la più alta considerazione, e col più parziale affetto.

Pera 8 Novembre 1785.



SOPRA

Fig: III.

Fig: I.

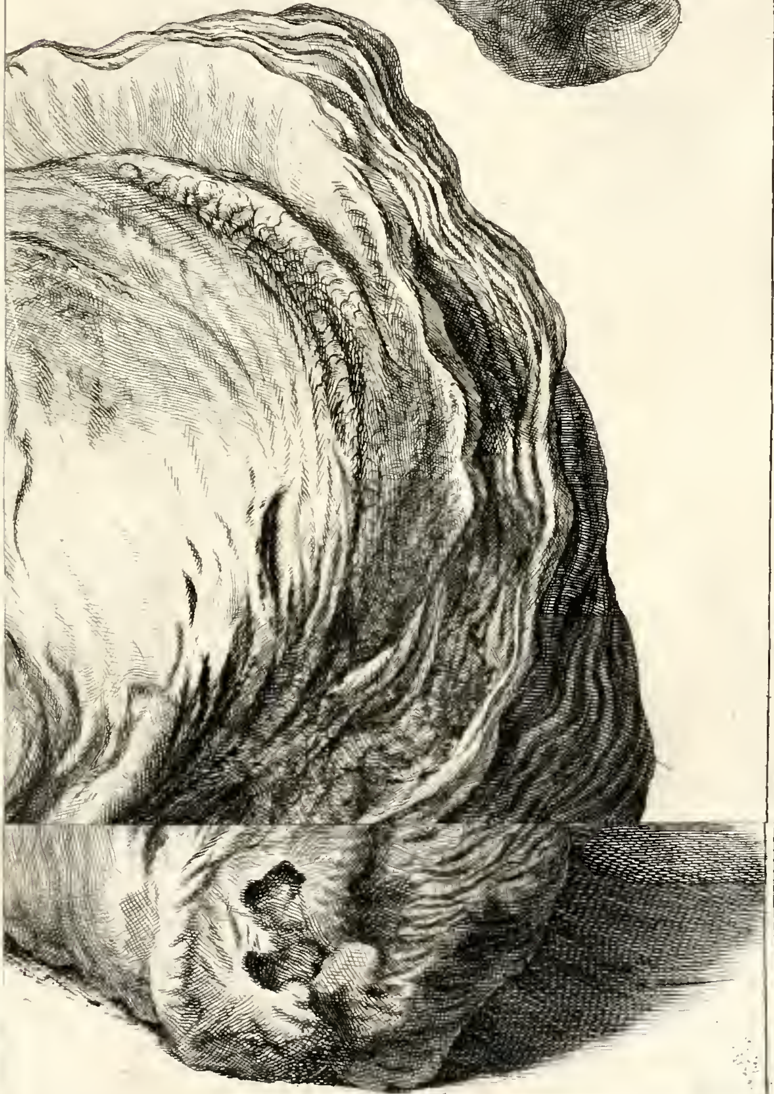


Fig: II.

Fig: III.

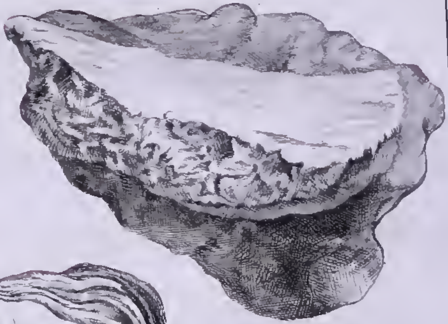


Fig: I

SOPRA IL VELENO DEI FUNGHI.

Del Sig. Dott. GIOVANNI VERARDO ZEVIANI.

PARTE PRIMA.

In che consista il veleno dei funghi.

SIccome da bassi e vili principj sorgono coll'andare dei secoli fra gli uomini le più distinte e riputate famiglie; così è addivenuto dei funghi: che riputati un tempo sozze produzioni della putredine, vengono ora ascritti al numero delle altre vere e legittime piante. Fu *Plinio* il primo che chiamolli espansioni del putrido muco degli alberi: *fungorum lentior natura, & numerosa genera, sed origo nonnisi e pituita arborum* (*a*). Fu *Girolamo Trago* che infamolli per figli della corruzione e della putredine: *cæterum neque plantæ, neque radices, neque flores, neque semina sunt: sed nihil aliud quam terræ, arborum, lignorum putridorum, aliarumque putrilaginum superfluæ humiditates* (*b*). Fu *Giovanni Costeo* che li disse escrementi della terra: *sane imperfecti sunt generis... & fungi.... quos excrementa potius terræ esse putes, quam plantas* (*c*). Così fu creduto da tutti per molti secoli, finchè nel presente il *Lancisi* ed il *Vallisneri* una loro opinione produssero; che altro non fossero i funghi che porzioni di fibre vegetabili prolongate ed organiche: *neque vero semi-*

(*a*) Hist. nat. lib. 22. cap. 23.
(*b*) Hist. Plant... lib. 1.
(*c*) De stirp. nat.

nibus ad fungorum generationem opus esse videtur, cum iidem nequaquam nascantur separatim; verum semper derivatis fibrillis, succoque nutritio ab aliquo vegetante, vel vegetabili corpore... (a). Così pensai io pure quando da fanciullo vidi da un trave di pioppo, liscio ed appianato, che sosteneva in chiusa ed altra camera un tetto, sortiti dei funghi, quali nascer sogliono alle morte radici di quell' albero: e così creder dovea il *Lemery* quando da liscie assicelle di melo vide molti funghi sortiti, in tempo che quelle si usavano a custodia e fermezza di una gamba rotta (*b*). Ma il *Turneforzio* fin dal cominciamento di questo secolo sospettò che fossero i funghi vere piante prodotte dai loro proprj minutissimi semi (*c*). Senonchè la gloria di averli veduti e rimarcati riservata era a *Pietro Antonio Micheli* fiorentino; il quale diligentemente li descrive non solo nei veri funghi, ma negli agarici ancora, nei tartuffi, e nelle altre simili piante (*d*).

Ma questi funghi, queste vere e legittime piante, per quanto tolti siano in questo secolo da una sozza origine, non è però tolta da essi l' infamia di essere alle mense degli uomini, dove sono saporito e ricercato cibo, perigliosa vivanda, e qualche volta mortifero veleno: *Fungorum esus*, dice Galeno, *quibusdam mortem intulit: nonnulli in mortis discrimen adducti diarrhæis correpti, aut choleris aut strangulata periclitantes* (*e*). *Plinio* nomina delle famiglie intiere disfatte dai funghi mangiati (*f*), onde il *Kirchero* chiamolli *vivas toxici bursas* (*g*). Noi stessi ai giorni nostri veduto abbiamo frequentemente se non estinte, a periglioši passi ridotte molte persone; benchè migliori modi sian noti al dì d' oggi di prepararli alla mensa, e più certi metodi si abbiano di soccorrere con la medicina agli afflitti. Non è gran tempo che io fui chiamato a visitare una ragazza, abbandonata dal Medico in mano de' Religiosi per disperata, come tocca da

(*a*) Lancis. op. tom. 2. pag. 80.
(*b*) Tratt. univ. pag. 135.
(*c*) Mem. de l' Acad. an. 1707.
(*d*) Nova Plant. Gen. Ridicola è l' opinione di M. *Palissot* che vuole i funghi altro non essere che malattie dei vegetabili: e così quella del Barone di Munchausen, che pretende ch' essi altro non sieno in realtà che veri animali. Vedi lo Esprit des Journaux, maj 1785.
(*e*) De fuc. bon. cap. 4.
(*f*) Hist. nat. lib. 22. cap. 22.
(*g*) Scrut. Pest. sect. 1. cap. 6.

una forte apoplessia. Avea per vero dire da molte ore tutti li sensi esterni ed interni sopiti. Pure alcuni segni mancavano a doverla dire apoplettica. Sospettai di veleno, e rilevai procedere il morbo da gran quantità di funghi mangiati. Fui a tempo di soccorrerla con i presidj dell' arte.

Oltre la diarrea, la collera, lo strozzamento di gola di sopra nominati da *Galeno*, si osservano ancora fra i sintomi del veleno di funghi, il ptialismo, la colica, la dissenteria, l' itterizia: ed in un veleno più penetrato e forte i deliquj d' animo, la prostrazion di forze, l' agghiacciamento delle membra, le convulsioni, la febbre, il delirio, il letargo, l' apoplessia, la morte. Nel cadavere di una fanciulla uccisa da' funghi infetti trovò il Lemonnier verso il piloro infiammato il ventricolo, turgidi i vasi sanguigni del duodeno, leggermente macchiato all' interno, e corroso, e inferiormente strozzato, voti gl' intestini, ostrutto il condotto del fiele, rosso e gonfio il fegato, e la bile tinta di un verde atro colore (*a*).

Or in che consiste propriamente il veleno dei funghi? *Ex eduliis his omnibus*, dice Galeno, *fungis frigidissimus*, *&* *glutinosissimus*, *crassusque simul succus inest* (*b*). Questa dottrina di *Galeno* è stata, come di ogni altra sua avvenne, per tutt' i secoli dopo da ciaschedun ricevuta; ed il danno che recano i funghi, o sia il loro veleno, è stato da tutti creduto non in altro stare che in un eccesso di frigidità insuperabile dalle forze dello stomaco in cui entrano e si ricevono. Quindi non si è pensato ad altro per cura de' suoi micidiali effetti che a prescrivere non so con quanta utilità volatili rimedj, focosi, ed alessifarmaci. Ma un freddo alimento, vischioso e crasso, quantunque copioso, non può nello stomaco altro produrre, che inappetenza e gravezza; non mai sintomi che dentro passino ad offendere i nervi. Quindi è che i moderni nella introdotta libertà di filosofare hanno più tosto una contraria opinione imaginata ed accolta: che

(*a*) V. *Morgagni* de sed. Morb. epist. 59. art. 14. e Sauvages Nosol. tom. 2. pag. 187.
(*b*) De succ. bon. cap. 4.

il veleno de' funghi cioè consista anzi, tutto all'opposito, in una sottile socosa e caustica acrimonia. *Utut quædam fungorum species inter edulia concedi possint*, dice l'Offmanno, *tamen non plane expertes sunt malignæ cujusdam acrimoniæ, præsertim si non bene elixentur vel præparentur*; e poco dopo: *symptomata, quæ celeriter in ventriculi & intestinorum tunicis, & cæteris corporis membranaceis & nervosis partibus fungi concitant, ab acrimonia subtili caustica provenire, vel id argumenti esse potest, quod exsiccati & bene cum aqua calida eloti non ita nocent &c.* (*a*). I sintomi per verità, che i funghi infetti producono, sono sintomi e segni di acrimonia; e di un' acrimonia venefica, se si attendano quelli che s' aggirano d' intorno ai nervi e conturban lo spirito. Ma questa acrimonia poi, questo veleno non dimostrano essi nello stato lor naturale, nè all' odore acuto, nè al sapore ingrato, nè al brugiore che facciano in bocca. Anzi tutto all' opposito sembrano del tutto insipidi e freddi: *prope accedunt ad cibos insipidos*, dice Galeno, *& nulla insigni qualitate sunt præditi* (*b*). Consultiamo l' analisi chimica per vedere se qualche cosa di più ci dimostri. Questa l' abbiamo esatta e compiuta nel Geoffroy. *Ex fungorum campestrium vulgatissimorum, esculentorum, recentium lib.* V. *per retortam destillatis, prodierunt humoris limpidi, fungorum odorem & saporem referentis, magis ac magis ingrati, ac tandem paulisper urinosi obscure alcali & subsalsi lib. j. unc.* XIV. *dr.* VIJ. *gr.* XX. *humoris limpidi minus odori & sapidi, subsalsi & alcali urinosi unc. xj. dr. vij. gr. xij. humoris rufi, deinde fusci, empyreumatici sale volatili urinoso copioso imprægnati unc. j. dr. ij. gr.* XLVIJ. *olei fluidi & limpidi dr.* VJ. *gr.* XLIJ. *salis volatilis urinosi concreti dr. ij, gr. x. massa nigra in retorta residua pendebat unc. j. dr.* IV. *gr.* LXI. *quæ rite calcinata cinerum reliquit* ℨ. *vj. gr.* XLVIIJ. *ex quibus lixivio salis fixi mere alcali dr. iij. gr.* XXIX. *in calcinatione dr. vj. gr. viij*. In questa prova non si rileva nei funghi tanta acrimonia, quanta se ne trova in altre sostanze acri, che non nuocono allo stomaco e ai nervi: ed i volatili e stimolanti principj che pur

(*a*) Med. Syst. tom. 2. pag. 152.
(*b*) De alim. fac. lib. 2. cap. 69.

vi sono, sono da gran copia di flemma contemperati. Tale è anche il sentimento dello stesso *Geoffroy*. *Fungi salem ammoniacalem essentialem continere videntur, cujus acidum sale volatili urinoso copioso saturatum est, & cum oleo copioso ac pauca terra conjunctum. Hæc principia magna phlegmatis copia diluuntur* (*a*). Dunque l' acrimonia venefica de' funghi non è ad essi naturale; e qualora l'abbiano, conviene di essa fuori di essi cercarne l' origine e la causa.

Li 15 ottobre dell' anno 1784 quattro persone ebbero al pranzo de' funghi di varia specie, per la maggior parte tutti bianchi, detti *funghetti*. Con ogni cautela furon questi purgati e nettati, e poi in molta acqua bolliti, e poi con olio al solito ricotti e fritti. Tutte quattro queste persone ebbero poco dopo dolori di stomaco e di ventre, gonfiezza enorme di queste parti: tre ebber vomiti perpetui e perpetuo scorrimento di ventre. Passarono la notte in veglia, e la mattina del dì seguente sono io stato chiamato alla lor cura. Prescrissi ad ognuna una buona dose di sciloppo di rose solutivo, allungato con acqua stillata di melissa: raccomandando loro che avesser cura di bere fra il giorno una gran quantità di siero di latte semplicemente colato. Servì il medicamento di purgante insieme e di emetico; e nel vomito tre mandarono fuora rimasugli di funghi indigesti. Guarirono tutti felicemente, fuorchè ad una Signora più avanzata in età rimase una stupefazione nel cerebro, che per qualche giorno dappoi la tenne sonnacchiosa e stordita. Ebbi campo di esaminare un residuo de' medesimi funghi per sorte restati ancor crudi. E trovatili per niente patiti o corrosi, li riservai chiusi in una camera ben difesi e custoditi dalle mosche. Dopo tre giorni senza dar segno di corruzione mandarono fuori una gran quantità di picciolissimi vermi corti, tutti bianchi col capo nero, alquanto minori del baco da seta quando esce dall' uovo. Ecco in che consiste il veleno de' funghi: nelle uova cioè, o ne' vermetti che dentro di essi ficcano o depongono i vermi o le farfalle; ovvero sia in quel fetido stoma-

(*a*) Mater. Med. par. 2, de veget. ind. pag. 263.

chevole liquor ſeminale che ſpruzzano le madri nel deponere i figli o le uova, il quale per ventura ſerve a tener lontane le altre beſtiole dal cibarſeli. E' dunque il veleno de' funghi veleno d' inſetti: a cui ſe piaccia aggiungere il piſcio o la bava d' altri venefici animali, ciò non repugna al noſtro ſiſtema. E' noto come quaſi tutti gl' inſetti ſiano velenoſi, e gli ſcrittori, che parlano univerſalmente dei veleni, fanno parte de' loro trattati il velen degl' inſetti. *Inſecta plurima*, dice il *Sauvages*, *vires fere venenatas habent* (a). Sembra dato il veleno agl' inſetti, inermi che ſono, per propria difeſa, e per offeſa d' altrui; ſtantechè come canta un Tedeſco

Dieſs iſt in die natur gegeben,
Und jederzeit der Welt ihr Lauf:
Der eine muſs vom andern leben,
Der gröſſre friſſt den kleinern auf.
Wer nicht die macht hat ſich zu wehren,
Der laſs ſich mit Geduld verzehren.
E' legge di natura ſtabilita:
Così van le faccende in ſu la terra.
Ognuno della altrui vive ſua vita;
Il grande al piccol fa perpetua guerra.
Chiunque forza non ha che lo difenda,
Si laſci divorar, e grazie renda.

Non fu raro accidente che io mi abbia veduti vermicini uſcire dai funghi. Le donne, che cercano e preparano alla cottura i funghi, il ſanno; le quali rigettano i fracidi o troppo adulti, gli ſpaccano per oſſervarli diligentemente, perchè appunto ſono facilmente verminoſi. Quindi è che io non nella ſola ſpecie de' vermetti capineri da me veduti, ma in altre ſpecie ancora ripongo il veleno de' funghi: ognuno ſapendo, per poco che ſia verſato nella ſtoria naturale, che ove ſono per terra ſoſtanze molli, ſemiputride, moccioſe, ivi le farfalle volentieri depongono i loro parti, perchè ſiano naſcoſti agli altri che li divorano, e perchè nati abbiano toſto onde nutrirſi. Ma nella ſteſſa maniera che io non determino il veleno ad una ſpecie d' inſetti ſola, nè meno l' affiggo ad

---

(a) Noſol. tom. 2. pag. 338.

ognuna di essi : potendo darsi facilmente che qualcuna più, qualche altra meno, qualche altra niente siano nocevoli: come nei pesci si trovano uova innocenti, ed uova venefiche: quali sono segnatamente quelle del barbio.

E' dunque il veleno de' funghi propriamente veleno animale. E però come i funghi sono stati liberati dall' infamia di una sozza o spuria origine; meritano altresì giustamente di essere discolpati dall' essere per se stessi periglio si e venefici. Che se molte specie di funghi si danno, le quali, anche non verminose, non sono atte a mangiare; questo è perchè sono disgustose alla bocca, ed inette allo stomaco, non già perchè contengan veleno. A nuocer vengono in copia ingollate, ed i danni che recano non sono offensivi de' nervi e della vita. Veleno è ciò che toglie la vita sotto minima quantità: *venena eatenus dicuntur, quia sub minima mole strages in corpore excitant* (a).

Trattandosi qui d' un veleno animale, procedente forse da varia specie di animali, invisibile, ed in minima quantità sommamente nocevole, sono dispensato dal definire la sua indole speciale, e le sue differenze: mentre non cade esso sotto ai sensi, nè soggiacer puote a chimico esame, nè esaminarsi quando, e quantunque volte si voglia. Mi basta dire ch' esso è una sostanza sommamente inimica della natura dell' uomo, ed offensiva de' nervi e degli spiriti: contro di cui con tutta la loro possanza s' allarmano, introdotto che sia, le forze vitali, per staccarlo, dividerlo, invoglierlo, sterminarlo fuori del corpo. Dirò di più, ch'è una sostanza indomabile, e così tenace della propria indole, che spesso a tante forze resiste, ed uccide. Non è glutine che con acquosi si stemperi, non è acre che con acidi si attutisca, non è acido che con alcalici s'ammansi, non è sale, non è zolfo, che con sale, con zolfo si unisca e si associ. Egualmente irrita i nervi, e gli affascina: egualmente riscalda il sangue in acute, e lo ritarda in rigorifiche febbri. Fa sonnacchioso l' uomo, e lo tiene svegliato: lo fa cadere in deliquio, e lo agita in convulsioni: lo fa furibondo, e lo rende stolido e sci-

(a) Sauvag. Nosol. tom. 2. pag. 337.

munito. Fa dolori acutiſſimi, e fa egualmente una morta ſenſibilità. Da queſti contrarj effetti non vien permeſſo al più acuto filoſofo il penetrare qual ſia la ſua indole, quali qualità fra le note predominino in eſſo.

Se non che potrei per ventura dolermi di aver taciuto anzi tempo, ſe almeno non cercaſſi, ſe i vermetti vivi introdotti nello ſtomaco vengano a nuocere in noi in quanto ſon vivi. Secondo le dottrine del *Valliſneri* non poſſono far gran danno, perchè a lungo viver non poſſono. *Se inghiottiamo*, dic' egli, *le uova de' vermi de' frutti, delle bevande, de' cibi, dell' aria, come certamente moltiſſime ne inghiottiamo, o non naſcono in noi, o ſe pure ancora naſceſſero, che non credo, gli appena nati teneri vermicelli per difetto del proprio alimento, e del loro nido proporzionato, o dell' aria aperta e sfogata, perirebbono; o dal noſtro calore e fermenti attiviſſimi ſarebbono uccisi... Non vivono quei de' pomi, ſe levandogli dal frutto volete far loro mangiare delle foglie degli ſteſſi pomi; o quei delle foglie ſe vorrete che ſi cibino de' frutti, e così dica di tutti gli altri; e poi vorranno che entrati nel noſtro corpo, cangiando in un ſubito genio e natura ſi nutriſcano di ſughi non ſolo totalmente differenti ma ancora contrarj* (*a*)? Sia però detto con pace di tanto uomo, non ſembran forti queſte ragioni. Si vuol qui ſtretta la natura a leggi e confini, ch' ella forſe non tiene e conoſce. Mal ſaria proveduto alla ſuſſiſtenza delle ſpecie, ſe mancato un tale determinato cibo, un altro non ſe ne poteſſe ſoſtituire. Veggiamo le piante, cangiato clima e terra, cambiar figura, ma pur almeno per qualche anno ſuſſiſtere. Una Donna, a cui io avea ordinato un emetico, reſe me preſente in un forbito bacile con molta flemma una tarma da farina grande ed adulta: e reſtò con ciò ſtabilmente libera di una colica che da qualche tempo la moleſtava. Un bruco nel mio orticcino, cangianteſi in nero ſcarafaggio, divorò tutte le foglie di un perſico: morinne la pianta, e nel ſeguente anno comparſe il bruco in terra a paſcerſi ſopra il lappaccio, e vi ſubì tutti

(*a*) Oper. tom, I. pag. 119. 134.

tutti i ſuoi cangiamenti. Simili fatti furono contrappoſti al ſiſtema del *Vallisneri* dal Padre *Borromeo* (*a*). Alla giornata ſi veggono uſcire dal corpo dell' uomo e per vomito e per feceſſo, e per tumori aperti, vermi che non ſomigliano alle note ſpecie proprie di lui. Ed i vermi abitatori della pelle detti *crinoni* e *comedoni*, rariſſimi a vederſi nelle noſtre contrade, ſi trovano frequentiſſimi e moleſti in certe miſere popolazioni che dormon per terra, e ſi credono da tutti provenir dalla terra. Dalla terra ſi crede non ſenza ragione che ſi inſinuino nelle narici delle pecore certi vermi ad eſſe comuni; e quelli ancora che paſſano nel loro fegato a farlo pieno di tumoretti verminoſi. Il pretendere queſti vermi ed altri cotali, che s' inſinuano nell' ano de' cavalli, figlioli di altri che prima erano eſſi pur nati colà dentro queſti animali, è dura coſa il doverlo credere. Quanto poi alla chiuſa aria de' noſtri corpi, al calore noſtro, ai fermenti del noſtro ſtomaco, tanto poco queſte coſe ſono temute dai vermi, che ſi trovano queſti talvolta abitare dentro le tonache delle grandi arterie preſſo al cuore, ſenza libero commercio coll' aria eſterna, e nel maggior bollore del noſtro ſangue (*b*). E dentro lo ſtomaco e gl' inteſtini di più ſpecie abitano i vermi, che non temono d' inſinuarſi talvolta, non ſi ſa come, ſin dentro la veſcica urinaria, d' onde vivi ſortire ſenza ſegni d' interna leſione, come qui abbiamo veduto in un Fantolino: che non temono d' inſinuarſi ne' canali bilioſi ſin dentro al fegato, con dar morte ad un Cavaliere: che non temono d' inſinuarſi per le trombe di *Euſtachio* e ſortire per le orecchie, come abbiamo parimenti veduto: che nè la piccante urina ſalata, nè l' amaro fiele o il cerume ſon da eſſi temuti.

Ma per un' altra più forte ragione ſiamo neceſſitati a rinunciare alla credenza, che il veleno de' funghi conſiſta nella offeſa che fanno allo ſtomaco vermetti viventi. La ragione che fa una inſuperabile oppoſizione ſi è, che funghi ſpac-

(*a*) Valliſn. ib. pag. 319.
(*b*) *Morgagni*, epiſt. anat. 9. n. 46.

cati e divisi, fatti bollire lungamente nell' acqua, e poi fritti nell' olio, conservano non ostante il loro veleno. Queste sì son cause che fanno morire gl' insetti: e tolgono alle lor uova la voglia di nascere. Il solo calore del sole estivo ammazza ne' bozzoli l' aurelia del baco da seta, ne' grani di frumento estingue quell' uovo, che occultamente produce un verme, che riscalda il grano, e tutta ne divora la sostanza interna, da cui esce poi volando a primavera. Il calore dell' acqua che bolle, è maggiore del calore del sole, e quello dell' olio bollente supera di gran lunga quello dell' acqua. Non istà adunque nella vita degl' insetti la forza del veleno de' funghi.

In questo nostro sistema si rende facil ragione di alcuni fenomeni che accadono nel proposito del veleno de' funghi, e si spiegano felicemente gli effetti che dentro il corpo nostro produce. Si rende facil ragione perchè niun tempo, niun sito, niuna specie di funghi vada sicura ed esente dal veleno: cioè perchè son tutti i funghi e sempre, e dovunque esposti agl' insetti. Si rende facil ragione perchè fra cento volte che si mangiano funghi, una sola volta s' incontri a trovarli infetti: cioè perchè rade volte nella effimera lor vita s' incontrano pronti insetti che gli avvelenino. Si rende facil ragione perchè la loro malizia non vada a gradi d' infezione minimi e maggiori, ma per salto dalla innocenza alla velenosità: cioè perchè o è, o non è stato a loro comunicato il veleno. Si rende ragione perchè essi sotto un buono aspetto siano nocevoli: cioè perchè sotto il miglior aspetto posson covare il veleno. Si rende in fine ragione perchè ben lavati, bolliti e fritti, non ostante possano ritener il veleno: cioè perchè non consiste questo in alterazione dei loro sughi, ma perchè è vero veleno, tenace della propria sua mala natura ed infezione.

Inghiottito coi funghi questo veleno, le prime impressioni sue son nella bocca e nella gola. Queste parti rossigne per natura e senza cute si caricano di un rosso più atro ed illividiscono. Lo stesso, chi potesse vedere, succede dentro l' esofago. E però ben tosto accolto il veleno, si sente qui lunghesso un prurito, un calore mordace, uno strignimento soffocativo, per l' irritamento e per la contrazione delle fi-

bre nervee e muſcolari; che intereſſano il reſpiro con tirare in conſenſo la faccia poſteriore della trachea dov' è conneſſa con l' eſofago, e manca degli anelli, o frammenti di circolo, cartilaginoſi, che la tengono aperta. Queſto è un ſintomo molto ordinario del veleno dei ſunghi, notato fra i primi e principali dallo ſteſſo *Avicenna*: *Et accidunt ex eis ſtrangulatio & conſtrictio anhelitus* (*a*). Queſto ſintomo ben tre volte l' ho veduto ſuccedere all' uſo di quel grano, volgarmente detto *fava di S. Ignazio*. Uſando io di queſto rimedio o veleno che ſia, per cura delle febbri periodiche, ſo bere per due o tre giorni di ſeguito una tazza d' acqua in cui per un giorno intiero ſia ſtata infuſa la fava. Serve molto bene all' intento, ſenza produrre veruna moleſtia, nè veruna ſenſibile evacuazione. Ma un Giovane che per errore bevè tal acqua dove la fava fu infuſa per due giorni intieri, fu a pericolo di ſoffocarſi, e già ſi tenne per iſpedito per avere tutta la macchina in convulſione. Eſcì in breve ora di pericolo, e fu libero d' antiche febbri moleſte. Una fava nuova non più uſata con la ſemplice infuſion breve di dodici ore produſſe il medeſimo pauroſo effetto a due Fantolini, uno afflitto dalla terzana, e l' altro dalla quartana, a troppo caro coſto liberandoli dalla ſebbre. Si vede con quanta ragione gli Autori ne beſtemmino l' uſo in ſoſtanza, la quale vien ricordata da alcuni grattugiata al peſo di otto o dieci grani. Un giovine Geſuita in Parma, il quale non ſon molti anni facevane diſordinato uſo, fu trovato morto a piè del letto. Ad una Signora travagliata da febbri periodiche fu data da un Frate una mezza caſtagna dell' Ipocaſtano, grattugiata in tazza d' acqua. Sentì queſta eſſa pure poco dopo lo ſtrozzamento deſcritto con tanto affanno e paura, che mi aſſerì coſtantemente che ſaria morta, ſe per fortuna nell' atto ſteſſo non aveſſe per vomito rigettato l' inſano medicamento. Soprattutto però fu ordinario e comune nell' anno 1782 queſto moleſto ſenſo di ardore ſoffocativo lungheſſo al collo e allo ſterno, nel catarro epidemico univerſale. Tal fu nell'

(*a*) Op. tom. 2. pag. 207.

epidemia dell' anno 1743 ſecondo l' *Huxham*, ed in quella dell'anno 1762 ſecondo M. *Saillant*. *Omnibus adfuit pectoris quædam ſtrictura & gravitas permoleſta* (*a*). „ Tous en général ſentoient une ardeur très-vive le long de la trachée- „ artere juſqu' au cartilage xiphoide: quelques-uns la reſſen- „ toient le long du goſier juſqu'à l'eſtomac, comme ſi l'eſo- „ phage eût été enflammé de même que la trachée-artere (*b*). Ippocrate ſteſſo notò queſto primo effetto de' funghi: *Pauſaniæ filiam ex crudi fungi eſu anxietas tenebat, ſtrangulatio, dolor ventris* (*c*).

Dov' è uno ſtimolo, un irritamento, ivi accorrono non ſo per quale meccaniſmo in copia affollati gli umori. S' intende queſto ſe ſiano preſenti numeroſi canali che ve li portino; altrimenti i ſiti irritati ſi contraggono e riſſeccano. In bocca, e nell'eſofago, e dentro lo ſtomaco ſono naturalmente aperti molti canali che dan luogo a fluire in copia la ſcialiva, e gli umori gaſtrici; maſſimamente in tempo che ſi maſtica il cibo, e s' inghiotte. Tocche queſte parti dal veleno, piovono copioſa umidità glutinoſa; ed ecco come dai funghi infetti naſca e producaſi una copia abbondante di ſcialiva e di muco, che fa un facile ptialiſmo, e ſi rigurgita dallo ſtomaco: che è parimenti uno de' primi effetti del loro veleno.

Il terzo effetto meſſo da *Ippocrate* ſono i dolori di ſtomaco e di ventre. Ma io credo che ſia da preporre con *Avicenna* ai dolori la diſtenſione flatuoſa: mentre i dolori più che da altro dal flato provengono. Diſceſa allo ſtomaco la velenata maſſa, ed in parte diſtribuita per il lungo tortuoſo canale degl' inteſtini; ſecondochè più o meno è applicata e ſi ferma ad irritare le interne tonache, mette qua e là coſtrizione e ſpaſimo che rinſerra a certi tratti l' aria: che quindi per eſſere elaſtica ſi dilata e creſce, ed enormemente diſtendendo forza le fibre con loro dolore ad allungarſi. Così in un tempo ed il flato naſce, e tormentano i dolori. Queſti dolori ſono da *Avicenna* ſpiegati col nome di pungimen-

(*a*) De aer. obſ. 1743.
(*b*) Tabl. pag. 75.
(*c*) Epid. 7. n. 89.

ti, ma più somigliano al morso. E questo è per l'irritamento e calore che fa il veleno inchiuso e fermato. Questa distension flatuosa, questi dolori furono molto maggiori in una delle quattro nominate persone; nella quale fu tardo il vomito e niuna la diarrea. Il *Boeravio* cerca perchè mai certi veleni più offendano lo stomaco che le altre parti del corpo. Non sa di questo fenomeno altra miglior ragione trovare, che in credere i nervi del ventricolo dotati di speciale e più viva sensitività: *ergo ventriculus ejusque nervi ab auctore naturæ donati sunt potestate inexplicabili ex natura nervorum, ita ut venenum in ventriculo, tale non sit alibi* (*a*). Io credo però che questo sia unicamente per l' ampiezza e posizione del ventricolo strettamente serrato al piloro; per cui fan dimora più lungamente le velenose sostanze, e maggior impressione. Si vede che queste discese agl' intestini non cessano di esser dannose, ma essi pure offendono, distendono, corrodono e sfracellano; producendo borbottamenti, coliche cruciosissime, diarrea e dissenterie micidiali: essendo colà dentro, come nello stomaco, egualmente sensibili i nervi. Spiego io in questa maniera la distensione del ventre, non trovando ne' funghi quelle qualità che possano dare aria elastica o fissa, fermentando o putrefacendosi. *Ventriculi*, dice l' Allero, *a veneno sumpto irritati, & clausa habent accurate ostia, & sunt distentissimi: ea venena aerem non generarunt, sed irritarunt ventriculum* (*b*).

Sviluppandosi a poco a poco il veleno dentro allo stomaco, ed applicandosi incessantemente all' interna sua superficie, s' accresce per l' irritamento la forza contrattile delle sue tonache, e tirato in consenso il diaframma, ed i muscoli dell' addomine, alla forzata costrizione del ventricolo succede il vomito: ottimo provedimento della natura per liberarsi per la via più breve di ciò che dentro le nuoce. Come degli uomini chi più chi meno (secondo hanno in una o altra maniera configurato il costato davanti, e secondo hanno più o

(*a*) De morb. nerv. pag. 183.
(*b*) Physich. tom. 6. p. 185.

men forti i mufcoli, fenfitive od irritabili le fibre) fono inclinati e facili al vomito: in chi queſto prontamente e pienamente fuccede, fottraefi l' efca al foco, previenfi l'infiammazione e la cangrena; e preſto, tolta la caufa del male, fon falvi dal rio veleno. Rade volte però così fortunatamente accade prima che una porzione della venefica materia, dal primo irritamento follecitata per la diretta via, non paſſi a far fentire i fuoi triſti effetti agl'inteſtini. Onde il più delle volte ben preſto al vomito fuccede la diarrea, e la diſſenteria. Evacuazioni anch' eſſe utili, ma non tanto quanto il vomito: perchè nel lungo tratto e nella tortuoſità degl' inteſtini ſi dà campo al veleno di fvilupparſi del tutto, e di fpiegare internamente ogni fua rabbia. Se fuperficiale fia e paſſeggiera di uno in altro fito la infezione, fi viene in fine ajutando l'accorfo perenne, che ivi fi fa di umori, a brevemente ufcire di pericolo: altrimenti s' infiammano le parti tocche dal veleno, e le vicine; e s' infiammano di tal forte d' infiammazione, che preſto paſſa il morbo alla cangrena ed alla morte.

Più difficile fi è render ragione della itterizia che gli Autori riferifcono di aver qualche volta veduto a fuccedere al veleno dei funghi. Se queſta è paſſeggiera e breve, può fpiegarſi per una convulſione che ſtringa e ferri il condotto del fiele all' inteſtino duodeno. Ma fe ſtabil rimane anche dopo diſtrutto il veleno, dobbiamo ad altra caufa ricorrere, che una convulſion breve non può nè onninamente nè ſtabilmente chiudere il detto canale. Io fono più inclinato a credere che in tal cafo fi debba incolpare un qualche calcolo che fia per accidente nella vefcichetta del fiele. Facile è allora il conofcere come per forza di uno fpaſimo, che ferra, venga forzato il calcolo nel condotto biliofo e ſtabilmente del tutto l' otturi: onde fia coſtretto il fiele a rigurgitare nel fangue: dove depoſitato alla pelle la tinga di un color dorato; per cui i latini diſſero il morbo *Aurigo*. Quel colore però ch' è bello a vederſi nell' oro, è brutto nella pelle, *non enim hominem decet, quod in lapide pulchrum fuerit*, come diſſe

l' *Areteo* a questo proposito (*a*). E' cosa molto ordinaria il trovarsi di questi calcoli ne' cadaveri anche di quelli che in vita non aveano patito d' itterizia. Il *Morgagni* nell'ultima sua grande Opera ne accenna diecinove esempj da sè solo veduti (*b*). Nel sopra addotto caso di M. *Lemonnier*, perchè l' itterizia successa al veleno dei funghi non fu per calcolo, fu effimera di poche ore.

Ma già un altro ordine di sintomi cominciano ad apparire, che tutta rivolgono a sè la nostra attenzione; essendo tali che ben chiaro dimostrano essere il veleno dallo stomaco penetrato a contaminare il sangue, ad infettare gli spiriti, a convellere i nervi. Primi sono i deliquj d' animo. In questi si rallenta il respiro, si oscura il polso, si perdono le forze, e si copre il volto di un pallor di morte. Nascono per l' indebolimento dei moti alterni del cuore per causa di venefiche particelle ostili che istupidiscono i nervi. Son facili ad accadere anche per il solo difetto dello stomaco, quando per viziose fermentazioni si forma in esso un' aria fissa nemica dello spirito vitale. In tal caso presto si sciolgono, quando l' aria esce per rutto o passa agl' intestini. Le donne dicono che si stacca qualche cosa dallo stomaco. Chiunque volesse sapere qualche cosa di più su questo articolo, legga la grande Opera di M. *Senac* al libro quarto, capo decimo terzo. Oppure il libro in forma di Catechismo, ultimamente stampato in Parigi per ordine del Governo, scritto da M. *Gardane*, in cui degli svenimenti unicamente si tratta.

Da questo stupore o intormentimento dei nervi nascono la prostrazione di forze, e l' insuperabile senso di frigidità agli estremi. Contro di questi ritardamenti si rialza la natura con movimenti convulsivi idonei a rimovere un fatale ristagno di umori. Gli stimoli di una materia irritante sparsa nel sangue, e forse anche ne' nervi, eccitano le arterie ed il cuore a più frequenti contrazioni, onde nasce la febbre: ma questa nel tempo stesso è impedita dagli spasimi, e dalla freddezza de' nervi. Non può perciò alzarsi il polso, che malgrado la febbre si rimane piccolo e ristretto. In questo contrasto

(*a*) Lib. 1. cap. 15.
(*b*) Epist. anat. med. 37. art. 27.

di opposte forze patisce l' infermo angustie ed affanni intollerabili, freme, delira, e teme; o vinto dal morbo dorme tranquillamente di un mortale sopore insuperabile, come se fosse apoplettico. Se muore, ha prima delle macchie livide o gialle nella superficie del corpo; e dopo morte si scoprono nel suo stomaco e negl' intestini nere impressioni, che sono segni di una universale cangrena. Chi sopravvive a tanta pena, attribuir dee la sua sorte al vomito, alla diarrea, al facil sudore, che soli possono asportare con sè dal corpo il rio veleno introdotto: ma porta con sè a lungo i segni d' esserne stato tocco e malaffetto.

L' oppio fa il sonno, il lauro ciliegio la paralisia, la tarantola voglia di ballare, il ranuncolo scellerato il riso sardonico, le cantaridi il brugior d' urina; e molti altri veleni singolari e speciali effetti producono. Il solo veleno dei funghi contiene in sè la malizia di tutti, e varj moltiplici effetti produce secondo che è in maggior copia ingollato, ed in maggior copia dentro le vene s' intrude.

PARTE SECONDA

Qual sia il Preservativo del veleno dei Funghi.

UN rio veleno atro indomabile, che sta nascosto ne' funghi, dal solo uomo non temesi. I buoi, le capre, le pecore, i cavalli, che si nutrono senza paura d' ogni sorte di piante, il solo fungo, che pur è pianta al pari dell' altre, e dai suoi proprj semi nasce e cresce, il solo fungo rispettano, e lo lasciano qualunque sia e di qualunque specie intatto ne' campi e ne' prati, per pastura di vermi, e delle formiche: quasi per paura del suo veleno. L' uomo non per necessità di vitto, ma per non so quale ghiottoneria, stanco e sazio di cibi eletti migliori, ne fa alle mense sue parte: e si legge tal cibo desiato ogni giorno da Papi e Imperadori. Vedete là Tiberio Cesare cruciato da dolori dopo mangiati i funghi esalare lo spirito (se pur d' altra specie non fu il velen che l' uccise). Nerone il sa, e vede nella sua corte ammazzati dai funghi il prefetto de' vigili, i tribuni, i centurioni; ma non cessa per questo di chiamare i funghi cibo degli

degli Dei. Papa Clemente VII. il sa, ma vuole ogni giorno tal vivanda alla mensa, finchè egli stesso, per quanto alcun pensa, avvelenato ne muore. Gli uomini da questi e da altri quotidiani esempj moltissimi avvisati non imparano ad astenersene: che sembra innata la presunzione nell' uomo di affrontare più tosto che di fuggire i pericoli. Quindi veggiamo teneri fantolini arrampicarsi su alti e fragili alberi, sdrucciolare su gelate acque, trascorrere vive fiamme accese, attraversare cavalli in corso. Nè son più saggi gli adulti, che nulla temendo di essere sbranati, sommersi, precipitati, lottano con bestie irate, premono su tarlati legni il dorso al mare, s' alzan nell' aria appesi a mal sicuri palloni.

Abbondano nelle piazze venali d' ogni sorte, ed in ogni stagione i funghi, perchè trovano compratori. Nè li Magistrati che vegliano alla salute de' popoli tal merce proibiscono:

Argentum atque aurum facile est, lænamque, togamque
Mittere, boletos mittere difficile est. Mart.

Voluttuoso veleno, chiamolli Seneca (*a*), e Plinio, *quæ voluptas tanta ancipitis cibi* (*b*)?

Poichè adunque da tanti esempj, in tanti secoli non si sono persuasi gli uomini a lasciare tal cibo, poca speranza è che lo lascino in avvenire. Umana cosa è dunque il cercare se siavi in natura un qualche preservativo che lo renda meno nocevole, e trovatolo insegnarlo ad essi per loro salvezza.

Ai seguenti capi si può ridurre e restringere il preservativo dai funghi avvelenati

1 Alla scelta della specie, 2 al sito ove crescono, 3 al tempo della loro età, 4 al purgarli bene, 5 al farli lungamente bollire, 6 allo sperimento del loro sapore, del pane, e dell' erbe con essi bolliti, 7 al friggerli in olio bollente, 8 agl' ingredienti correttivi, 9 al mangiarli dopo altre vivande, 10 al mangiarne parcamente, 11 al soprabbere copiosa umidità, 12 all' esercizio del corpo dopo il pasto.

Francesco Seguieri ad otto sommi generi riduce tutt' i fun-

(*a*) Epist. 95.
(*b*) Hist. nat. lib. 22. cap. 23.

ghi, che si usano per cibo in queste contrade. Il fungo propriamente detto, il porcino, il boleto, il pseudoboleto, il coralloide, l' agarico, il licoperdo, il tartuffo. Questi si dividono quasi tutti in altre specie. Vi sono quattro specie di fungo propriamente detto. 1 *Fungus pileolo lato & rotundo*. C. B. Pin. 370. che dicesi volgarmente *funghetto*. 2 *Fungus angulosus & veluti in lacinias sectus*. C. B. Pin. 371 volgarmente detto fungo giallo, e *spongiola gialla*. 3 *Fungus esculentus, pileolo superne rubro, inferne primum albo, deinde obscure luteo, pediculo longiore & crassiore semper albo*. Mich. N. Pl. Gen. 155. volgarmente *fungo rossetto*. 4 *Fungus esculentus, ex uno pede multiplex, seu lutei pallescentis coloris, pileolo semiorbiculato, viscido, pediculo cilindrico*. Mich. N. Pl. Gen. 191 volgarmente *funghi chiodetti*.

Il porcino è di una specie sola. *Suillus esculentus, superne pulchre fulvus, inferne citrinus & subtilissime perforatus*. Mich. N. Pl. Gen. 128 n. 9 volgarmente *pressanella*.

Del boleto vi sono tre specie. 1 *Boletus esculentus, rugosus, fulvus*. Mich. N. Pl. Gen. 203 volgarmente *spongiola*. 2 *Boletus esculentus, rugosus, albicans, quasi fuligine infectus*. Mich. N. Pl. Gen. 203. 3 *Boletus esculentus rugosus, amplior & orbicularis*. Mich. N. Pl. Gen. 203.

Del pseudoboleto è una specie sola. *Phalloboletus esculentus, pileolo parvo conico, ex fulvo subobscuro, pediculo leucophæo fistuloso*. Mich. N. Pl. Gen. 203.

Il coralloide è pur un solo. *Coralloides flava*. Mich N. Pl. Gen. 209 volgarmente *manine*.

Sei specie sono di agarico. 1 *Agaricum esculentum castaneæ adnascens, latissimum, hepatis facie, superne ex rubro ferrugineum, interne sanguineum, subtus ochroleucum*. Mich. N. Pl. Gen. 117. 2 *Agaricum esculentum, squamosum glabrum, superne obscurum, inferne subalbidum & lamellatum* Mich. N. Pl. Gen. 122. 3 *Agaricum, sive fungus laricis*. Mich. N. Pl. Gen. 110. 4 *Agaricum igniarium, agarici officinalis facie, sed non amarum, superne ex albo cinereum & glabrum, inferne primum ejusdem coloris, deinde obscurum, argutissime & densissime perforatum foraminulis rotundis*. Mich. N. Pl. Gen. 118. 5 *Agaricum quercubus & ilicibus adnascens, ferrugineum & glabrum, inferne album, argutissime & densissime perfora-*

tum foraminulis rotundis. Mich. N. Pl. Gen. 118 volgarmente lingua di rovere. 6 *Agaricum ſquamoſum, ſuperne cinereum & glabrum, inferne lamellatum & album*. Mich. N. Gen. Pl. 123.

Il licoperdo è di due ſpecie, in certi ſiti ſolamente uſato per cibo. 1 *Lycoperdum alpinum maximum, cortice lacero*. Inſt. R. H. 563. 2 *Lycoperdum vulgare*. Inſt. R. H. 563.

Il tartuffo è un ſolo, e diceſi *tuber*. Matth. 544. Il *Micheli* lo divide in *tuber brumale, pulpa obſcura odora;* ed in *tuber æſtivum, pulpa ſubobſcura minus ſapida ac odora*. N. Pl. Gen. 321.

Fra tutti queſti generi e tutte queſte ſpecie di funghi il ſolo tartuffo è ſempre innocente, e ſenza veleno. Queſto ſuo pregio ſi ſpiega ottimamente nel noſtro ſiſtema. Cioè perchè naſcendo eſſo e creſcendo ſotterra, è al coperto dalle moleſtie che gli potrebbono recare le moſche e le farfalle. Volgarmente però non ſi tiene, nè ſi nomina per un fungo. Fra i funghi così volgarmente detti, il più ſicuro e rade volte infetto ſi è ſempre creduto e ſi crede il boleto. *Omnium igitur fungorum hi minimum ſunt noxii*, dice Galeno (*a*). Lo *Stentzelio* pretende che il nome di boleto altro non voglia dire in greco, che fungo di prato (*b*). Ma egli s' inganna, mentre altro non ſignifica che *globoſo*: provenendo da βῶλος, gleba (*c*). *Boletus eſt plantæ genus ad fungos accedens, a quibus differt capitulo circa pediculum clauſo:* dice il *Seguieri*. Per queſta chiuſura accoſtandoſi alla rotondità diceſi globoſo, *boletus*. Per avventura queſta ſua chiuſura lo fa di una ſuperficie dappertutto difeſa e coperta di dura pelle, non tanto facile ad eſſere penetrata dalle punture degl' inſetti che cercano di depoſitare le loro uova in parti tenere e mocciofe: e da queſto ritrae la ſua innocenza. Come veggiamo i moſcherini volar dattorno ad un pero, e riſpettarlo ſe è d' intatta ſcorza, e roderlo dove ſia mancante. Non è però del tutto impenetrabile il boleto, e però eſſo pure

Ppp ij

(*a*) De alim. fac. lib. 2. cap. 69.
(*b*) Not. in Lindeſt.
(*c*) Vid. Scapula.

qualche volta fu trovato infetto dallo ſteſſo Galeno: *equidem novi quemdam cui, poſt boletorum non ſatis elixorum (qui innocentiſſimi eſſe putantur) uſum largiorem, os ventriculi preſſum ac gravatum, coarctatumque fuit, difficilem habuit reſpirationem, & in animi deliquium incidit, ſudoremque frigidum ſudavit* (*a*). Il ſecondo luogo fra i funghi innocenti hanno, ſecondo Galeno, Avicenna, Paulo ed altri, quelli che i Greci chiamavano *amanitæ*. Non ſi ſa quali foſſero, e di quale ſpecie. Preſſo noi dopo il boleto tienſi per ſicuro il porcino. Ma per eſſo leggermente ſenza preparazione arroſtito, ho veduto ſei perſone in un tempo al ſommo maltrattate da diſſenteria: così che a gran pena con lunga cura ho potuto ſalvare ad eſſi la vita.

Quanto al ſito dove ſi colgono i funghi, i prati ed i campi aperti ſono da eleggerſi. Quivi l' aria è più battuta dal ſole, e moſſa dal vento, ed in conſeguenza è meno abitata dagl' inſetti: i quali più volentieri ſi raccolgono dove ſono alberi e ceſpugli, che li diſendano dalle intemperie delle ſtagioni: *pratenſibus*, dice *Orazio*, *optima fungis natura eſt* (*b*). Sono anche in queſti ſiti meno frequenti le biſcie e gli altri animali ſoſpetti di veleno.

L' età de' funghi è di poche giornate. Quanto più giovani ſi colgono ed eleggono, tanto meno ſono ſoſpetti di veleno. Accoſtandoſi con la maturità ſempre più alla corruzione, e tempo ſi concede maggiore agl' inſetti di depoſitare in eſſi i lor vermicini o le uova; e dall' odore più forte che menano vi ſono tratti ed incitati. I migliori funghi, dice il *Lemery* (*c*), e più ſicuri ſono quelli che naſcono e creſcono in una notte.

Perciò è neceſſario purgarli attentamente; rigettando i troppo adulti, i macchiati, i corroſi; e ſpaccandoli per ogni parte, tanto per oſſervare ſe ſiano verminoſi, quanto perchè bollendo, più facilmente fuor n' eſca il veleno, ſe ſono infetti.

La bollitura ſopra tutto è il più utile e neceſſario argo-

(*a*) De alim. fac. lib. 2. cap. 69.
(*b*) Serm. lib. 2. ſat. 4.
(*c*) Tratt. univ. p. 136.

mento per iſpogliare i funghi della velenoſità. Perchè la figlia di Pauſania, preſſo *Ippocrate*, mangiò funghi non bolliti, fu per eſſi attoſſicata: *Pauſaniæ filiam ex crudi fungi eſu anxietas tenebat, ſtrangulatio, dolor ventris* (*a*). Il *Valleſio* vuol qui che Ippocrate abbia meſſo la parola di crudo, per ſignificare ed avvertire che non fu tolta ai funghi la naturale loro freddezza, con cui nuocono, col fuoco. *Mulierem hanc non eo læſam eſſe conſtat, quod venenoſum ederet, ſed quod crudum, ob id anxietas eam tenebat & ſtrangulatio, non potente ventriculo eum conficere, & flatu frigido inde verſus cor & reliquas corporis partes delato* (*b*). Ma gli accennati ſintomi ſon di veleno, e non puramente di grevezza di ſtomaco. Si dee dunque intendere della cottura, che vale a ſpogliare i funghi per quanto è poſſibile della loro velenoſità. Il boleto, benchè ſalubre, fu ſecondo *Galeno* nel caſo da lui accennato nocivo, perchè infetto non fu purgato con la bollitura: *non ſatis elixorum*.

Preparati così e lungamente bolliti in molta acqua i funghi da perſona fedele, che abbia intereſſe proprio nella quiſtione, dovendone eſſo ſteſſo mangiare, ſe ne dee di eſſi fare il ſaggio. Si devono ben bene e a lungo tenere in bocca e maſticare, per provare ſe mandino una ſottil acrimonia che laſci in bocca calore e brugiore. Queſto è un eſperimento fedele e certiſſimo: perchè non è probabile che funghi, i quali quieti dimorando nello ſtomaco poſſono in eſſo nuocere per eſſere avvelenati, bene agitati nella bocca infranti, e preſſi al palato, non tramandino verun ſegno della loro forza di nuocere. Nell' *Ildano* ſi legge come il loro ſemplice tocco ha prodotto nelle mani e nel mento moleſtiſſimo brugiore, e pauroſa eroſione (*c*). Non è perigliofo queſto ſemplice ſperimento, che lo ſciacquarſi la bocca con acqua ed aceto, con vino, con latte può togliere ben preſto quella prima impreſſione veneſica. Il riſervarſi a fare queſto eſperimento dopo la ſeconda cottura, quando ſono preparati alla menſa i fun-

(*a*) Epid. 7. n. 89.
(*b*) Comment. ib.
(*c*) Cent. 4. oſſ. 36.

ghi, non ha più luogo, perchè gl' ingredienti aromatici, l' olio, ed il sale che allora si aggiungono, oscurano la conoscenza dell' acrimonia venefica se è presente, essi stessi producendo calore e brugiore. La donna cuoca nel nostro caso assaggiando i funghi bolliti, sentì in essi un insolito sapore, ed una insoffribile amarezza: ma non palesò il suo sospetto, per troppa voglia che avea di mangiarli: con che se stessa e gli altri avvelenò. Buono è lo sperimento del pane bollito coi funghi, che poi si dà ai cani ed ai gatti: purchè si avverta di trar sospetto dal loro vomito, e non dalla loro infermità: mentre queste bestie avendo facile e pronto il vomito, si liberano tosto dal veleno. Vomitò un gatto il pane coi funghi infetti bollito nel caso nostro narrato, ma non fu conosciuto in tempo. Nè è da trascurare l' altro usato sperimento del petrosemolo coi funghi bollito: mentre ogni erba ad ogni stranio tocco perde il suo bel verde, ed ingiallisce, o s' oscura.

La seconda cottura in olio è di doppia utilità. Si fa che la forza del fuoco è grandissima, e produce alterazioni e mutazioni sensibili nelle sostanze. Come il fuoco altera, distempera, e consuma ogni cosa migliore, così fa anche d' ogni altra cosa iniqua e peggiore. L' acqua bolle a gradi duecento e dodici sopra la congelazione: ma l' olio prima di bollire riscaldasi a gradi seicento: è però due volte più dell' acqua bollente atto ad alterare le sostanze che in esso bollono. Il *Boeravio* così ne parla. *Quando autem corpora oleo ebullienti injiciuntur subito, tum ocyssime nanciscuntur crustam duram, fere lapidescentem, quæ colorem acquirit veluti oriri consuevit ab igne nudo, flavum, rubrum, nigerrimum denique. Materies autem reliqua, quæ latet intra hanc crustam, magno illo calore ambientis olei ebullientis agitata, motu repercusso, impedito, atque suffocato quasi mirifice intus mutatur, coquitur, digerit, maturescit* (*a*). L' altro vantaggio, che si ritrae a far bollire i funghi nell' olio, è quello che per esso s' inviluppano le acri venefiche particelle, e dentro si coprono le fibre dai loro stimoli.

(*a*) Elem. Chem. tom. I. pag. 377.

Non so quanto dobbiamo fidarci dell'aglio, del pepe e degli altri ingredienti aromatici e focosi, con cui si crede volgarmente di rimediare al veleno dei funghi. Questi sono stati imaginati dagli antichi: li quali stimavano di correggere con essi il veleno de' funghi, che stimavano freddo, crasso, e vischioso. Ma dopo che oggi si sa che qualunque sia il lor veleno è acre e caustico, guardar bene dobbiamo di non accrescere la sua forza con tali ingredienti. Quando non fosse che servano questi a solleticare lo stomaco e gl' intestini a più presto liberarsi dal nemico accolto: ovvero a confondere con le varie lor qualità sensibili la sua malvagità.

Non può essere che ottimo provvedimento per meno risentire il veleno de' funghi se per disgrazia s'avesse ingollato, che trovi questo lo stomaco pieno di cibo e di bevanda: così non tocca in un punto solo, e con tutta unita in un tempo stesso la sua forza, le fibre dello stomaco, e meno può nuocere. Sarà dunque cauto riserbare i funghi sul fin del pasto.

E' certo che nuocono i veleni non tanto per la qualità loro nemica, quanto a misura della lor quantità. Pochi grani di oppio non ammazzano, e si tollera senza danno un grano solo di sublimato corrosivo dilavato in molt' acqua. Si faccia dunque parco uso de' funghi, che gran danno ad ogni tristo incontro non se ne ritrarrà. Per questo dai riseccati funghi, che si riserbano a solo uso di condimenti o salse, non si è veduto mai che alcuno s' infermi: non già perchè privi siano di umidità; ma perchè così in piccola quantità s' ingollano.

Un fuoco che subitamente passa per vivo che sia non abbrugia le vesti nè arrostisce le carni. Mangiati che si abbiano i funghi sarà bene subito dopo il pasto muovere il corpo, distenderlo e scuoterlo con qualche blando esercizio, acciocchè cangiata direzione al ventricolo, trovi il cibo più pronto l' esito dal piloro, nè si fermi lungamente in esso ciò che può nuocere.

Chi non vede come questi avvertimenti e provvedimenti non siano utilissimi ed efficaci a distinguere in tempo i funghi avvelenati dai sani, per questi eleggere, quei rifiutare; a prevenirne i cattivi effetti peggiori, se si abbiano per trista

ſorte mangiati gl' inſetti? Ingiuſta però è la ſentenza, irragionevole la condanna contro de' ſunghi pronunciata dal *Geoffroy*: *Hæc ſymptomata, quæ fungi adeo celeriter in ventriculi & inteſtinorum membranis & fibris nerveis concitant a particulis ſalino ſulphureis, ſubtilibus, acribus & cauſticis provenire videntur. Reipſa exſiccati, & bene cum aqua calida eloti non ita nocent, quia partes illæ acres cauſticæ exſiccatione vel lotione avolarunt, aut exſtractæ fuerunt. Nonnulli etiam eorum noxam emendare putant aceto vel oleo, quæ eaſdem particulas retundunt vel involvunt. Verum quoquo modo etiam ſumptuoſiſſimo præparati ad fimetum, unde oriuntur, relegandi ſunt; fugiendique cane pejus & angue ab omnibus ſanitatis ſtudioſis* (a).

PARTE TERZA.

Quali ſiano i più ſicuri rimedj al veleno dei funghi.

I Rimedj preſervativi da un qualche morbo, quantunque ſiano dagli Autori lodati come efficaci e giovevoli, laſciano ſempre qualche dubbio della lor forza; perchè non ſi è mai ſicuro ſe un morbo ſia veramente per naſcere, o no; ſe nato, ſarà benigno e lieve, ovvero forte e micidiale. Non è così di quelli che curano i morbi già nati e preſenti, perchè noti ſono gli ordinarj e conſueti andamenti e pericoli di ciaſchedun male; e puoſſi miſurare con la ſperienza qual forza abbiano contro di eſſi i preſcritti medicamenti. Ma fra un numero ben grande di varj medicamenti regiſtrati ne' libri come giovevoli, li più ſicuri certo ſaranno quelli che non ſolo nella pratica, ma che altresì nella teorica ſi conoſcono dover eſſere più adattati a diſtruggere dentro di noi le cagioni morboſe, qualora queſte ſian note. *Paratus ſum defendere*, dice l' Offmanno, *opuſc. med. Phyſ. pag.* 59, *omnem medicam praxim fallacem, inſidam, confuſam, difficilem & periculoſam eſſe ſine theoria*. Si ha qui a fare con un veleno rodente

(a) Meter. med. par. 2. p. 265.

rodente infiammativo, nemico degli ſpiriti e de' nervi. Prima intenzione ſarà quella di toſto ſcacciarlo fuori del corpo. Seconda di ſtemperarlo e dilavarlo. Terza d' involverlo, e coprire le fibre dai ſuoi ſtimoli. Quarta di rimediare ai ſintomi e danni che internamente produce. Corriſpondono a queſte intenzioni i vomitorj, i purganti, i diluenti, gl' involventi, i ſudoriferi, i calmanti, il contravveleno. De' quali parleremo diſtintamente, perchè come avverte il *Boeravio*, niuno ſpecifico medicamento ſi dà in natura, che tale non ſia, per eſſere adoperato a tempo e luogo: *neque vero ipſe ullum ſpecioſum medicamentum agnoſco, quin ſolo tempeſtivo uſu tale fiat* (*a*).

I vomitorj fanno il doppio effetto deſiderabile: di ſtaccare cioè, con produrre un moto inverſo nel ventricolo, i funghi infetti ſe vi ſteſſero aderenti con la loro naturale viſchioſità; e nel tempo ſteſſo di portarli fuori per la via breve del vomito, onde paſſando al baſſo non portino il loro veleno agl' inteſtini. Coſtituiſcono perciò queſti il primo e principale medicamento al noſtro uopo; e giuſtamente quindi ſono lodati dagli Scrittori di tutt' i ſecoli. Biſogna però guardarſi da quei vomitorj, che ſono in ſe ſteſſi venefici, come i tolti dai minerali, e da certe piante nemiche. Perchè trattandoſi qui di peſſime impreſſioni che far poſſono i funghi avvelenati nello ſtomaco e negl' inteſtini, queſti ſteſſi trovando ſpoglie di mucoſità le interne tonache, o infiammate e corroſe, potrebbono accreſcere quel danno che ſi cerca con eſſi di togliere. Caſochè i primi ſintomi indicanti il veleno ſi ſcopriſſero di notte quando non ſono in pronto nè Medico nè medicamenti, ſi potrà comporre in attimo un vomitorio miſchiando ben bene in mezza libbra di acqua tiepida due o tre once di olio comune, o di butirro. Altrimenti ſe è in pronto, ſarà meglio ſervirſi nel modo medeſimo dell' olio di mandorle dolci: ajutando col dito in gola o con una penna il vomito ſe foſſe tardo o reſiſteſſe. Se con tali ajuti non ſucceda il vomito, con più forte ſtimolo ſi procurerà di ec-

(*a*) Aph. præf.

citarlo: usando cioè due o tre once di ossimele scillitico, misto con eguale porzione di olio di mandorle dolci; oppure una mezza dramma d' ipecoacanna spolverizzata con uno scrupolo di nitro, dentro un lungo brodo di pollo. Ma come la ipecoacanna produce il vomito anche in dosi minori, sarà cauto usarla a tempo a tempo e partitamente, finchè se ne abbia il desiderato effetto. Nelle quattro persone da me ultimamente curate, non ho io creduto bene usare l' emetico, perchè essendo stato chiamato venti ore dopo i funghi mangiati, quando era già nata e spessa la diarrea, ho creduto discesa agl' intestini la velenata massa, da doversi per di sotto purgare. Mi accorsi dell' inganno, quando il purgante prescritto facendo l' effetto di vomitivo, sortirono per esso pezzuoli di funghi indigesti che ancora erano fermati nel ventricolo. Buono fu che il purgante abbia opportunamente al bisogno prodotto il vomito, che così più prontamente gl' infermi si sono liberati dal male. Che giuste non sono le ragioni contro dell' emetico addotte dal *Rondelezio*, e ricordate dal *Foresto*: *vult tamen doctissimus Rondeletius, licet in omnibus his, qui venenum sumpserunt, vomitus conveniat, in iis tamen qui ex usu fungorum periculo suffocationis laborant, minus convenire, sed potius clysteribus, medicamentis purgantibus deorsum deturbandos esse, & os ventriculi claudendum adstringentibus, ut malo cotoneo, pyro sylvestri* (a). L' ardor soffocativo di gola non è effetto del solo veleno de' funghi, come sopra si è osservato, ma di altri ancora che sian presi per bocca. Come in questi secondo *Rondelezio* il vomito è buono, così lo è in quello de' funghi. Fermandosi essi nello stomaco a spargere in esso il veleno, per breve via escono col vomito: dove tratti al basso per gl' intestini, resta ad essi tempo di tutta in essi spargere la loro velenosità. I danni, che risalendo far ponno all' esofago, facilmente si tolgono con bevanda latticinosa e rinfrescativa. Non è così sicuro e pronto l' effetto de' purgativi quanto quello de' vomitorj: mentre i purgativi non vagliono sempre a portar fuori dello stomaco negl' intestini le materie che lo ingombrano; ma

(a) Obs. tom. 1. pag. 579.

trovandole groſſe e aderenti, eſſi ſteſſi paſſano e queſte laſciano a dietro.

Importando moltiſſimo il ſottrarre il più preſto che ſi può la materia venefica per ogni via e modo, quantunque lodevole ſia l' effetto de' vomitorj, e corriſponda all' eſpettazione, non ſon da omettere dopo quelli i purgativi, per vie meglio nettare lo ſtomaco, e ſopra tutto per portar fuori dal ſeceſſo qualche porzione di morboſa inſetta materia diſceſa negl' inteſtini. Nè ſon queſti da ometterſi preſente lo ſcorrimento del ventre, ſul ſuppoſto che la natura faccia da sè quel che far deono i medicamenti. Quanto è più forte la diarrea, tanto indica maggiore la quantità e la forza del veleno agl' inteſtini diſceſo; e tanto maggiore la neceſſità di ſollecitamente portarnelo fuori. Eſſendo per lo più in queſti caſi col ventre ſcorrevole uniti crucioſi dolori, queſti indicano che nel tratto inteſtinale mette il veleno delle ſpaſmodiche contrazioni, per le quali ritardaſi la ſeparazione dello ſteſſo, e v' è pericolo che con la dimora produca colà dentro peſſime impreſſioni fatali. Per queſto io amo in queſta circoſtanza i purgativi che operano per fermentazione più toſto che quelli che operano per una ſemplice virtù ſtimolante. Quelli ſervono a dilatare il tubo inteſtinale coll' aria e col flato che ſuſcitano, e così apreſi la via al nemico che paſſa: laddove i purgativi ſtimolanti mettono qua e là ſpaſimi e contrazioni che ritardano l' uſcita al veleno. La manna, lo zucchero, il miele, ſono i rimedj purgativi che dentro il corpo facilmente fermentano. Se ad eſſi aggiungaſi un qualche ſtimolo di altro purgante, rendeſi più ſollecita e ſicura la loro operazione, e per conſeguenza ſaranno meno durevoli que' dolori che eccitar poſſono col dilatar gl' inteſtini. Nelle botteghe ſtanno preparati molti rimedj in tal maniera compoſti; fra i quali i più uſitati al dì d'oggi ſono lo ſciloppo di fiori di perſico, lo ſciloppo roſato ſolutivo, il miele parimenti roſato ſolutivo: ogn'un de' quali ſi può uſare al peſo di quattro o ſei once dilavato con acqua cordiale. Con la manna, col cremor di tartaro, e con la ſena ſi lavora quella pozione che diceſi magiſtrale: queſta è il più pronto e meno incomodo purgativo che ſi abbia in medicina: accomodato ad ogni età e condizion di perſone, regola-

tane la dose da tre once a sette. Se all' uso di questi rimedj prontamente adoperati felicemente avvenga che tutto il morbo cessi, non sarà uopo reiterarli. Ma se qualche sintomo rimane che mostri sussistere ancora il bisogno di altra purga, si useranno allora rimedj più blandi che senza danno due o tre volte si possano replicare. La cassia in questo caso, i tamarindi, il siero di latte raddolcito collo zucchero o col miele, l' olio di mandorle dolci, o di semi di lino, potranno bastare. Con la cassia, coi tamarindi, e con altri blandi ingredienti si lavora una conserva detta del Donzelli, la quale sta preparata al bisogno nelle botteghe. Sarà bene il prendere i detti medicamenti in bevanda per la loro più pronta operazione. Non so perchè il *Rondelezio* ami più tosto nel veleno de' funghi che si diano in forma di pillole (*a*); le quali, massimamente se sono inargentate, tardi si disfanno, non operano nel ventricolo, ma portano il loro effetto all' estremo degl' intestini. Di questi rimedj purgativi si potranno anche far dei cristieri: che ajuteranno a portar fuori del corpo le sospette materie, le quali con danno nelle grandi cavità dei crassi intestini si potrebbono nascondere, ed occultarsi ai purgativi, che dall' alto discendono.

Quantunque ogni veleno sia tenacissimo della propria indole e difficilmente se ne lasci spogliare, non ostante sparpigliato che sia ed in molta acqua dilavato e sparso, meno è atto ad offendere. Il più potente veleno è il sublimato corrosivo: ma questo pure, se sia in molta acqua o altra materia diviso, tollerasi dall' uomo senza danno; e se ne forma un prezioso rimedio antivenereo, oggi decaduto di fama, ma non son molti anni lodato da molti per infallibile. Proccurisi però nel veleno de' funghi di far uso quanto si può maggiore di bevanda acquosa qualunque sia: essendo senza dubbio l' acqua l' unico forse e miglior diluente. Perchè meno sia rifiutata dallo stomaco, si potrà raddolcire o inacidire a talento e gusto di ognuno, con qualche conserva, col miele, coll' aceto.

Gl' involventi servono al doppio fine: d' invogliere cioè

(*a*) Meth. cur. morb. cap. 37.

le punte venefiche, perchè meno ferifcano, e di coprire dalla lor forza le fibre. Si prendono dal cibo egualmente e dai medicamenti. Tutt' i farinofi in generale, i gelatinofi, i latticinofi, gli oliofi fomminiftrano e cibi e medicamenti per quefta claffe. Per nominarne alcuni almeno, ricordo il latte, il fuo butirro, il fuo fiero. Le decozioni di orzo, di biada, di altea, di fcorzonera. Gli olj di mandorle dolci, di femi di lino, di oliva. Le uova frefche forbili, il brodo fcipito di pollo, di vitello, di rana. Le emulfioni di mandorle, e de' femi freddi. Le gelatine di avorio e di corno di cervio. La muccellaggine di femi di cotogno, la gomma arabica, lo fpermaceti, il miele. Col purgativo, che fervì di emetico, e con una larga bevuta di fiero folamente colato, felicemente guarirono le quattro perfone tante volte rammemorate, fenza che aveffero bifogno di ricorrere inoltre a medicamenti.

I fudoriferi comincieranno a farfi utili allora quando appariranno fintomi del veleno introdotto nel fangue: effendo in tal cafo il fudore l'unica via per cui il veleno poffa fortire. Bifogna però qui avvertire che i più forti ed attivi fudoriferi che fi ufano con vantaggio in altri veleni introdotti per morfo o puntura, non fono ficuri nel veleno de' funghi introdotto per bocca. Perchè rifentendofi di tal veleno i primi trifti effetti nello ftomaco e negl' inteftini, effetti che portano all' infiammazione e cangrena, con rimedj focofi e volatili fi verrebbono ad accelerare anzichè a togliere i danni del veleno. Sono però da eleggerfi fra i fudoriferi quelli che più operano per quantità di liquido introdotto, che per virtù di droghe medicamentofe; fupplendo al difetto di quefte con le fregagioni, e con le coperte ful letto, ovvero col bagno. Il te chinefe, il te di veronica, che dicefi Europeo, il te degli Svizzeri, in calda ftagione ed in corpi difpofti al fudore poffono baftare. Son più forti le infufioni femplici, o le decozioni di altre erbe e fiori odorofi aromatici: come la meliffa, la menta, lo fcordio, l' edera terreftre, i fiori di fambuco, di camomilla. Il folo fpirito di vino, fecondo

avverte il *Boeravio* (*a*), ha il privilegio fra i medicamenti di penetrare a traverſo e a ſeconda de' nervi, e ſeco aſportare per la cute le infezioni più intime dello ſpirito o liquore de' nervi. Con eſſo ſi lavorano certe acque ſpiritoſe di meliſſa, della regina d' Ungheria, vulneraria, e ſimili, con qualche gocciola delle quali ſi poſſono le altre bevande rendere maggiormente ſudorifere: come ſi può fare altresì con lo ſpirito di ſale armoniaco, di corno di Cervio ſuccinato, e coll' olio animale del Dipellio. Nel caſo noſtro ove ſono preſenti convulſioni e ſpaſimi che impediſcono il ſudore, ſi rende neceſſario aggiungere un poco di oppio, ch' eſſo pure appartiene alla claſſe de' ſudoriferi, per la facoltà di ſedare le contrazioni de' canali, per cui ſono impediti i ſudori.

Fra li ſintomi che ſeco adduce il veleno dei funghi, altri ſono da ſorpaſſare, altri da calmare. Che non è ſempre vero quanto dice il *Boeravio* che *mitigando ſymptomata ſemper etiam aliquid de morbo primario tollitur* (*b*); nè quanto dice lo *Stalio*: *mitigando ſymptomata, numquam fieri poteſt, quin primario affectui præjudicium aliquod inde dependeat* (*c*). Son da calmare i dolori, la febbre, le convulſioni. Il ptialiſmo, il vomito, la diarrea non ſi deono impedire. Perchè quei primi ſintomi ſono d' impedimento al ripurgarſi delle veneſiche particelle: queſti ſecondi ſono tante vie aperte al loro eſito. Baſterà qui veder brevemente qual uſo ſi debba far del ſalaſſo, e dell' oppio, che ſono i più pronti e forti calmanti fra altri che ſi potriano addurre. Teniamo fermo con i noſtri antichi Scrittori che il ſalaſſo direttamente non conviene contro qualunque ſiaſi veleno, che abbatte le forze e lo ſpirito, agghiaccia le membra, colliqua gli umori nutritivi e li diſperde per vomito, per ſeceſſo, per ſudore. Come però indirettamente non poco può contribuire a frenare la febbri che troppo vive portano alla cangrena, a mitigare i dolori del ventre che metton remora al ſeceſſo, a ſcemare le convulſioni impeditive del ſudore, a divertire il corſo degli umori al capo per evitare l' apopleſſia, non è da omet-

(*a*) De morb. nerv. pag. 79.
(*b*) Prælect. tom. 5. n. 1244.
(*c*) Obſ. de febr. pag. 53.

tersi del tutto, massimamente dove sia o troppo copioso il sangue o troppo grosso e tenace. Dell' oppio non è da farsene uso al cominciamento del morbo, quando il veleno ancor si aggira a tormentare lo stomaco e gl'intestini. In questo tempo noi abbiamo bisogno di portar fuori del corpo la velenata massa o sia per vomito o sia per secesso. A questa essenziale e primaria intenzione la forza dell' oppio si oppone, che rallenta il moto peristaltico, e seda anzichè promovere lo scorrimento del ventre. Se il morbo per tal via curato dapprincipio presto finisce e non oltrepassa, con l' oppio resta superflua ogni altra cura. Ma se penetrato il veleno dentro alle vene, si manifestino segni che mostrino i nervi patire; allora già praticata a principio la necessaria purga comincia a farsi utile l' oppio, a sedare le convulsioni e le veglie, ed a promovere la traspirazione e 'l sudore, per dove possa uscire l' introdotto veleno. I buoni effetti veduti tal volta dalla triaca, dal diascordio, dall' Orvietano sono da attribuire più di tutto all' oppio che contengono.

Fu universale credenza de' nostri Antichi che ad ogni veleno abbia la natura in un altro veleno un antidoto prestato: *Ea est natura ut hominem occidat, nisi invenerit quod in homine perimat. Cum eo solo colluctatur, velut pari intus invento. Sola hæc pugna est, cum venenum in visceribus reperit: mirumque exitialia per se ambo cum sint, duo venena in homine commoriuntur, ut homo supersit* (*a*): onde cantò il Tasso

Che sì come dall' un l' altro veneno
Guardar ne suol, tal l' un dall' altro amore.

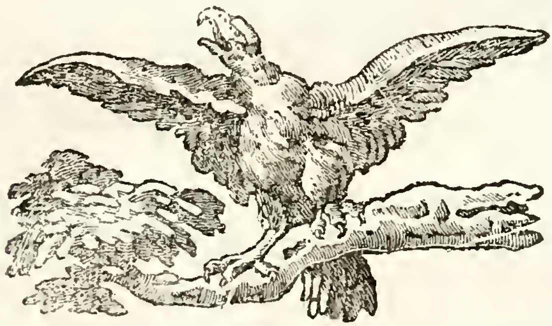
Quindi l' aconito si è venuto a contrapporre allo scorpione, la mandragora all' elleboro, le cantarelle alla rabbia de' cani. Ma pur troppo la sperienza coll' andare de' secoli ha fatto vedere l' inutilità di questo metodo di medicare. Sorsa è ultimamente la Chimica; ed a me, disse, è riserbata la gloria di trovare i veri contravveleni. Non ho trovato io la maniera di fare un ottimo medicamento dell' olio di vetriolo, e dell' olio di tartaro per deliquio, che separati uno dall'

(*a*) *Plinio* hist. nat. lib. 27. cap. 2.

altro ſono micidiali veleni? Tengaſi per certo, dice *le Boe Silvio*, che la forza di ogni veleno conſiſte in una acrimonia. *Si quis autem venenorum effecta & ſymptomata, quæ in homine ſolent excitare, attenta mente conſideraverit, tandem agnoſcet illa omnia ortum ſuum ac efficaciam debere alterutri, vel utrique acri, cujus acrimonia vel patet, vel latet* (*a*). Con queſta fiducia ſi è paſſato a far l' eſame dei funghi. I funghi, dice il *Lemery*, contengono molto olio e ſal volatile e fiſſo, dunque io mi ſervo per contravveleno dello ſpirito volatile oleoſo aromatico (*b*). I funghi, direbbon M. M. *Paulet*, e *Parmentier*, contengono un' acrimonia alcalica, contro di cui varrà l' etere vitriolico: e per tale opinione ſono grandemente lodati da M. *Rozier*; il quale per la ſteſſa ragione ricorda l' uſo dell' aceto: " aprés l' entiére évacuation „ des champignons, on fera prendre au malade, dans chaque „ verre de ſa boiſſon, un peu d' éther vitriolique. C' eſt a „ M. M. *Paulet* & *Parmentier* que l' on doit la découverte „ de ce reméde. Je le répete, ſouvent d' amples boiſſons „ acidulées par le vinaigre ſuffiſent (*c*) „. Ma M. *Sage* tutto all' oppoſito vuole che il veleno degl' inſetti, ch' è quello de' funghi, provenga da un acido foſforico che in eſſi trovaſi a nudo: vi contrappone però il ſuo alcali volatile *fluor* (*d*). Io non mi curo di riſolvere queſta queſtione. Mi baſta il dire che ſe è acrimonia quella per cui i funghi ſono veneſici, non è acrimonia che con acidi, o alcalici ſi poſſa contemperare o diſtruggere. Nello ſtomaco dell' uomo per la digeſtione accorrono nella ſcialiva, nei ſughi gaſtrici, nel ſugo pancreatico, nella bile, acidi, alcalici, ſaponoſi d' ogni genere: ſe queſti non baſtano (come non baſtano certamente, che il veleno ad eſſi reſiſte) poca ſperanza abbiamo che per quegli altri contrappoſti ingollati debba cedere. Intanto eſſi ſteſſi produrranno nello ſtomaco i lor peſſimi effetti, e ſi aggiungerà pericolo ſopra pericolo. Come ben ſe ne avvide il gran

(*a*) Meth. med. lib. 2. cap. 29.
(*b*) Dizion. univ. pag. 135.
(*c*) Dict. univ. tom. 2. pag. 676.
(*d*) Eſper. pag. 46.

il gran Chimico *Boeravio* : laonde formò quell' aforiſmo : *In dandis antidotis ſingularibus, ſumma prudentia opus: quum enim hæc polleant ſingulari virtute corrigendi hujus, illiuſve veneni tantum, habent ut plurimum violentiam æque magnam, vel majorem, ac eſt illa, quam debellant. Ideoque hæc ſimul concurrentia in corpore ſe mutuo deſtruunt, inertia evadunt, nec multum nocent: ſi vero adſunt ſolitaria, æque noxia ſæpe deprehenduntur ac ipſa venena, quibus domandis exhibentur* (*a*). Un buono e ſicuro antidoto contro de' ſintomi almeno dal veleno de' funghi, e da qualunque altro veleno prodotti, paſſato che ſia il furore del morbo acuto, ſarà qualche ſorſo di vino puro noſtrale o navigato. Nè ſono da ſprezzare la triaca, il mitridato, il diaſcordio, l' orvietano, ed altri cotali rimedj ſpiritoſi ed aromatici uſati e lodati dai noſtri maggiori: come quelli che ſervir poſſono mirabilmente a confortare l' abbattuto ſpirito, a riordinare i forzati moti de' nervi e de' muſcoli, a dar tono alle rilaſſate fibre, a riſtorare le perdute forze, e a poner fine ai doloroſi guai.



(*a*) Inſtit. med. aph. 1130.

RICERCHE ANALITICHE

SOPRA DIVERSI SOGGETTI.

Del P. Gregorio Fontana delle S. P. Pubblico Professore delle Matematiche Superiori nella Regia Imperiale Università di Pavia.

ARTICOLO I.

Sopra la Rifrazione della Luce relativamente ad alcune formole del Sig. D' Alembert *ne' suoi* Opuscoli Matematici.

PROBLEMA.

1. *Un mezzo refrangente terminato da una superficie curva esercita sopra un raggio di luce, che vi batte dentro e si rompe, una forza attrattiva, la quale obbliga il raggio a muoversi per una curva brevissima nell' atto di refrangersi. Si domanda la natura di questa curva.*

Soluzione.

Sia (*Fig.* 1.) *SQG* la superficie refrangente, *AQB* la trajettoria descritta dalla particella di luce, che incontra in *Q* la superficie refrangente, la qual trajettoria cominciando in *A* fuori della superficie a quella distanza, a cui si estende la forza attrattiva del mezzo refrangente, termina in *B* al di dentro dello stesso mezzo ad una certa distanza dalla sua superficie. Preso il punto indefinito *N* sulla trajettoria, e guidate le tangenti *AO*, *NI*, *BT*; suppongasi essere *C* il centro della curvatura del piccolo arco *eQk* della superficie rifrangente, dove il raggio di luce la penetra. Sieno condotti i raggi vettori *CA*, *CN*, *CB*, e pigliati gli archi infinitesimi

Aa, *Nn*, ſi giungano *Ca*, *Cn*, e ſopra *CN* meniſi la perpendicolare *nr*. Sia pertanto

Velocità del raggio di luce in *A*	g
Seno dell' angolo d' incidenza *OAC*	h
Forza attrattiva del mezzo ſopra il corpuſcolo di luce arrivato in *N*	X
Tempo ſpeſo dal corpuſcolo a venire da *A* in *N*	t
Velocità del medeſimo in *N*	v
Arco *AN*	s
CA	a
CB	b
CN	x
Angolo *ACN*	z

Il corpuſcolo di luce giunto in *N* è attratto dal mezzo rifrangente verſo il centro *C* della curvatura con una forza *X* rappreſentata dalla retta *NF*, e menando la perpendicolare *FI* ſulla tangente *NI*, la forza *NF* ſi riſolve nelle due *NI*, *IF*, delle quali la ſola *NI* è quella, che altera la velocità v del corpuſcolo per l' archetto *Nn*: conſeguentemente $NI . dt = dv$. Ma la ſimilitudine de' triangoli *FNI*, *Nrn* dà $Nn : Nr :: ds : -dx :: NF : NI$, cioè $NI = -\frac{Xdx}{ds}$; ed è inoltre $dt = \frac{ds}{v}$: ſoſtituendo dunque queſti valori nell' equazione precedente, ſi avrà $-Xdx = vdv$, ovvero $-2Xdx = 2vdv$, il cui integrale è $v^2 = -2\int Xdx + \text{coſt.}$ Siccome poi allorchè $x = a$, diventa $v = g$; naſcerà $\text{coſt.} = g^2$, intendendo l' integrale $\int Xdx$ preſo in modo, che ſi annulli nel ſuppoſto di $x = a$. Laonde $v^2 = g^2 - 2\int Xdx$.

Ora, poichè nelle trajettorie deſcritte in virtù d' una forza centrale tendente ad un punto fiſſo le aje deſcritte dal raggio vettore ſono proporzionali ai tempi per gli archi corriſpondenti, ſarà perciò il tempo per l' archetto *Aa* al tem-

po per l' archetto Nn, come ACa ad NCn, ovvero $\frac{Aa}{g} : \frac{ds}{v} :: \frac{1}{2} Aa . CA . h : \frac{1}{2} NC . nr$, cioè $\frac{1}{g} : \frac{ds}{v} :: ha : x^2 dz$, e quadrando $\frac{1}{g^2} : \frac{ds^2}{v^2} :: h^2 a^2 : x^4 dz^2$; d' onde si trae

$$x^4 dz^2 = \frac{h^2 g^2 a^2 ds^2}{g^2 - 2\int X dx} = \frac{h^2 g^2 a^2 (dx^2 + x^2 dz^2)}{g^2 - 2\int X dx}$$; e quindi

$$dz^2 \left(g^2 x^4 - 2x^4 \int X dx - h^2 g^2 a^2 x^2 \right) = h^2 g^2 a^2 dx^2.$$ Dunque

$$dz = \frac{-hgadx}{x^2 \sqrt{\left(g^2 - 2\int X dx - \frac{h^2 g^2 a^2}{x^2} \right)}}$$, ed integrando

$$z = -\int \frac{hgadx}{x^2 \sqrt{\left(g^2 - 2\int X dx - \frac{h^2 g^2 a^2}{x^2} \right)}}.$$ Il che era ecc.

2. COR. I. Siccome $ds^2 = dx^2 + x^2 dz^2 = dx^2$

$$+ \frac{h^2 g^2 a^2 dx^2}{g^2 x^2 - 2x^2 \int X dx - h^2 g^2 a^2} = \frac{dx^2 (g^2 x^2 - 2x^2 \int X dx)}{g^2 x^2 - 2x^2 \int X dx - h^2 g^2 a^2}$$, e in

conseguenza $ds = \frac{-xdx\sqrt{(g^2 - 2\int X dx)}}{x\sqrt{\left(g^2 - 2\int X dx - \frac{h^2 g^2 a^2}{x^2} \right)}}$, sarà quindi

$$\text{sen.}\, CNI = \frac{nr}{Nn} = \frac{xdz}{ds} = \frac{hga}{x\sqrt{(g^2 - 2\int X dx)}}.$$ Dal che apparisce, che il seno dell' angolo d' incidenza, cioè h sta al seno dell' angolo CNI come $1 : \frac{ga}{x\sqrt{(g^2 - 2\int X dx)}}$, ovvero come $\frac{1}{ga} : \frac{1}{x\sqrt{(g^2 - 2\int X dx)}}$.

3. COR. II. Quando l'angolo CNI si cangia in CBT, che è l' angolo della refrazione totale, allora diventa $x = CB = b$, e con ciò il seno dell' angolo d' incidenza sta al seno dell'angolo di refrazione come sta $\frac{1}{ga} : \frac{1}{b\sqrt{(g^2 - 2\int X dx)}}$.

4. Cor. III. Suppongasi col *d' Alembert Opusc. Math.* tom. 3. §. 969, che sia $m\alpha$ il raggio della curvatura della superficie refrangente in $\mathfrak{Q}$, ed α il raggio della sfera di attività del mezzo rifrangente, per modo che la curva descritta dal globetto di luce incominci e finisca alla distanza α dalla superficie rifrangente esteriormente ed interiormente. In questo supposto diventa $a = m\alpha + \alpha$, $b = m\alpha - \alpha$. Perlochè il seno d' incidenza sta al seno di refrazione come

$$\frac{1}{g(m\alpha+\alpha)} : \frac{1}{(m\alpha-\alpha)\sqrt{(g^2-2\int Xdx)}},$$ che è un rapporto diverso da quello di *d' Alembert* nel luog. cit.

5. Cor. IV. Se il mezzo rifrangente è terminato da una superficie piana, allora diventa $m\alpha = \infty$, e la ragione del seno d' incidenza al seno di refrazione si cangia in quella di $\frac{1}{g} : \frac{1}{\sqrt{(g^2-2\int Xdx)}}$; il che ha luogo ancora allorchè essendo curva la superficie rifrangente, il suo raggio $m\alpha$ di curvatura è grandissimo in confronto della picciola distanza α, a cui si estende la forza attraente di detta superficie.

6. Scol. Se per angolo d' incidenza il *d' Alembert* ha voluto intendere non già il *vero* angolo d'incidenza CAO, ma l' *apparente* ossia quello che corrisponde al punto $\mathfrak{Q}$ della superficie rifrangente, è evidente, che il seno di questo è

$$\frac{bga}{m\alpha\sqrt{(g^2-2\int X'dx)}},$$ dove nell' integrale $\int X'dx$ si dee scrivere $m\alpha$ per x. Ma oltrechè quest' angolo *apparente* d' incidenza è troppo differente dal *vero* angolo d' incidenza per poter prendersi promiscuamente l' uno per l' altro, ciò non giustificherebbe la proporzione de' seni recata dal *d' Alembert*; imperciocchè il seno dell' angolo *apparente* d' incidenza sta al seno dell' angolo di refrazione come sta

$$\frac{bga}{m\alpha\sqrt{(g^2-2\int X'dx)}} : \frac{bga}{(m\alpha-\alpha)\sqrt{(g^2-2\int Xdx)}},$$ ovvero come

$$\frac{1}{\sqrt{(g^2-2\int X'dx)}} : \frac{1}{\left(1-\frac{1}{m}\right)\sqrt{\left(g^2-2\int Xdx\right)}},$$ laddove se-

condo *d' Alembert* dovrebbe essere l' uno all' altro come
$\frac{1}{gmx} : \frac{1}{(mx-\alpha)\sqrt{(g^2 - 2\int X dx)}}$.

ARTICOLO II.

Esame d' un nuovo argomento in favore del Moto Perpetuo.

1. Una ruota verticale (*Fig.* 2.) *FPOQ* divisa in due metà da un piano verticale, che passa pel suo diametro *FO*, ha la metà *FPO* immersa nell' acqua sotto al livello *MN*, e l' altra metà tutta fuor d' acqua, essendo in *FO* mediante un particolar meccanismo tolta ogni comunicazione fra l' acqua della conserva e la metà *FQO* esteriore della ruota, la quale può volgersi liberamente intorno ad un asse, che passa pel centro *C*. Ora essendo la ruota specificamente più leggera dell' acqua, la parte immersa *FPO* viene di continuo spinta verticalmente all' insù con uno sforzo eguale all' eccesso del peso di un volume d' acqua pari alla parte immersa sopra il peso della parte immersa, la quale spinta passando pel centro di gravità della parte istessa, e però fuori del centro *C*, obbliga la ruota a girare intorno a *C*. In tale stato di cose dimandasi, se si avrà nella ruota un moto perpetuo, come a primo aspetto potrebbe giudicarsi.

2. Per rispondere adequatamente, conviene prima di tutto conoscere qual effetto producano nella ruota le pressioni orizzontali, che esercita l' acqua contro la semicirconferenza *FLO* della ruota. Preso adunque un elemento *Pp*, e condotte al diametro le ordinate *PR*, *pr*, e guidato il raggio *PC*, e indi la *PG* normale al raggio *CL*, il quale determina il quadrante *OL*, pongasi la distanza del punto infimo *O* dal livello dell' acqua, ovvero la $OD = b$, il semidiametro della ruota $= a$, $OR = x$, e la gravità specifica dell' acqua $= 1$: e sarà la pressione perpendicolare contro l' elemento $Pp =$ $Pp.RD$, la quale risoluta in due, una orizzontale secondo *PR*, l' altra verticale secondo *PG*, offre l' analogia $PC : PR ::$ $Pp.RD : \frac{Pp.PR.RD}{PC}$. Dunque la pressione orizzontale contro

Pp è $= \frac{Pp.PR.RD}{PC}$, cioè per essere $Pp.PR = Rr.PC$, la detta pressione orizzontale trovasi $= Rr.RD = (b-x)dx$, e questa moltiplicata per RD, ovvero $b-x$, diventa il momento della pressione relativamente ad $MN = (b-x)^2 dx$, e la somma de' momenti delle pressioni esercitate contro l' arco indefinito $OP = \int (b-x)^2 dx = -\frac{1}{3}(b-x)^3 + cost.$ E poichè svaniscono tali momenti insieme colla x, si ha però $cost. = \frac{1}{3}b^3$; e quindi la predetta somma de' momenti

$= \frac{1}{3}\left(b^3 - (b-x)^3\right) = b^2x - bx^2 + \frac{1}{3}x^3$. Laonde prendendo $x = 2a$, sarà la somma di tutti i momenti delle pressioni orizzontali esercitate contro tutta la semicirconferenza OLF della ruota, sarà, dico, $= 2b^2a - 4ba^2 + \frac{8}{3}a^3$, e dividendo questa somma per quella di tutte le pressioni orizzontali, cioè per $\int (b-x)dx = \frac{1}{2}\left(b^2 - (b-x)^2\right) = bx - \frac{1}{2}x^2 = 2ba - 2a^2$ posto $x = 2a$, si ha l' espressione $\frac{2b^2 - 4ba^2 + \frac{8}{3}a^3}{2ba - 2a^2}$

$= \frac{b^2 - 2ba + \frac{4}{3}a^2}{b-a} = \frac{(b-a)^2 + \frac{1}{3}a^2}{b-a} = b - a + \frac{\frac{1}{3}a^2}{b-a}$, che rappresenta la distanza del livello MN dalla *risultante* di tutte le pressioni orizzontali contro la semicirconferenza, la quale distanza supera la DC, e conseguentemente la direzione della risultante passa al di sotto del centro C della ruota ad una distanza di detto centro, che è $= \frac{\frac{1}{3}a^2}{b-a}$. Se si moltiplica ora questa distanza per la *risultante* di tutte le pressioni orizzontali, ovvero per $2a(b-a)$, si ottiene $\frac{2}{3}a^3$ pel momento della forza, che tende a far girare la ruota da L verso O.

Ciò stabilito, egli è noto, che la forza spingente verti-

calmente all' insù la mezza ruota FLO (chiamata g la gravità ſpecifica della ruota) è $=(1-g).FCOL$, e queſta forza paſſa pel centro di gravità di FLO. E ſiccome il centro di gravità di qualunque ſegmento circolare diviſo per mezzo dal raggio è diſtante dal centro del cerchio per una quantità uguale al dodiceſimo del cubo della corda diviſo pel ſegmento, ſarà perciò il centro di gravità del ſemicircolo $FCOL$ diſtante dal centro C per la quantità $\frac{\frac{1}{12}.8a^3}{FCOL}=\frac{\frac{2}{3}a^3}{FCOL}$. Perlochè il momento di queſta forza tendente a far girare la ruota da O verſo L ſarà $=\frac{\frac{2}{3}a^3}{FCOL}.(1-g).FCOL=\frac{2}{3}(1-g)a^3$.

Ma oltre queſto momento, havvi pure quello dell' altra metà FQO della ruota, la quale eſiſtendo fuor d' acqua tende pel proprio peſo all' ingiù con una forza $=g.FCOQ$ $=g.FCOL$, che moltiplicata per la diſtanza $\frac{\frac{2}{3}a^3}{FCOL}$ del centro di gravità del ſemicircolo FQO dal centro della ruota dà pel momento di tal forza tendente a volger la ruota da O verſo L la quantità $\frac{2}{3}ga^3$. Dunque il momento totale per far girare la ruota da O in L, ſarà $\frac{2}{3}(1-g)a^3+\frac{2}{3}ga^3=\frac{2}{3}a^3$, cioè a dire quello ſteſſo, che ſi è trovato per far girare la ruota nella direzione oppoſta, oſſia da L verſo O.

E quindi la ruota rimarrà immobile perfettamente.

3. COR. I. Se la ruota foſſe ſpecificamente più grave dell' acqua, non potrà neppure in queſto caſo concepire alcun moto da L verſo O, come potrebbe ſembrare in ſulle prime. Imperciocchè allora il momento della forza, che ſpigne al baſſo verticalmente la mezza ruota $FCOL$, e tende a farla girare da L verſo O è $=\frac{2}{3}(g-1)a^3$, al qual momento conviene aggiugnere quello delle preſſioni orizzontali, cioè $\frac{2}{3}a^3$,

e così

e così ottienſi il momento totale $\frac{2}{3} g a^3$ tendente a far girare la ruota da L in O; ed appunto a queſto momento è uguale quello del peſo della metà $FCOQ$ tendente a dare alla ruota un rivolgimento contrario, ovvero da O in L.

3. Cor. II. Se la ruota in vece di eſſere un piano circolare foſſe una zona compreſa da due periferie concentriche (*Fig.* 3), allora dalla ſomma delle preſſioni orizzontali dell' acqua contro la ſemiperiferia eſteriore convien togliere la ſomma delle oppoſte preſſioni orizzontali contro l' altra ſemiperiferia interiore della zona. Sicchè chiamando a il raggio maggiore della zona, e λ la ſua larghezza, ſi ha la ſomma delle prime preſſioni orizzontali $= 2a(b-a)$ e la ſomma delle ſeconde $= 2(a-\lambda)\big(b-\lambda-(a-\lambda)\big) = 2(a-\lambda)(b-a)$. Dunque ſottratte queſte da quelle, reſta $2(b-a)\lambda$ per la ſomma di tutte le preſſioni, che agiſcono contro la zona della ſemiruota tuffata nel fluido in direzione tendente dal di fuori al di dentro della ruota. Inoltre la ſomma de' momenti di tutte le preſſioni orizzontali contro la ſemicirconferenza eſteriore relativamente all' aſſe MN è $= 2b^2a - 4ba^2 + \frac{8}{3} a^3$. E parimenti la ſomma de' momenti delle preſſioni orizzontali oppoſte della ſemicirconferenza interiore relativamente al detto aſſe è $= 2(b-\lambda)^2(a-\lambda) - 4(b-\lambda) \times (a-\lambda)^2 + \frac{8}{3}(a-\lambda)^3$. Sottratta queſta ſomma dalla precedente, reſta la ſomma de' momenti agenti contro la zona della ſemiruota dal di fuori al di dentro $= 2b^2a - 4ba^2 + \frac{8}{3} a^3 - 2(b-\lambda)^2(a-\lambda) + 4(b-\lambda)(a-\lambda)^2 - \frac{8}{3}(a-\lambda)^3 = 2b^2\lambda - 4ba\lambda + 4a^2\lambda - 2a\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda^3 = 2\lambda\big(b(b-a) - ba + 2a^2 - a\lambda + \frac{1}{3}\lambda^2\big) = 2\lambda\big((b-a)(b-a) + a^2 - a\lambda + \frac{1}{3}\lambda^2\big)$. Perlochè dividendo queſta ſomma de' momenti per la ſomma delle preſ-

ſioni ſi avrà $2\lambda\left(\frac{(b-a)(b-a)+a^2-a\lambda+\frac{1}{3}\lambda^2}{2\lambda(b-a)}\right)=b-a$ $+\frac{a^2-a\lambda+\frac{1}{3}\lambda^2}{b-a}$ = alla diſtanza del *centro di preſſione* dal livello del fluido, ovvero alla diſtanza della *riſultante* di tutte le preſſioni da quel livello. Dal che ſi ſcorge, che il centro di preſſione cade ſotto al centro C della ruota alla diſtanza $\frac{a^2-a\lambda+\frac{1}{3}\lambda^2}{b-a}$ da eſſo. Quindi moltiplicando queſta diſtanza per la riſultante delle preſſioni, oſſia per $2\lambda(b-a)$, ſi ottiene $2\lambda(a^2-a\lambda+\frac{1}{3}\lambda^2)$ per eſprimere il momento delle preſſioni orizzontali dell' acqua, diretto a far girare la ruota da L in O.

Ora il momento, con cui la ſpinta verticale del fluido tende a far girare il ſemicerchio $FCOL$ da O in L (ſuppoſto che la ruota ſia formata non dalla ſola zona, ma da un piano circolare) è $=\frac{2}{3}a^3$. Parimenti il momento della ſpinta del fluido per far girare il ſemicerchio interno $VCIG$ da O in L è $=\frac{2}{3}(a-\lambda)^3$. Dunque togliendo queſto ſecondo momento dal primo ſarà il momento della zona di fluido $VGIOLF$ per dare alla ruota un rivolgimento da O in L $=\frac{2}{3}\left(a^3-(a-\lambda)^3\right)=2\lambda(a^2-a\lambda+\frac{1}{3}\lambda^2)$, che è appunto quello ſteſſo momento, con cui le preſſioni orizzontali del fluido tendono ad imprimere alla ruota un rivolgimento in verſo contrario, cioè da L in O. Dunque per la preſſione del fluido non può la ruota concepire verun movimento intorno al ſuo centro.

Il peſo poi proprio della ruota, per cui la metà della zona immerſa nel fluido tende a far girare la ruota da L in O, e l' altra metà della zona fuori del fluido tende a farla girare in direzione oppoſta, un tal peſo, dico, non può indurre alcun moto di rotazione, equilibrandoſi l' una, e l' altra metà intorno al centro C.

ARTICOLO III.

Sopra un errore, che si commette da molti nell' assegnare la misura delle Iperboloidi.

1. Quegli Scrittori di Calcolo Integrale, i quali applicano la formola generale per la misura di tutte le conoidi ad indagare la misura delle iperboloidi asintotiche, nate cioè dalla rivoluzione di tutte le iperbole in generale intorno ad un asintoto, incorrer sogliono in un errore tanto più grave e notabile, quanto è meno avvertito. Sarà pertanto pregio dell' opera l' indicar qui l' origine e l' emenda d' un abbaglio, che ha finora imposto a parecchi.

2. La curva *CMD* (*Fig.* 4.) rappresenta un' iperbola equilatera riferita agli asintoti ortogonali *BA*, *AE*, la cui equazione generale spettante alla famiglia di tutte le iperbole è $x^m y^n = a^{m+n}$, presa cioè l' ascissa $AN = x$, l' ordinata $NM = y$, ed $AF = FG = a$. Essendo $1 : \pi$ il rapporto del diametro alla circonferenza del cerchio, la formola $\int \pi y^2 dx$ dà la misura dell' iperboloide generato dalla rivoluzione dello spazio *GFED* intorno all' asintoto *AE*. Ma dall' equazione generale della famiglia delle iperbole si ricava $y^2 = \frac{a^{(2m+2n):n}}{x^{(2m):n}}$. Dunque $\int \pi y^2 dx = \pi a \int x^{(-2m):n} dx$

$$= \frac{n}{n-2m} \cdot \pi a^{(2m+2n):n} x^{1-(2m):n} + \text{cost.} = \frac{n}{n-2m} \cdot \pi y^2 x + \text{cost.}$$

Ed annullandosi l' iperboloide allorchè diventa $x = AF = a$, ed $y = FG = a$, nasce quindi $\text{cost.} = -\frac{n}{n-2m} \cdot \pi a^3$; e conseguentemente l' iperboloide generato dalla rotazione dello spazio indeterminato *GFNM* intorno all' asintoto *AE* risulta $= \frac{n\pi}{2m-n}(a^3 - y^2 x)$.

3. Sin qui il raziocinio è giustissimo; ma proseguono que-

ſti Autori, e dicono: prendendo infinita la x, e però la $y=0$, l' eſpreſſione $\frac{n\pi}{2m-n}(a^3-y^2x)$ ſi cangia in

$\frac{n}{2m-n}.\pi a^3$, vale a dire in $\frac{n}{2m-n}$ moltiplicato pel cilindro generato dalla rivoluzione del quadrato AG intorno all'aſintoto. Da ciò inferiſcono il ſeguente general Teorema: *Nelle iperbole equilatere di qualunque genere o grado l' iperboloide aſintotico infinitamente lungo prodotto dal rivolgimento dello ſpazio* GFED *intorno al ſuo aſintoto ſta al cilindro nato dalla rivoluzione del quadrato* AG *come ſta* n : 2m — n, *vale a dire quell' iperboloide è ſempre finito e aſſegnabile, eccettuato l' unico caſo di* 2m = n, *in cui diventa infinito*.

4. La falſità di queſto Teorema ſi mette ad evidenza ſott' occhio con far vedere, che non nel ſolo caſo di $2m=n$, ma anche in altri infiniti l' iperboloide acquiſta un valore maggiore di qualunque dato, cioè a dire infinito. Per dimoſtrar ciò ripiglio l' equazione

$\int \pi y^2dx = -\frac{n}{n-2m}.\pi a^{(2m+2n):n}x^{1-(2m):n} + \text{coſt.}$, ed eſſendo per ipoteſi $\int \pi y^2dx=0$ allorchè $x=a$, ritrovo come prima coſt. $= -\frac{n}{n-2m}.\pi a^{(3n):n} = -\frac{n}{n-2m}.\pi a^3$, e quindi l' iperboloide prodotto dal rivolgimento dello ſpazio indeterminato $GFNB$ intorno all' aſintoto AE ha per miſura

$$\frac{n}{2m-n}(\pi a^3 - \pi a^{(2m+2n):n}x^{(n-2m):n})$$

$= \frac{n\pi a^3}{2m-n}(1-a^{(2m-n):n}x^{(n-2m):n})$. Se ora in queſt' eſpreſſione ſi fa x infinita, eſſa rappreſenta il valore dell'iperboloide infinitamente lungo prodotto dalla rivoluzione dello ſpazio aſintotico $GFED$ intorno all' aſintoto FE. Ma in tal ſuppoſto di x infinita la detta eſpreſſione diventa viſibilmente infinita tutte le volte che l' eſponente n dell' ordinata nell' equazione di tutte le iperbole agli aſintoti ſupera il doppio dell' eſponente m dell'aſciſſa. Egli è dunque eviden-

te, che l' iperboloide asintotico infinitamente allungato ha un valore infinito in tutti quegl' infiniti casi, ne' quali n è maggiore di $2m$.

5. L' origine dell' errore dipende dal supporre, che la quantità y^2x debba annullarsi ogniqualvolta divenga $y = 0$ quand' anche x si faccia infinita. Ciò apparisce falso in infiniti casi mediante la sostituzione del valore di y^2 dato per x: imperciocchè essendo $y^2 = a^{(2m+2n):n} x^{-(2m):n}$, nasce $y^2x = a^{(2m+2n):n} x^{1-(2m):n}$, dove si vede manifestamente, che posta x infinita tanto è lungi, che sempre debba annullarsi la quantità y^2x, che anzi per l' opposto questa quantità diventa infinita tutte le volte che $1 > \frac{2m}{n}$, ovvero $n > 2m$.

6. In generale si possono stabilire questi due Canoni:

I.

La quantità Bx^py^r, *nella quale facendosi* x *infinita diventa* y *infinitesima, e si sa altronde essere* $y = bx^t$, *la quantità, dico,* Bx^py^r *diviene* 1.° *zero allorchè il numero* $p + tr$ *è negativo*: 2.° *ella diviene assegnabile e finita allorchè* $p + tr = 0$. 3.° *essa acquista un valore infinito qualora* $p + tr$ *sia un numero affermativo.*

II.

Nel supposto di x *infinita e di* y *infinitesima la quantità* Bx^py^r 1.° *si annulla quando il numero* $\frac{p + rt}{t}$ *è positivo*: 2.° *ha un valore finito quando quel numero è zero*: 3.° *diventa infinita, se il detto numero è negativo.*

ARTICOLO IV.

Sopra le Molle.

1. Una molla rappresentata da una linea retta, e contratta d' una certa quantità, se venga appoggiata per una

sua estremità ad un ostacolo immobile, oppure al contrario sia interamente libera da una parte o dall' altra, sembra a prima vista dover passare nel suo rilasciamento per li medesimi gradi di moto in ambedue i casi. Infatti essendo in entrambi la medesima la forza restitutiva, produttrice del moto, non appar ragione della diversità di questo nella molla fissa e nella libera. Il *d' Alembert* è stato il primo ad avvertire, che quest' apparenza è ingannevole, e che fatto il calcolo del moto della molla ne' due stati proposti si troveranno due risultati notabilmente diversi.

2. Per entrare sopra di ciò in qualche dettaglio, sia (*Fig.* 5) AC una molla rettilinea nel suo stato naturale, la quale appoggiata in A contro un ostacolo immobile venga tesa e contratta in AB, sicchè la sua contrazione sia rappresentata da CB. Suppongo ora, che cessi ad un tratto la forza contrattiva, e che allentandosi la molla la sua estremità libera B arrivi in D dopo un tempo t, e percorra $BD = x$; indi faccio la contrazione primitiva $CB = a$, la contrazione $CD = a - x$. Chiamata poi f la forza dilatativa o restitutiva della molla in B, e supponendola proporzionale alla quantità della contrazione, sicchè sia la forza restitutiva in $D = \frac{f}{a}(a - x)$, si ha pel principio delle forze acceleratrici $\frac{f}{a}(-x)dt^2 = ddx$, la quale equazione moltiplicata per dx, ed integrata nell' ipotesi di dt costante si cangia in quest' altra $\frac{f}{a}\left(ax - \frac{1}{2}x^2\right)dt^2 + Cdt^2 = \frac{1}{2}dx^2$. Per determinare la costante C riduco quest' equazione alla forma $\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{2f}{a}\left(ax - \frac{1}{2}x^2\right) + 2C$, ovvero $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\left(\frac{2f}{a}\left(ax - \frac{1}{2}x^2\right) + 2C\right)}$, ed osservo, che la velocità $\frac{dx}{dt}$ dell' estremità della molla in D è nulla al principio del moto, ovvero in B allorchè $x = 0$, dal che nasce nella precedente equazione $0 = \sqrt{2C}$, ovvero $C = 0$. Dunque l' in-

tegrale completo sarà $dx^2 = \frac{2f}{a}(ax - \frac{1}{2}x^2)dt^2$, e quindi

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{f}\cdot\sqrt{(2x - \frac{x^2}{a})}} = \frac{dx : \sqrt{a}}{\sqrt{f}\cdot\sqrt{(\frac{2x}{a} - \frac{x^2}{a^2})}} = \frac{(\frac{a}{f})^{1:2} . dx : a}{\sqrt{(\frac{2x}{a} - \frac{x^2}{a^2})}}.$$

Perlochè integrando si avrà $t = (\frac{a}{f})^{1:2}$. Arc. sen. vers. $\frac{x}{a}$ senza costante, perchè x, e t svaniscono insieme. Pertanto chiamata v la velocità $\frac{dx}{dt}$ della molla nel punto D abbiamo le due equazioni

1°. $v = \sqrt{\left(\frac{2f}{a}(ax - \frac{1}{2}x^2)\right)}$.

2°. $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{f}}$. Arc. sen. vers. $\frac{x}{a}$

Da queste si ricavano facilmente le due altre seguenti

3°. $x = a \pm \sqrt{(a^2 - \frac{av^2}{f})}$.

4°. $x = a$ sen. vers. $\frac{t\sqrt{f}}{\sqrt{a}}$

Passo ora all' altro supposto, che la molla (*Fig.* 6) AC sia interamente libera nell' uno e nell' altro estremo, e venendo contratta in AB si rilasci da ambe le estremità distendendosi per gli spazj eguali BD, AD' nel tempo t. Prendo la forza restitutiva in $B = f$, lo spazio $BD = AD' = y$, $BC = a$, e suppongo al solito le forze restitutive proporzionali alle contrazioni. Quindi se la primitiva contrazione è $CB = a$, la contrazione passato il tempo t, quando le due estremità della molla sono arrivate in D, e D', sarà $CB - DB - D'B = CB - 2DB = a - 2y$, e conseguentemente risulta l' analogia

$$a : a - 2y :: f : \frac{f}{a}(a - 2y)$$

dove il quarto termine $\frac{f}{a}(a - 2y)$ esprime la forza restituti-

va in D, ovvero in D'. Abbiamo pertanto l' equazione pel moto della molla in queſto ſecondo caſo $\frac{f}{a}(a-2y)dt^2=ddy$, la quale moltiplicata per dy diviene $\frac{f}{a}(ady-2ydy)dt^2=dyddy$, il cui integrale completo nell' ipoteſi di dt coſtante è $\frac{f}{a}(ay-y^2)dt^2=\frac{1}{2}dy^2$; dal che ſi ricava $dt=\frac{dy}{\sqrt{f}\cdot\sqrt{(2y-\frac{2y}{a})}}$, e moltiplicando il ſecondo membro ſotto e ſopra per $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}$ naſce $dt=\frac{dy\sqrt{2}:\sqrt{a}}{\sqrt{f}\cdot\sqrt{(\frac{4y}{a}-\frac{4y^2}{a^2})}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2f}}\cdot\frac{2dy:a}{\sqrt{(\frac{4y}{a}-\frac{4y^2}{a^2})}}$. L' integrale completo di queſt' ultima equazione è manifeſtamente $t=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2f}}$. Arc. ſen. verſ. $\frac{2y}{a}$. Chiamata poi v la velocità in D, ovvero D' trovaſi $v=\frac{dy}{dt}=\sqrt{(\frac{2f}{a}(ay-y^2))}$. Abbiamo dunque le ſeguenti equazioni

1.° $v=\sqrt{(\frac{2f}{a}(ay-y^2))}$

2.° $t=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2f}}$. Arc. ſen. verſ. $\frac{2y}{a}$

Da queſte poi derivano immediatamente le due altre

3.° $y=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-\frac{av^2}{2f})}$

4.° $y=\frac{1}{2}a$ ſen. verſ. $\frac{t\sqrt{2f}}{\sqrt{a}}$

ARTICOLO

ARTICOLO V.

Sopra la trasfusione della velocità nel conflitto de' corpi.

Sia una serie di globi continuamente proporzionali in numero $n+1$, ed A, B sieno i due primi, U l' ultimo, cioè

$$A,\ B,\ \frac{B^2}{A},\ \frac{B^3}{A^2}\dots\frac{B^n}{A^{n-1}}=U.$$

Si spinga direttamente il primo colla velocità c contro il secondo immobile, e questo colla velocità comunicata vada ad urtare il terzo immobile, questo il quarto, e così fino all' ultimo; è chiaro che posto $\frac{p}{1}$ il rapporto dell' elasticità de' globi alla percussione, la celerità del primo A comunicata a B sarà $=\frac{(1+p)Ac}{A+B}$; e quella da B comunicata al terzo sarà per la stessa ragione $=\left(\frac{(1+p)B}{B+\frac{B^2}{A}}\right)\left(\frac{(1+p)Ac}{(A+B)}\right)$ $=\frac{(1+p)^2A^2c}{(A+B)^2}$; quella del terzo comunicata al 4.° sarà

$$=\frac{(1+p)\frac{B^2}{A}}{\frac{B^2}{A}+\frac{B^3}{A^2}}\times\frac{(1+p)^2A^2c}{(A+B)^2}=\frac{(1+p)^3A^3c}{(A+B)^3}.$$

Dunque le velocità de' globi formeranno la seguente progressione geometrica

$$1,\ \frac{(1+p)Ac}{A+B},\ \frac{(1+p)^2A^2c}{(A+B)^2},\ \frac{(1+p)^3A^3c}{(A+B)^3},\dots\frac{(1+p)^nA^nc}{(A+B)^n}=$$

velocità del globo U.

Se ora si suppone, che i due globi A ed U abbiano un rapporto finito, e che il numero de' medj proporzionali fra essi sia infinito, è manifesto, che B non differirà da A se non d' una quantità infinitesima ω, cioè sarà $B=A\pm\omega$, e la prima serie si muterà in quest' altra

$$A,\ A\pm\omega,\ \frac{(A\pm\omega)^2}{A},\ \frac{(A\pm\omega)^3}{A^2},\ldots\frac{(A\pm\omega)^n}{A^{n-1}}=U,$$

e l' altra ſerie delle velocità ſi cangerà in queſt' altra

$$1,\ \frac{(1+p)Ac}{2A\pm\omega},\ \frac{(1+p)^2A^2c}{(2A\pm\omega)^2},\ \frac{(1+p)^3A^3c}{(2A\pm\omega)^3}\ldots\frac{(1+p)^nA^nc}{(2A\pm\omega)^n}=$$

velocità di U. Dunque il rapporto della velocità di U a quella di A è $=\frac{(1+p)^n.A^nc}{(2A\pm\omega)^n}:c=\frac{(1+p)^nA^n}{(2A\pm\omega)^n}:1$; ed il rapporto della maſſa di U a quella di A è $=\frac{(A\pm\omega)^n}{A^{n-2}}:A$ $=\frac{(A\pm\omega)^n}{A^n}:1$. Rifletto ora, che il primo rapporto $\frac{(1+p)^nA^nc}{(2A\pm\omega)^n}:c$, ovvero $\frac{(1+p)^nA^n}{(2A\pm\omega)^n}:1$, ha per logaritmo $n\log.\frac{(1+p)A}{2A\pm\omega}$, ed il ſecondo rapporto delle maſſe ha per logaritmo $n\log.\frac{A\pm\omega}{A}$. Eſſendo poi $\frac{(1+p)A}{2A\pm\omega}=\frac{1+p}{2}$ $\mp\frac{\left(\frac{1+p}{2}\right)\omega}{2A}$; ed $\frac{A\pm\omega}{A}=1\pm\frac{\omega}{A}$, ſarà in conſeguenza

$$n\log.\frac{(1+p)A}{2A\pm\omega}=n\log.\left(\frac{1+p}{2}\mp\frac{\left(\frac{1+p}{2}\right)\omega}{2A}\right)=n\log.\frac{1+p}{2}$$

$\mp\frac{n\omega}{2A}$; ed $n\log.\frac{A\pm\omega}{A}=n\log.\left(1\pm\frac{\omega}{A}\right)=\pm\frac{n\omega}{A}$. Si faccia $n\log.\frac{1+p}{2}\mp\frac{n\omega}{2A}=\log.x$; ed $\pm\frac{n\omega}{A}=\log.y$; e naſcerà

$$\log.x=-\frac{1}{2}\log.y+n\log.\left(\frac{1+p}{2}\right)=\log.\left(\frac{1+p}{2}\right)^n\times\frac{1}{\sqrt{y}};$$

e quindi $x=\left(\frac{1+p}{2}\right)^n\frac{1}{\sqrt{y}}$. Ma x è $\frac{(1+p)^nA^nc}{(2A\pm\omega)^n}:c$, cioè eſprime il rapporto della velocità del globo ultimo U alla ve-

locità del primo A; ed $y = \frac{(A \pm \omega)^n}{A^{n-1}} : A$, e però

$\frac{1}{\sqrt{y}} = \sqrt{A} : \sqrt{\frac{(A \pm \omega)^n}{A^{n-1}}}$. Dunque la velocità dell' ultimo globo sta alla velocità del primo come $(\frac{1+p}{2})^n$ moltiplicato per la radice della massa del primo sta alla radice della massa dell' ultimo. Laonde supposti i globi perfettamente elastici, cioè $p = 1$, sta la velocità comunicata all' ultimo alla velocità del primo in ragione sudduplicata inversa delle masse. Sicchè ad un globo quattro volte maggiore il primo non può comunicare anche per mezzo d' un infinito numero di globi interposti più della metà della sua velocità, ad uno nove volte maggiore non può imprimerne più d' un terzo, ad uno sedici volte maggiore più d' un quarto ecc., e viceversa ad un globo quattro volte minore non può trasfondere il primo più del doppio della sua velocità, ad uno nove volte minore più del triplo, sedici volte minore più del quadruplo ecc., e quelle velocità $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ecc. . . . . . 2, 3, 4 ecc. sono *il limite* della velocità che può acquistare l' ultimo corpo. Che se i globi sono imperfettamente elastici, talmente che $p < 1$, allora pel valore infinito di n diventa infinitesima la quantità $(\frac{1+p}{2})^n$, e conseguentemente infinitesima la velocità trasfusa all' ultimo rispetto alla velocità del primo, supposto sempre finito il rapporto delle due masse.

Di qui apparisce quanto sia erroneo il principio da molti adottato, *che si possa comunicare ai corpi mediante la collisione una velocità qualunque, per grande e smisurata ella sia*, principio, che non può avverarsi se non nell' unico astratto ed ideale supposto, che nella serie de' corpi il primo percotente sia immensamente maggiore dell' ultimo.

ARTICOLO VI.

Teoremi sopra il Moltiplicatore, che rende integrabili le equazioni differenziali di primo ordine a più variabili.

TEOREMA I.

Se l' equazione differenziale $Pdx + Qdy = 0$ si moltiplica per un fattore M, il quale sia una funzione delle variabili x, y, come lo sono P, e Q, le due equazioni $Pdx + Qdy = 0$, $MPdx + MQdy = 0$ non ponno mai essere per sè integrabili congiuntamente, trattone il caso, in cui il fattore M sia una tal funzione delle variabili, che il suo valore riesca costante.

TEOREMA II.

Ogni qual volta nell'equazione differenziale $Pdx + Qdy = 0$ prendendo la differenza parziale di P per rapporto ad y, e la differenza parziale di Q per rapporto ad x, e sottraendo questa seconda dalla prima, e dividendo il residuo per Q, risulterà per quoziente una funzione della sola variabile x; si potrà sempre determinare una funzione della stessa x, la quale moltiplicando la proposta equazione la renderà integrabile.

TEOREMA III.

Se nell' equazione $Pdx + Qdy = 0$, la quantità $\frac{1}{P}\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)$ sarà una funzione della sola y, si potrà sempre determinare la forma del moltiplicatore M, il quale essendo pure una funzione della stessa y rende integrabile la detta equazione.

TEOREMA IV.

Se nell' equazione differenziale di primo ordine a tre variabili $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ si prende la somma della dif-

ferenza parziale di P per rapporto ad y, e della differenza parziale della ſteſſa P per rapporto a z, e da queſta ſomma ſi ſottrae la ſomma della differenza parziale di Q per rapporto ad x, e della differenza parziale di R per rapporto alla ſteſſa x, e ſi divide queſto reſiduo per $Q+R$, e ſi trova che il quoziente, che ne riſulta, è una funzione della ſola variabile x; ſi potrà ſempre in queſta ipoteſi determinare la forma del fattore M, il quale rende integrabile la propoſta equazione.

TEOREMA V.

Nell' equazione differenziale $Pdx+Qdy+Rdz=0$ pigliando le due differenze parziali di Q in ordine alla variazione di x, e z, e dalla loro ſomma ſottraendo la ſomma delle differenze parziali di P, ed R per rapporto alla variazione di y, e dividendo il reſiduo per $P+R$, ſe il quoziente, che naſce, è una funzione della variabile ſola y, la forma del moltiplicatore M, che rende integrabile la propoſta equazione, è ſempre data.

TEOREMA VI.

Nell' equazione $Pdx+Qdy+Rdz=0$ ſe prendendo la ſomma delle due differenze parziali di R per rapporto alla variazione di x, ed y, e da eſſa ſottraendo la ſomma delle differenze parziali di P, e Q per rapporto alla variazione di z, e poſcia dividendo il reſiduo per $P+Q$ ſi trova, che il quoziente, che ne riſulta, è una funzione della ſola variabile z, il fattore M ſarà ſempre dato per una funzione della ſteſſa z.

TEOREMA VII.

Se nell'equazione differenziale $Pdx+Qdy+Rdz+dv=0$ a quattro variabili la formola $\frac{1}{Q+R+1}\left(\frac{dP}{dy}+\frac{dP}{dz}+\frac{dP}{dv}-\frac{dQ}{dx}-\frac{dR}{dx}\right)$ ſarà una funzione della ſola variabile x, il

moltiplicatore, che rende integrabile la predetta equazione, si potrà sempre assegnare.

TEOREMA VIII.

Il fattore, che rende integrabile l' equazione $Pdx + \mathfrak{Q}dy + Rdz + dv = 0$, è sempre noto e assegnabile ogni qualvolta la formola $\frac{1}{P+R+1}\left(\frac{d\mathfrak{Q}}{dx, dz, dv} - \frac{d(P+R)}{dy}\right)$ (*) è una funzione della sola y.

TEOREMA IX.

Sarà data la forma del fattore M, che rende integrabile la predetta equazione, tutte le volte che l' espressione $\frac{1}{P+\mathfrak{Q}+1}\left(\frac{dR}{dx, dy, dv} - \frac{d(P+\mathfrak{Q})}{dz}\right)$ sarà una funzione della sola variabile z.

TEOREMA X.

Se i coefficienti P, $\mathfrak{Q}$, R de' differenziali delle variabili nella predetta equazione hanno tra loro tal relazione, che la formola a differenze parziali $\frac{1}{P+\mathfrak{Q}+R}\left(\frac{d(P+\mathfrak{Q}+R)}{dv}\right)$ riesca uguale ad una funzione della sola variabile v, sarà sempre assegnabile il fattore M, dal quale dipende l' integrazione di quella equazione.

(*) Io indico la somma delle differenze parziali $\frac{dQ}{dx} + \frac{dQ}{dz} + \frac{dQ}{dv}$ coll' espressione compendiosa $\frac{dQ}{dx, dz, dv}$.

ARTICOLO VII.

Sopra la Teoria delle potenze parallele.

Sino ad ora i Meccanici ſono ſtati ſoliti di dedurre la teoria delle potenze parallele da quella delle potenze concorrenti mediante l' ipoteſi un poco dura di rimuovere ad un' infinita diſtanza il punto di concorſo delle potenze, che allora diventano parallele.

Ecco pertanto un metodo di preſcindere da queſt' ipoteſi nello ſtabilire le proprietà delle potenze parallele. Sieno applicate (*Fig.* 7.) alla verga AD le due potenze parallele AB, DE. Si prenda ſulla direzione della potenza DE un punto O, e ſi congiunga OA, la quale incontri in C la BC menata parallela alla verga dal punto B. Indi ſi pigli $OF = AC$, $OG = DE$, e ſi guidi nel parallelogrammo FG la diagonale OH, la quale incontra, prolungandola, la verga in I, donde pigliando $IM = OH$, e menando MP parallela alla verga, ed uguale a CB, ed indi giungendo IP, queſta IP è la riſultante delle due potenze parallele AB, DE. Imperciocchè OH, ovvero IM è la riſultante delle due AC, DE; IP è la riſultante delle due IM, MP, ovvero delle tre AC, MP, DE, oppure AC, CB, DE, o finalmente delle due propoſte AB, DE.

Ora biſogna dimoſtrare, che queſta riſultante IP è 1.° parallela alle due componenti AB, DE; 2.° uguale alla loro ſomma; 3.° applicata ad un tal punto I della verga, che ſta $AB : DE :: ID : IA$.

Dimoſtrazione.

1.° Menata da I la IL uguale e parallela alla OF, e la IN uguale e parallela alla DE, è manifeſto, che la retta IM rieſce diagonale del parallelogrammo formato da IL, ed IN, e la retta, che da M ſi mena parallela alla verga fino al lato IN prolungato, coincide colla MP; e quindi la IP cade ſul lato IN, e conſeguentemente è parallela ad AB, e DE.

2.° Pe' triangoli ſimili ed uguali ACB, NMP riſulta $AB = NP$; dunque $IP = IN + NP = DE + AB$.

3.° AB ſta a DE in ragion compoſta di AB ad AC, e di AC a DE. Ma $AB:AC::OD:OA$, $AC:DE::OA.DI:OD.AI$ (Boſſut *Mech.* §. 42.). Dunque AB ſta a DE in ragion compoſta di $\frac{OD:OA}{OA.DI:OD.AI}$, cioè come $DI:AI$. Il che era ecc.

Si dimoſtra ciò in una maniera più generale ſupponendo (*Fig.* 8.) il punto D ſuori delle direzioni delle due potenze parallele AC, Mi. Imperciocchè condotte le rette DA, DM, e le parallele CB, iG alla verga AM, indi preſa $DE=AB$, $DF=MG$, e fatto il parallelogrammo EF, la ſua diagonale Du ſarà la ſorza compoſta di AB, MG. Dal punto t della verga, dove reſta tagliata dalla detta diagonale, ſi tiri tN parallela ed uguale a DE, e tH parallela, ed uguale ad MG, e ſi compia il parallelogrammo NH, la cui diagonale tP, ſarà in dirittura con Du, ed uguale a Du. Finalmente dallo ſteſſo punto t ſi guidi la tr parallela alle potenze date AC, Mi, e ſi giunga la Pr parallela alla verga; dico 1.°, che ſarà tr la forza compoſta delle due date parallele AC, Mi; 2.° che ſarà $tr=AC+Mi$; 3.° che ſtarà $AC:Mi::Mt:tA$.

Dimoſtrazione.

1.° La potenza AC è compoſta di AB, BC; la forza Mi di MG, Gi. Dunque la compoſta di AC, Mi è la ſteſſa che la compoſta delle quattro DE, DF, BC, Gi, cioè delle tre Du, BC, Gi, oppure tP, BC, Gi. Ora la potenza BC agiſce in A verſo M, e la Gi agiſce in M verſo A, cioè in direzione oppoſta, e sì l' una che l' altra può concepirſi applicata al punto t della linea di loro direzione. Dunque la compoſta delle due date AC, Mi è la ſteſſa che la compoſta delle due tP, $Gi-BC$. Se pertanto ſi guidano parallele alla verga le Nml, HOS, la ſimilitudine, ed uguaglianza de' triangoli ABC, tNm; MiG, tHS dà $BC=Nm$, $Gi=HS$; onde $Gi-BC=HS-Nm=HO+OS-(Nl-lm)=OS+lm$.

Dunque la potenza compoſta delle due date parallele è la ſteſſa che la compoſta di tP, ed $OS+lm$. Dal punto O guido parallelamente alle date potenze la retta Oq, ed ho il triangolo OPq ſimile ed uguale a tlm: dunque $lm=Pq$, e quindi

quindi $OS + lm = Pr$. Perlochè la potenza composta delle due AC, Mi non è altro che la tr.

2.° $tr = tS + Sr = Mi + Oq = Mi + tm = Mi + AC$.

$AC : AB$

3.° Sta $AC : Mi$ in ragione composta di $AB : MG$, ovvero

$MG : Mi$

in ragione composta (guidata la DX parallela alle due poten-

$DX : DA$

ze date) di $DA . tM : DM . tA$, vale a dire come $tM : tA$. Il

$DM : DX$

che era ecc.

ARTICOLO VIII.

Sopra un grave errore di taluno nella risoluzione delle forze.

I. Due verghe lineari perfettamente rigide XA, AY (*Fig.* 9.) congiunte in A sotto un angolo ottuso XAY, ed attaccate a due punti immobili X, Y, vengono tirate da una forza AB, che agisce da A verso B in direzione perpendicolare alla verga AY. Qui pare a primo aspetto, che essendo la forza traente perpendicolare ad AY non debba per essa il punto fisso Y soffrire alcuna pressione o stiramento; ma se si riflette, che la detta forza tende a far rotare da sinistra a destra la verga AX intorno ad X, e che ciò non può accadere, attesa l'unione delle due verghe, senza che venga stirato o premuto in fuori il punto fisso Y, se ne inferisce, che la forza AB, sebbene perpendicolare alla verga AY, agisce contro il punto fisso Y.

II. Per ritrovare gli sforzi fatti contro X, Y dalla data forza AB, questa si risolve comunemente dai Meccanici nelle due AC, AD in direzione delle verghe, e si pianta il Teorema, che lo sforzo fatto contro Y nella direzione YA sta allo sforzo fatto contro X nella direzione XA come sta AD ad AC.

III. Contro il detto Teorema sorge una difficoltà, ed è che se la forza AB si risolve in AE in direzione della verga XA, ed AF perpendicolare ad essa verga, lo sforzo fatto

contro X pare dover essere unicamente AE (minore di AC), essendo nulla per riguardo al punto fisso X la forza AF perpendicolare alla verga. Si risponde, esser falso, che la forza AF perpendicolare alla verga XA niente agisca contro X; imperciocchè essa tende a far girare da dritta a sinistra l'altra verga AY intorno ad Y, il che per l' unione delle due verghe in A produce in X uno sforzo diretto da X in A.

IV. Perlochè risolvendo anche la forza AF nelle due AH, AG, quella in direzione della verga YA, questa perpendicolare ad essa; e risolvendo parimenti AG nelle due tra sè perpendicolari AL, AI; e poscia AL nelle due perpendicolari AN, AM; e così pure AM nelle due perpendicolari AP, AO; e così sempre senza fine, risulterà tutto lo sforzo, esercitato contro il punto fisso X in direzione XA, $= AE + AI + AO +$ ecc. *in inf.*, e similmente lo sforzo fatto contro Y in direzione YA risulterà $= AH + AN +$ ecc. *in inf.*

V. Le rette AE, AI, AO, ecc. *in inf.* formano una progressione geometrica discendente: imperciocchè per li triangoli simili si ha $AB : AG :: \overline{AF}^2 : \overline{AG}^2 :: \overline{AG}^2 : \overline{AL}^2 :: AG : AM$. Dunque $\div AB$, AG, AM, ecc. Dunque $\div AE, AI, AO$ ecc.

VI. La somma di detta progressione, ovvero $AE + AI + AO +$ ecc. *in inf.* è uguale ad AC: in fatti si ha questa somma prendendo il quadrato del primo termine, e dividendolo per la differenza fra il primo termine e il secondo, vale a dire $AE + AI + AO +$ ecc. *in inf* $= \frac{\overline{AE}^2}{EI}$ (e prolungando IG in T) $= \frac{\overline{BF}^2}{BT}$; la similitudine poi de' triangoli somministra $BT : BF :: \overline{BG}^2 : \overline{BF}^2 :: \overline{BF}^2 : \overline{BA}^2 :: BF : BD$. Dunque $BD = AC = \frac{\overline{BF}^2}{BT} = AE + AI + AO +$ ecc. *in inf.* Si dimostra similmente $AH + AN +$ ecc. *in inf.* $= AD$.

VII. Finalmente si conchiuda col riflesso importante e decisivo, il quale basta per pienamente convincere, vale a dire che la primitiva comune risoluzione della forza AB in AC, AD è la vera e l'unica per far conoscere gli sforzi totali esercitati contro i punti fissi X, Y in direzione delle ver-

ghe; e ciò per l' incontraſtabil ragione, che la forza *AC* non può in verun modo agire contro il punto *Y* reſtando tutta conſumata contro *X*, ed *AD* non può in minima parte agire contro *X*, perchè tutta s' impiega e conſuma contro *Y*. Di qui ſi ſcopre l' abbaglio del Sig. *Friſi*, il quale nel 2.° Tomo delle ſue Opere pag. 21 accuſa d' errore tutti i Meccanici perchè non errano con lui.

ARTICOLO IX.

Sopra la ſpinta delle travi, o tetti contro i loro ſoſtegni.

E' coſa a dir vero umiliante, che un Problema ſempliciſſimo, qual è quello di ritrovare la ſpinta d' una ſtanga o verga appoggiata ad un muro, ſia ſtato, e ſia tuttavia una pietra d' inciampo per parecchi Geometri di prima sfera, che ſi ſono poſti a trattarlo. Io eſporrò qui in breve la loro ſoluzione quaſi comunemente adottata; poſcia ne eſaminerò il fondamento; ed in fine recherò la vera e genuina ſoluzione ricavata da principj ſicuri e incontraſtabili, non già dinamici, ma puramente ſtatici rigoroſamente dimoſtrati.

PROBLEMA.

1. *In una verga diritta* LO (Fig. 10.) *appoggiata in* L *al piano verticale* KL, *in* O *al piano orizzontale* KO, *i quali piani ſi ſuppongono perfettamente levigati, trovare la ſpinta orizzontale, come pure la verticale ſoſtenuta dal punto* O, *eſſendo ritenuto il capo della verga dall' oſtacolo* X.

I. Soluzione ſecondo il metodo comune.

Menata dal centro di gravità *G* della verga la verticale *GH*, che rappreſenti il peſo *P* della verga, ſi riſolva la forza *GH* nelle due *IH*, *GI*, una perpendicolare all' aſſe della verga, l' altra in direzione dell' aſſe iſteſſo. Ciò fatto, egli è chiaro, che la forza *GI* eſercita e conſuma tutta la ſua azione ſecondo la direzione *LO* contro il punto O, e che l' altra *IH* operando con direzione perpendicolare alla verga

distribuisce con la stessa direzione le sue azioni sopra i punti O, L in reciproca ragione delle rispettive distanze dal centro di gravità, onde la parte di tal forza perpendicolare, che s' aspetta al punto O, sarà $ON = IH \cdot \frac{GL}{LO}$. Prolungata la LO si pigli sul suo prolungamento la $OB = GI$, e si guidi la perpendicolare $BM = ON$. Il punto O viene sollecitato nello stesso tempo dalle due forze OB, ON, oppure dalla forza ad esse equivalente OM, ovvero (conducendo la verticale MF) dalla forza verticale FM, e dalla orizzontale OF intesa ad urtare orizzontalmente l' ostacolo. Dico ora $LO = a$, $LG = b$, $LOK = \phi$; e sarà $IH = P \operatorname{cos.} \phi$; $GI = P \operatorname{sen.} \phi = OB$; $ON = BM = \frac{bP \operatorname{cos.} \phi}{a}$; $OM = P\sqrt{\left(\operatorname{sen.} \phi^2 + \frac{b^2 \operatorname{cos.} \phi^2}{a^2}\right)}$;

$$\operatorname{sen.} MOB = \frac{BM}{OM} = \frac{b \operatorname{cos.} \phi}{a\sqrt{\left(\operatorname{sen.} \phi^2 + \frac{b^2 \operatorname{cos.} \phi^2}{a^2}\right)}};$$

$$\operatorname{cos.} MOB = \frac{OB}{OM} = \frac{\operatorname{sen.} \phi}{\sqrt{\left(\operatorname{sen.} \phi^2 + \frac{b^2 \operatorname{cos.} \phi^2}{a^2}\right)}}; \ \operatorname{sen.} MOF =$$

$$\operatorname{sen.} (MOB + BOF) = \operatorname{sen.} MOB \operatorname{cos.} BOF + \operatorname{sen.} BOF \operatorname{cos.} MOB$$

$$= \frac{b \operatorname{cos.} \phi^2 + a \operatorname{sen.} \phi^2}{a\sqrt{\left(\operatorname{sen.} \phi^2 + \frac{b^2 \operatorname{cos.} \phi^2}{a^2}\right)}}; \ \operatorname{cos.} MOF =$$

$$\frac{\sqrt{\left(a^2 \operatorname{sen.} \phi^2 + b^2 \operatorname{cos.} \phi^2 - (b \operatorname{cos.} \phi^2 + a \operatorname{sen.} \phi^2)^2\right)}}{a\sqrt{\left(\operatorname{sen.} \phi^2 + \frac{b^2 \operatorname{cos.} \phi^2}{a^2}\right)}} =$$

$$\frac{\sqrt{\left(a^2 \operatorname{sen.} \phi^2 \operatorname{cos.} \phi^2 + b^2 \operatorname{sen.} \phi^2 \operatorname{cos.} \phi^2 - 2ba \operatorname{sen.} \phi^2 \operatorname{cos.} \phi^2\right)}}{a\sqrt{\left(\operatorname{sen.} \phi^2 + \frac{b^2 \operatorname{cos.} \phi^2}{a^2}\right)}} =$$

$$\frac{(a - b) \operatorname{sen.} \phi \operatorname{cos.} \phi}{a\sqrt{\left(\operatorname{sen.} \phi^2 + \frac{b^2 \operatorname{cos.} \phi^2}{a^2}\right)}}.$$ Dunque finalmente la spinta verticale FM è $= OM \operatorname{sen.} MOF = \frac{P}{a}(b \operatorname{cos.} \phi^2 + a \operatorname{sen.} \phi^2)$, e la

ſpinta orizzontale $OF = OM \,.\, \text{coſ.}\, MOF = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\phi$ $= \frac{P}{2a}(a-b)\,\text{ſen.}\,2\phi$. Il che era ecc.

C O R O L L A R I O.

2. Per trovare le ſpinte orizzontale, e verticale anche contro il punto L, ſi trasferiſca in L la parte della forza perpendicolare IH che gli compete, e ſia queſta la LQ perpendicolare all' aſſe della verga; indi ſi guidi l' orizzontale QR, con che ſarà riſoluta la forza LQ nelle due LR verticale, ed RQ orizzontale. Ma $LQ = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{coſ.}\,\phi$. Dunque $LR = LQ \,.\, \text{ſen.}\, LQR = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{coſ.}\,\phi^2$, ed $RQ = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\phi = \frac{1}{2}\,\frac{P}{a}(a-b)\,\text{ſen.}\,2\phi$.

II. Soluzione ſecondo lo ſteſſo metodo.

3. Il peſo, o la forza verticale GH della verga (*Fig.* 11.) ſi diſtribuiſce alle due eſtremità O, ed L per modo, che riſulta in L una forza verticale $LS = \frac{P}{a}(a-b)$, ed in O una forza verticale $OT = \frac{Pb}{a}$. Abbaſſo il perpendicolo SD ſull' aſſe della verga, e rimane riſoluta la forza LS nelle due DS normale alla verga, ed LD in direzione della medeſima tendente a ſpingere il punto O ſecondo OC prolungamento della verga. Prendo $OC = LD$, e meno la verticale CV; con che reſta riſoluta la forza OC nella verticale CV, e nella forza orizzontale OV. Pertanto riſulta $OC = LD = LS \,.\, \text{ſen.}\, LSD = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{ſen.}\,\phi$; $OV = OC \,.\, \text{coſ.}\, COV = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\phi$

$= \frac{P}{2a}(a-b)$ ſen. 2ϕ, che è la ſpinta orizzontale contro il punto O. La ſpinta poi verticale contro lo ſteſſo punto è $= OT + CV = \frac{Pb}{a} + OC$. ſen. $COV = \frac{Pb}{a} + \frac{P}{a}(a-b)$ ſen. ϕ^2
$= \frac{Pb}{a}$ (ſen. ϕ^2 + coſ. ϕ^2) $+ \frac{P}{a}(a-b)$ ſen. ϕ^2
$= \frac{P}{a}(a$ ſen. $\phi^2 + b$ coſ. ϕ^2). Il che era ecc.

COROLLARIO.

4. E' manifeſto, che ſe ſi vorrà riſolvere la forza $LM = DS = \frac{P}{a}(a-b)$ coſ. ϕ in altre due, una verticale LR, l' altra orizzontale LI, ſi troverà quella $= \frac{P}{a}(a-b)$ coſ. ϕ^2, e queſta $= \frac{P}{a}(a-b)$ ſen. ϕ coſ. $\phi = \frac{P}{2a}(a-b)$ ſen. 2ϕ.

SCOLIO.

5. Potrebbe naſcere il ſoſpetto, che dalle due forze LI orizzontale, ed LR verticale naſca qualche altra azione contro l'eſtremità O della verga, e quindi non ſia giuſto il valore della ſpinta verticale, e della orizzontale dianzi determinato contro il punto O. Ma queſto ſcrupolo ſi leva via mediante una nuova riſoluzione delle forze LI, LR conducendo all' aſſe della verga le perpendicolari In, Rt; con che reſta riſoluta la forza LR nelle due Lt, Rt, e la forza LI nelle due Ln, In, e di queſte quattro le due Lt, Ln dirette appunto contro il punto O per la loro uguaglianza ed oppoſizione ſi diſtruggono, e le due altre tR, nI coſpiranti riproducono colla loro ſomma la forza primitiva LM.

COROLLARIO.

6. Se si cercasse la posizione pel massimo momento della forza fatta da una data trave per rovesciare il muro LK, a cui è appoggiata, converrebbe moltiplicare la forza LI $= \frac{P}{a}(a-b)\,\text{sen.}\,\phi\,\text{cos.}\,\phi$ pel suo braccio di leva $LK = a\,\text{sen.}\,\phi$, ed uguagliare a zero il differenziale del prodotto, dal che si avrebbe $2\,\text{sen.}\,\phi\,\text{cos.}\,\phi^2 - \text{sen.}\,\phi^3 = 0$, e quindi $\text{sen.}\,\phi = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Sicchè

$$\begin{array}{rl} \log.\,2 = & 0,\ 3010300 \\ \log.\,3 = & 0,\ 4771212 \\ \hline & 9,\ 8239088 \end{array}$$

$$\log.\sqrt{\frac{2}{3}} = 9,\ 9119544. \qquad \phi = 54.^\circ\ 44'.$$

7. E' cosa assai singolare, e degna di tutta la considerazione, che quest' angolo di 54.° 44' domini e regni (a così dire) in una notabil parte delle Scienze Meccaniche; avvegnachè 1.° questo è l' angolo della situazione più vantaggiosa delle ale del mulino a vento; 2.° della situazione più vantaggiosa delle vele nella nave; 3.° della posizione più favorevole del timone per far girare il vascello; 4.° delle cellette, che formano le api ne' loro alveari, per avere il massimo possibil risparmio di cera.

Esame della predetta Soluzione.

8. La precedente soluzione, sebbene conforme a quanto ritrovano *Gio. Bernoulli* Oper. tom. 4. p. 189, il Sig. *Kaestner* nella sua Mem. *Tigni ad parietem inclinati reperire pressiones* negli Atti dell' Acc. di Erfurt. ann. 1778, ed altri Geometri di gran fama, è però indubitatamente erronea, ed anche smentita dall' esperienza (come io ho potuto ocularmente convincermene) la quale dimostra all' occhio, che sempre più cresce la spinta orizzontale contro l' ostacolo inferiore quanto più la verga si accosta alla posizione orizzontale. L' errore nasce dal non tenersi alcun conto della forza AG

(*Fig.* 12) normale alla verga, nata dalla risoluzione della verticale *AB*, come se la detta *AG* non potesse più avere la minima azione contro l' estremità inferiore *O* della verga, il che è falsissimo: imperciocchè essendo la forza *AG* obbliqua al muro verticale *AD* non può ritrovare nel muro la sua distruzione, come avverrebbe se fosse ad esso perpendicolare, ed in fatti risoluta *AG* nell' orizzontale *AQ*, e nella verticale *AX*, è evidente, che posto da parte lo sfregamento la verga striscierebbe sul muro lungo *AX*, e non rimane distrutta se non la forza *AQ* normale al muro. Ora è manifesto, che la forza *AX* ha azione contro l' estremità inferiore *O* della verga, così che risolvendo *AX* nelle due forze *Az* normale alla verga, ed *AN* in direzione della verga, la forza *AN* va tutta a caricare il punto *O*. Parimente se si risolve *Az* nella forza orizzontale *Ay*, e nella verticale *Av*, quella resta distrutta dalla resistenza del muro, e questa esercita parte della sua azione contro *O*, cioè risolvendo *Av* nella forza *AI* normale alla verga, e nella forza *AM* in direzione di essa, questa forza *AM* si impiega tutta contro il punto *O*, e così sempre proseguendo si trova che la spinta contro il punto *O* in direzione di *AO* viene rappresentata da $AR + AN + AM +$ ecc. *in inf.* sicchè posti come dianzi $FP = P$, $AO = a$, $AF = b$, e però $AB = \frac{P}{a}(a - b)$, sarà 1.° $AR = AB$ sen. $ABR = AB$ sen. $AOD = \frac{P}{a}(a - b)$ sen. ϕ. Inoltre $AG = AB$. sen. $ABG = \frac{P}{a}(a - b)$ cos. ϕ, $AX = AG$. sen. $AGX = \frac{P}{a}(a - b)$ cos. ϕ^2, 2.° $AN = AX$. sen. $AXN = \frac{P}{a}(a - b)$ sen. ϕ cos. ϕ^2. Similmente risulta $Az = AX$. sen. $AXz = \frac{P}{a}(a - b)$ cos. ϕ^3, $Av = Az$. sen. $Azv = \frac{P}{a}(a - b)$ cos. ϕ^4, 3.° $AM = Av$. sen. $AvM = \frac{P}{a}(a - b)$ sen. ϕ cos. ϕ^4. In tal guisa proseguendo si trova AR

$+ AN$

$+ AM + \text{ecc. } in\ inf. = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{fen.}\,\phi\left(1 + \text{cof.}\,\phi^2 + \text{cof.}\,\phi^4\right.$ $\left.+ \text{cof.}\,\phi^6 + \text{cof.}\,\phi^8 + \text{ecc. } in\ inf.\right)$. Ma è manifesto, che la serie $1 + \text{cof.}\,\phi^2 + \text{cof.}\,\phi^4 + \text{ecc.}$ ha per somma $\frac{1}{1-\text{cof.}\,\phi^2}$ $= \frac{1}{\text{fen.}\,\phi^2}$. Dunque $AR + AN + AM + \text{ecc. } in\ inf. = \frac{P(a-b)}{a\,\text{fen.}\,\phi}$. Perlochè se si piglia sulla direzione della verga la OH $= \frac{P(a-b)}{a\,\text{fen.}\,\phi}$, e indi si abbassa la verticale HK, nasce la ricercata spinta orizzontale $OK = OH.\,\text{cof.}\,KOH = \frac{P(a-b)\,\text{cof.}\,\phi}{a\,\text{fen.}\,\phi}$ $= \frac{P}{a}(a-b)\,\text{cot.}\,\phi$; dalla quale si vede, che il suo valore va sempre crescendo a misura, che scema l'angolo ϕ fatto dalla verga coll' orizzonte, e che diventa infinito quando quest' angolo è infinitamente piccolo.

9. Si dimostra questo stesso più speditamente così: si risolva (*Fig.* 13) la forza verticale FP del peso della verga nella orizzontale FI, e nella FL parallela alla verga, e sarà $FL = \frac{FP}{\text{fen.}\,FLP} = \frac{P}{\text{fen.}\,\phi}$, $FI = \frac{P\,\text{cof.}\,\phi}{\text{fen.}\,\phi}$. Ora la forza FL s'impiega tutta a premere il punto O in direzione della verga, e viene rappresentata da $OQ = FL = \frac{P}{\text{fen.}\,\phi}$. Se si abbassa la verticale QG, nasce dalla forza OQ la spinta orizzontale $OG = OQ\,\text{fen.}\,OQG = \frac{P\,\text{cof.}\,\phi}{\text{fen.}\,\phi}$. La forza poi orizzontale FI trasferendo alle due estremità A, ed O della verga la sua azione per modo, che risulta in A la spinta orizzontale $AS = \frac{OF}{OA}.\,FI = \frac{P(a-b)\,\text{cof.}\,\phi}{a\,\text{fen.}\,\phi}$ ed in O la spinta orizzontale $OE = \frac{AF}{OA}.\,FI = \frac{Pb\,\text{cof.}\,\phi}{a\,\text{fen.}\,\phi}$. Laonde tutta la spinta orizzontale contro O, ovvero contro l' ostacolo posto in O sarà

$$OG - OE = \frac{P . \text{cos}. \phi}{\text{sen}. \phi} - \frac{Pb \,\text{cos}. \phi}{a \,\text{sen}. \phi} = \frac{P(a-b)\,\text{cos}. \phi}{a\,\text{sen}. \phi}$$

$$= \frac{P}{a}(a-b)\,\text{cot}. \phi .$$

10. Quando l' angolo AOD è assolutamente nullo, ossia la verga è perfettamente orizzontale, allora è evidente, che essa non può più esercitare veruna spinta orizzontale contro l' ostacolo collocato in O; eppure l' espressione di siffatta spinta $\frac{P}{a}(a-b)\,\text{cot}. \phi$ diviene in tal caso infinita. Vedasi presso il Sig. Cav. *Lorgna* (*Saggi di Statica* §. XI) la ragione assai plausibile di questo paradosso. Intanto è manifesto, che tutta la pressione verticale QG, che soffre il punto O, uguaglia l' intero peso della verga, cioè FP, il che apparisce dalla similitudine de' triangoli FPL, OQG, che hanno le ipotenuse FL, OQ uguali; è ciò parimente s' inferisce dall' essere la spinta verticale contro l' estremità inferiore O (*Fig.* 12) uguale ad

$$OE + HK = \frac{Pb}{a} + OH . \text{sen}. \phi = \frac{Pb}{a} + \frac{P(a-b)}{a} = P$$

11. La spinta orizzontale (*Fig.* 13) risulta la stessa così contro l' estremità superiore A, come contro l' inferiore O della verga, cioè $AS = OG - OE$, poichè pel §. 7. ambedue queste quantità hanno la stessa espressione $\frac{P}{a}(a-b)\,\text{cot}. \phi$. Ciò pure si dimostra (*Fig.* 12) così: 1.° $AQ = AG . \text{sen}. AGQ$ $= \frac{P}{a}(a-b)\,\text{sen}. \phi \,\text{cos}. \phi$. Inoltre $Az = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{cos}. \phi^3$,

2.° $Ay = Az . \text{sen}. Azy = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{sen}. \phi \,\text{cos}. \phi^3$. Parimente

$Av = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{cos}. \phi^4$, $AI = Av . \text{sen}. AvI = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{cos}. \phi^5$,

3.° $AT = AI . \text{sen}. AIT = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{sen}. \phi \,\text{cos}. \phi^5$. Così seguitando si troverà la spinta orizzontale contro l' estremo superiore della verga $= AQ + Ay + AT +$ ecc. *in inf.*

$= \frac{P}{a}(a-b)$ sen. ϕ cos. $\phi\,(1 + \text{cos.}\,\phi^2 + \text{cos.}\,\phi^4 + \text{cos.}\,\phi^6$

$+$ ecc. *in inf.* $) = \frac{P}{a}(a-b)\frac{\text{sen.}\,\phi\ \text{cos.}\,\phi}{1-\text{cos.}\,\phi^2} = \frac{P}{a}(a-b)\frac{\text{cos.}\,\phi}{\text{sen.}\,\phi}$

$= \frac{P}{a}(a-b)\,\text{cot.}\,\phi$

Propongasi ora più generalmente il seguente

PROBLEMA.

12. *Una trave* AB *è appoggiata in* B *ad un piano orizzontale, ed in* A *ad un piano obbliquo* AC, *che forma coll' orizzontale l' angolo ottuso* ACB (Fig. 14); *si cerca quanta sarà la pressione perpendicolare in* A *contro il piano* AC, *e quanta la pressione così verticale che orizzontale in* B.

SOLUZIONE.

Sia M il centro di gravità della trave omogenea, e la verticale MN rappresenti il peso della trave, che si risolva in due MO perpendicolare al piano AC, ed MQ parallela alla trave. Si trasferisca MQ in BE in direzione della trave, e si guidi la verticale EH. Si trasferisca MO in AR, e BG in direzione perpendicolare ad AC, prendendo $AR = \frac{MB\,.\,MO}{AB}$, e $BH = \frac{AM\,.\,MO}{AB}$. Quindi si conduca la verticale GD. Ciò fatto, sia $BA = a$, $AM = b$, $BAC = \phi$, $ACB = \omega$, $BAR = QMO = 90° + \phi$, $NMO = 180° - \omega$, $QMN = \omega + \phi - 90°$, $EBH = 180° - \phi - \omega$, $GBD = \omega - 90°$, $MN = P$. Avremo dunque dalla Statica sen. QMO : sen. NMO :: MN : MQ, cioè

cos. ϕ : sen. ω :: $P : MQ = BE = \frac{P\,\text{sen.}\,\omega}{\text{cos.}\,\phi}$, parimente

sen. QMO : sen. QMN :: MN : MO, cioè cos. ϕ : $-$ cos. $(\omega + \phi)$ :: $P : MO = -\frac{P\,\text{cos.}\,(\omega+\phi)}{\text{cos.}\,\phi}$. Dunque la prima pressione ricercata $AR = \frac{MB\,.\,MO}{AB} = -\frac{P(a-b)\,\text{cos.}\,(\omega+\phi)}{a\,\text{cos.}\,\phi}$. Inoltre

$1 : \text{sen.}\, HBE :: BE : HE$, ossia $1 : \text{sen.}\,(\phi + \omega) :: \frac{P\,\text{sen.}\,\omega}{\text{cos.}\,\phi} : HE$; e però $HE = -\frac{P\,\text{sen.}\,\omega\,\text{sen.}\,(\phi + \omega)}{\text{cos.}\,\phi}$. Similmente $1 : \text{sen.}\, GBD :: BG : DG$, ovvero $1 : -\text{cos.}\,\omega :: \frac{AM \,.\, MO}{AB} : DG$, oppure $1 : -\text{cos.}\,\omega :: -\frac{Pb\,\text{cos.}\,(\phi + \omega)}{a\,\text{cos.}\,\phi} : DG$ $= \frac{Pb\,\text{cos.}\,\omega\,\text{cos.}\,(\phi + \omega)}{a\,\text{cos.}\,\phi}$. Dunque la pressione verticale contro B sarà $HE + DG = \frac{P}{a\,\text{cos.}\,\phi}\big(a\,\text{sen.}\,\omega\,\text{sen.}\,(\phi + \omega)$ $+ b\,\text{cos.}\,\omega\,\text{cos.}\,(\phi + \omega)\big)$. Di più, abbiamo $1 : \text{cos.}\, HBE :: BE : BH$, ovvero, $1 : -\text{cos.}\,(\phi + \omega) :: \frac{P\,\text{sen.}\,\omega}{\text{cos.}\,\phi} : BH = -\frac{P\,\text{sen.}\,\omega\,\text{cos.}\,(\phi + \omega)}{\text{cos.}\,\phi}$. Così pure $1 : \text{cos.}\, GBD :: BG : BD$, ovvero $1 : \text{sen.}\,\omega :: -\frac{Pb\,\text{cos.}\,(\phi + \omega)}{a\,\text{cos.}\,\phi} : BD = -\frac{Pb\,\text{sen.}\,\omega\,\text{cos.}\,(\phi + \omega)}{a\,\text{cos.}\,\phi}$. Dunque sarà la pressione orizzontale contro $B = BH - BD = \frac{P\,\text{sen.}\,\omega}{a\,\text{cos.}\,\phi}$ $\big(b\,\text{cos.}\,(\phi + \omega) - a\,\text{cos.}\,(\phi + \omega)\big) = \frac{P(b - a)\,\text{sen.}\,\omega\,\text{cos.}\,(\phi + \omega)}{a\,\text{cos.}\,\phi}$. Il che era ecc.

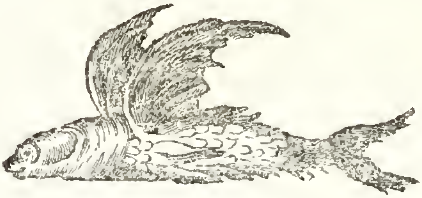


Fig: II

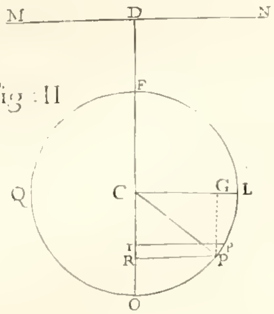


Fig: III

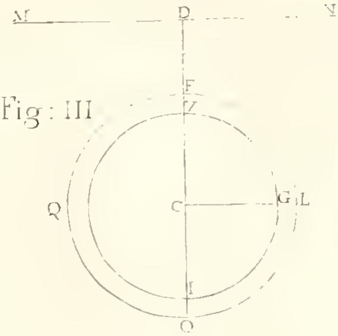
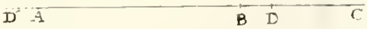


Fig: V

Fig: VI



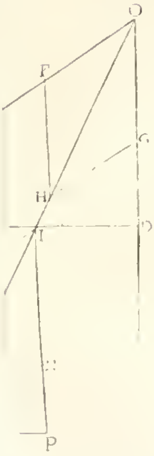
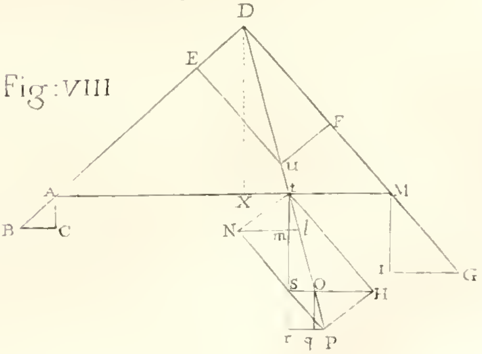


Fig: VIII



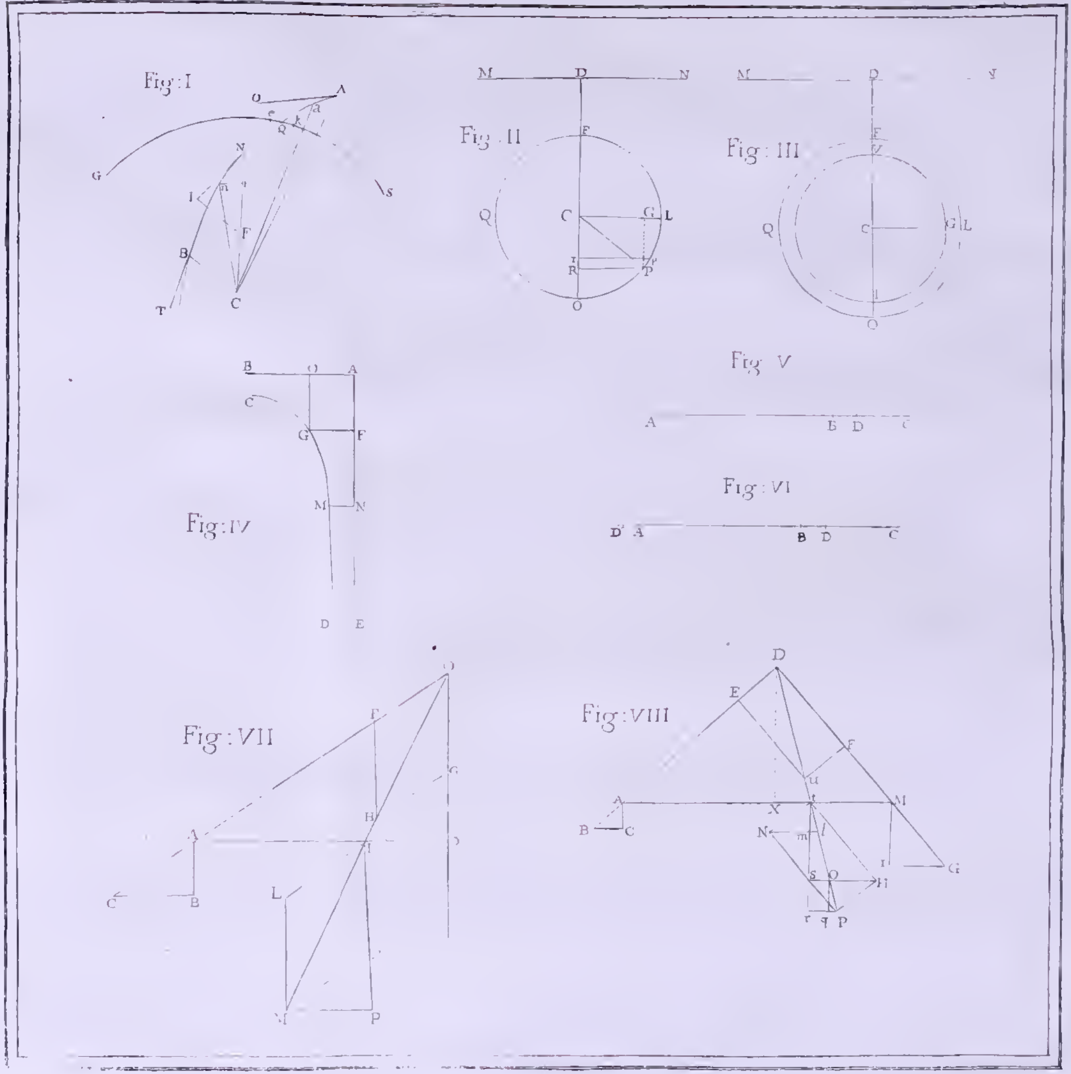


Fig: I
O A a e Q k G N S I n F B T C
Fig: II
M D N F Q C G L r R P O
Fig: III
M D N F V Q C G L I O
Fig: IV
B O A C G F M N D E
Fig: V
A B D C
Fig: VI
D' A B D C
Fig: VII
O F G H A I D C B L M P
Fig: VIII
D E F u A X t M B C N m l I G S O H r q P

Fig. X

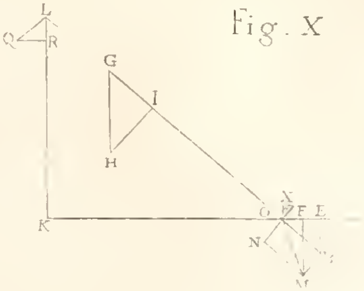


Fig: XI

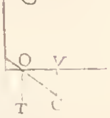
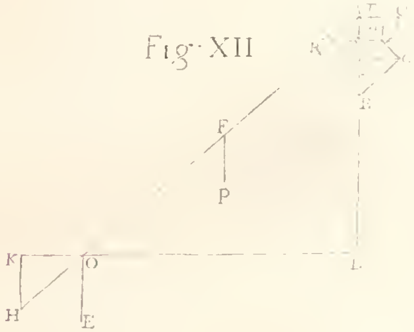


Fig: XII



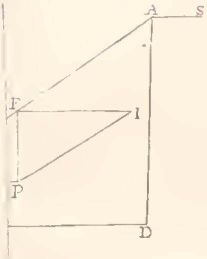


Fig: XIV

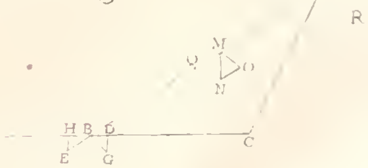


Fig: IX

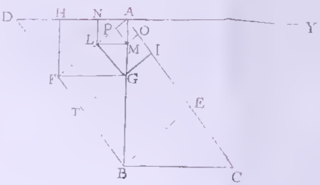


Fig. X

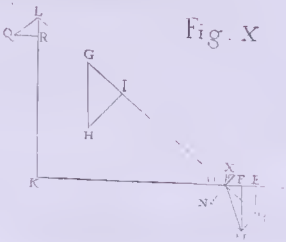


Fig: XI

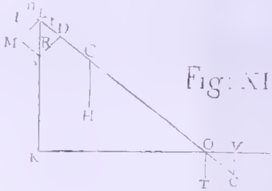


Fig: XII

Fig. XIII

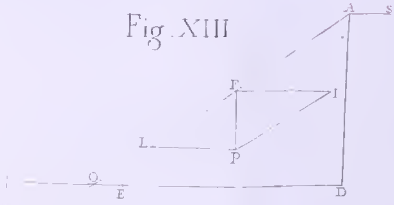
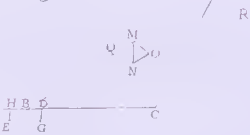


Fig. XIV



SOPRA

LA DISTRIBUZIONE DELLE ALLUVIONI.

Del Sig. Cavaliere Vittorio Fossombroni.

§. 1. La terra delle montagne vien trasportata naturalmente nei sottoposti campi adjacenti. L'amor proprio, e l'ignoranza lusingano sì fattamente che taluno si è figurato ordinarsi dalla natura ogni cosa a seconda dei nostri desiderj, e si è quindi acquietato sulla stolida fidanza che le acque torbide nel loro corso distribuirebbero lateralmente la terra incassandosi nella superficie del globo, risparmiando le spese per gli argini, e le contemplazioni degl'Idrostatici. Ma la natura fa ogni cosa per sè, e si compiace egualmente di una florida coltivazione, e di un nebuloso padule; onde se l'avidità degli uomini vuole oltre la naturale costituzione del paese ampliare l'estensione delle semente, conviene che ponga ogni cura o per raffrenare le bizzarre inclinazioni dei fiumi, o per trarre suo pro dagli stessi sforzi delle acque guidando le alluvioni sopra le frigide più basse terre dei piani, che bene spesso restano in tal guisa sanate, e vestite di una novella superficie pregna dei principj più favorevoli alla vegetazione. Hanno gl'Idrostatici, e specialmente lo *Zendrini* prescritte diverse regole per eseguire le artificiali bonificazioni per alluvione, e possono facilmente venire in capo a' Professori le restrizioni che talvolta esigono tali regole, onde non ci fermeremo a discuterle in questo breve scritto, il quale ha solo per oggetto di accennare dei metodi atti a calcolare il tempo necessario pel compimento di una regolata bonificazione. Questo riflesso non ha luogo quando il paese, che vuol bonificarsi, è affatto infruttifero, e con il solo rompere gli argini del fiume si resta contenti di coltivarne qualche porzione senza essere in pena se il rimanente spazio acquisti, o perda; ma trattandosi di rialzare la superficie di

porzioni di campagne circondate da altre fertili, e che possono esser danneggiate dalle inondazioni, la faccenda è ben differente. Coloro, che presiedono alla buona condotta delle vaste possessioni, molte volte si saranno trovati a veder gettare somme non indifferenti per coltivare un terreno, e fabbricarvi coloniche abitazioni, il qual terreno dovette poi porsi sotto l' acque d' un fiume, che si credeva dover trattenersi molti anni di più nel colmare altrove; ed all' incontro essersi lasciata infruttifera, e deserta una porzione di pianura sul supposto di doverla bonificare, mentre il fiume a ciò destinato restò per molto tempo di più che non credevasi occupato a terminare altre già principiate bonificazioni. Per provvedere pertanto al sistema delle colmate da farsi con l' acque di uno o più fiumi comparirà, credo, altrettanto utile quanto nuovo il presente soggetto.

§. 2. Esaminata dopo un dato tempo la quantità della terra portata da un fiume, e supponendo costante la ragione tra la quantità dell' acqua e della terra, che l' intorbida, suole dai periti predirsi un alzamento proporzionale alla moltiplicazione degl' intervalli eguali a quello preso da principio in considerazione; ma ciascheduno si accorgerà dell' errore di tal determinazione, considerando che al variare le circostanze della superficie della colmata variano quelle della foce del fiume, ed in conseguenza di tutto il tronco di esso non interrotto, e quindi la velocità delle sue acque, e la quantità della terra che trasportano, e finalmente l' altezza della superficie della porzione di campagna bonificata.

§. 3. E' manifesto che al primo velo di terra disteso dal fiume sopra la colmata nascerà un alzamento di foce, ed in conseguenza le acque torbide depositeranno per tutto il tronco del fiume stesso (il qual tronco intendo per tutto il corso di questa Memoria che sia non interrotto da *Pescaie*, o altro capace a variare la costituzione della pendenza) uno strato di terra, il quale disponga il fondo del letto in una linea parallela alla prima, e distante da quella (a un dipresso quando è piccolissima la pendenza del tronco) dell' altezza medesima del velo di terra depositato in colmata. Sia A^2 l' area da bonificarsi, m la quantità d' acqua che vi passa in un dato tempo, ed $1:n$ la ragione che ha il volume dell'

acqua a quello della terra, che pel tempo suddetto si depositata. Ciò posto l' altezza del velo di terra onde copresi la colmata nel tempo preaccennato sarà $\frac{mn}{A^2}$. Nel successivo eguale intervallo di tempo, per quanto passerà un volume eguale d' acqua per la colmata, non vi si depositerà però la quantità istessa di terra, essendosi dovuto con essa rialzare il fondo del tronco del fiume. Supposta pertanto *a* la lunghezza, *b* la larghezza di questo tronco, avremo la quantità di terra che potrà depositarsi in colmata nel secondo intervallo di tempo che sarà $mn - \frac{mnab}{A^2}$, e l' alzamento della superficie della colmata o sia della foce del fiume $= \frac{mn}{A^2}\left(1 - \frac{ab}{A^2}\right)$. Nel terzo intervallo la quantità di terra che potrà depositarsi in colmata sarà $mn - \frac{mnab}{A^2}\left(1 - \frac{ab}{A^2}\right)$, e perciò l' alzamento della superficie di essa sarà $= \frac{mn}{A^2}\left(1 - \frac{ab}{A^2} + \frac{a^2b^2}{A^4}\right)$ Procedendo così col ragionamento troveremo la serie degli alzamenti di superficie della colmata nei successivi intervalli come segue.

$$\frac{mn}{A^2}$$

$$\frac{mn}{A^2}\left(1 - \frac{ab}{A^2}\right)$$

$$\frac{mn}{A^2}\left(1 - \frac{ab}{A^2} + \frac{a^2b^2}{A^4}\right)$$

$$\frac{mn}{A^2}\left(1 - \frac{ab}{A^2} + \frac{a^2b^2}{A^4} - \frac{a^3b^3}{A^6}\right)$$

$$\frac{mn}{A^2}\left(1 - \frac{ab}{A^2} + \frac{a^2b^2}{A^4} - \frac{a^3b^3}{A^6} + \frac{a^4b^4}{A^8}\right)$$

ecc. ecc.

§. 4 Sommando questi alzamenti avremo quelli, che accadono in un numero d' intervalli, in ciascheduno dei quali

paſſa per la colmata la quantità d' acqua m con l' iſteſſa quantità di terra incorporata, eſpreſſi come ſegue.

In intervalli	
1	$\frac{mn}{A^2}$
2	$\frac{mn}{A^2}\left(2-\frac{ab}{A^2}\right)$
3	$\frac{mn}{A^2}\left(3-\frac{2ab}{A^2}+\frac{a^2b^2}{A^4}\right)$
4	$\frac{mn}{A^2}\left(4-\frac{3ab}{A^2}+\frac{2a^2b^2}{A^4}-\frac{a^3b^3}{A^6}\right)$
ecc.	ecc. ecc.

quindi in un numero x d' intervalli come ſopra ſarà la ſomma degli alzamenti eſpreſſa dalla formola $\frac{mn}{A^2}\left(x-(x-1)\frac{ab}{A^2}\right.$ $\left.+(x-2)\frac{a^2b^2}{A^4}-(x-3)\frac{a^3b^3}{A^6}\ldots\pm(x-(x-1))\frac{a^{x-1}b^{x-1}}{A^{2x-2}}\right.$

§. 5. Queſta formola ſi traſforma in tal guiſa

$$\frac{mnx}{A^2}\left(1-\frac{ab}{A^2}+\frac{a^2b^2}{A^4}-\frac{a^3b^3}{A^6}\ldots\pm\frac{a^{x-1}b^{x-1}}{A^{2x-2}}\right)+$$

$$\frac{mnab}{A^4}\left(1-\frac{2ab}{A^2}+\frac{3a^2b^2}{A^4}-\frac{4a^3b^3}{A^6}\ldots\mp(x-1)\frac{a^{x-2}b^{x-2}}{A^{2x-4}}\right)=$$

$$\frac{mnx}{A^2}\left(1+\frac{a^2b^2}{A^4}+\frac{a^4b^4}{A^8}+\frac{a^6b^6}{A^{12}}\ldots+\frac{a^{x-1}b^{x-1}}{A^{2x-2}}\right)-$$

$$\frac{mnx}{A^2}\times\frac{ab}{A^2}\left(1+\frac{a^2b^2}{A^4}+\frac{a^4b^4}{A^8}\ldots+\frac{a^{x-3}b^{x-3}}{A^{2x-6}}\right)+$$

$$\frac{mnab}{A^4}\left(1+3\frac{a^2b^2}{A^4}+5\frac{a^4b^4}{A^8}+7\frac{a^6b^6}{A^{12}}\ldots+(x-2)\frac{a^{x-3}b^{x-3}}{A^{2x-6}}\right)-$$

$$\frac{2mna^2b^2}{A^6}\left(1+\frac{2a^2b^2}{A^4}+\frac{3a^4b^4}{A^8}+\frac{4a^6b^6}{A^{12}}\ldots+\frac{x-1}{2}\times\frac{a^{x-3}b^{x-3}}{A^{2x-6}}\right),$$

attendendo

attendendo alle debite modificazioni secondo che sia x numero pari, o impari.

§. 5. Si scorge a prima vista da quest'espressioni che quando x sia molto grande, l' alzamento è

$$=\left(1-\frac{ab}{A^2}\right)\frac{mnx}{A^2}\left(1+\frac{a^2b^2}{A^4}+\frac{a^4b^4}{A^8}+\text{ecc.}\right.$$ *in infinito*, ed in conseguenza $=\frac{mnx}{ab+A^2}$ cioè dopo un numero d' intervalli tanto grande da potersi disprezzare l'effetto occorso in uno più, o uno meno di essi, sarà l' alzamento in ragione diretta della quantità della terra, ed inversa della somma dell'aree della colmata, e del tronco del fiume, come può facilmente confermarsi dal raziocinio accennato in principio.

§. 6. Esaminando la legge degli alzamenti che occorrono in ciascheduno intervallo, troveremo quell' alzamento competente all' intervallo $(2x+1)^{esimo}$ espresso così

$$\frac{mn}{A^2}\left(1-\frac{ab}{A^2}+\frac{a^2b^2}{A^4}-\frac{a^3b^3}{A^6}\ldots\ldots+\frac{a^{2x}b^{2x}}{A^{4x}}\right)=$$

$$\frac{mn}{A^2}\left(1+\frac{a^2b^2}{A^2}+\frac{a^4b^4}{A^8}\ldots\ldots+\frac{a^{2x}b^{2x}}{A^{4x}}\right)-\frac{mn}{A^2}\times\frac{ab}{A^2}\left(1+\frac{a^2b^2}{A^4}\right.$$

$$\left.+\frac{a^4b^4}{A^8}\ldots\ldots+\frac{a^{2x-2}b^{2x-2}}{A^{4x-4}}\right)=\frac{mn}{A^2}\times\frac{a^{2x+2}b^{2x+2}-A^{4x+4}}{(a^2b^2-A^4)A^{4x}}-$$

$$\frac{mn}{A^2}\times\frac{ab}{A^2}\times\frac{a^{2x}b^{2x}-A^{4x}}{(a^2b^2-A^4)A^{4x-4}}=$$

$$\frac{mn}{a^2b^2+A^4}\times\frac{a^{2x+2}b^{2x+2}-A^{4x+4}-a^{2x+2}b^{2x+1}A^2+abA^{4x+2}}{A^{4x+2}}=$$

$\frac{mn}{ab+A^2}\left(1+\frac{a^{2x+1}b^{2x+1}}{A^{4x+2}}\right)$ l' alzamento corrispondente all' intervallo $(2x+2)^{esimo}$ sarà $=\frac{mn}{A^2}\left(1+\frac{ab}{A^2}-\frac{a^2b^2}{A^4}\ldots\ldots\right.$

$\left.-\frac{a^{2x+2}b^{2x+2}}{A^{4x+2}}\right)=\frac{mn}{ab+A^2}\left(1-\frac{a^{2x+2}+b^{2x+2}}{A^{2x+4}}\right)$, similmente trove-

remo l' alzamento corrispondente all' intervallo $(2x+3)^{esimo}$ essere $= \frac{mn}{ab+A^2}\left(1+\frac{a^{2x+3}b^{2x+3}}{A^{4x+6}}\right)$ e così in seguito.

§. 7. Pongasi per brevità $\frac{mn}{ab+A^2}=C$, $ab=B^2$, e gli alzamenti suddetti diverranno

$$\left(C\,1+\frac{B^{4x+2}}{A^{4x+2}}\right)$$

$$\left(C\,1-\frac{B^{4x+4}}{A^{4x+4}}\right)$$

$$\left(G\,1+\frac{B^{4x+6}}{A^{4x+6}}\right)$$

ecc.

d' onde l' indole dei medesimi molto meglio che dalle superiori espressioni si manifesta. In fatto considerando il più semplice caso in cui sia $\frac{B^2}{A^2}=1$ cioè che l' area della colmata eguagli quella del tronco del fiume, occorrono nei successivi intervalli gli alzamenti $2C$, o, $2C$, o, $2C$ ecc., e perciò la somma degli alzamenti che occorrono negl' intervalli impari eguaglia quella degli alzamenti, che accadono negl' impari insieme e nei pari essendo questi ultimi $=0$; se poi sia $\frac{B^2}{A^2}<1$ gl' intervalli pari portano alzamenti (più o meno) ma sempre più piccoli che i respettivi impari, e finalmente se $\frac{B^2}{A^2}>1$ gl' intervalli pari portano delle escavazioni piuttosto che alzamenti, e questo risultato merita di essere esaminato a parte.

§. 8. Si osservino frattanto gli alzamenti che occorrono nel tronco del fiume. Nel primo intervallo che porta in colmata l' alzamento $\frac{mn}{A^2}$, l' alzamento nel tronco è $=0$, nel secondo l' alzamento in colmata $=\frac{mn}{A^2}\left(1-\frac{ab}{A^2}\right)$, e nel tron-

co $=\frac{mn}{A^2}$, e così in ſeguito di maniera che gli alzamenti nel tronco ſono gl' iſteſſi che in colmata, ſe non che ſempre uno di meno nell' ordine degl' intervalli, e quindi principiando dal primo gli alzamenti ſaranno diſpoſti come ſegue:

	nella Colmata	nel Tronco
1.°	$C(1+\frac{B^2}{A^2})$	o
2.°	$C(1-\frac{B^4}{A^4})$	$C(1+\frac{B^2}{A^2})$
3.°	$C(1+\frac{B^6}{A^6})$	$C(1-\frac{B^4}{A^4})$
	ecc.	ecc.
$x.^{mo}$	$C(1\pm\frac{B^{2x}}{A^{2x}})$	$C(1\mp\frac{B^{2x-2}}{A^{2x-2}})$

e quindi in un intervallo qualunque $x.^{mo}$ la quantità della terra depoſitata tra la colmata ed il tronco ſarà $=A^2C(1\pm\frac{B^{2x}}{A^{2x}})+B^2C(1\mp\frac{B^{2(x-1)}}{A^{2(x-1)}})$ che fatte le debite ſoſtituzioni trovaſi $=mn$, come eſige la ſuppoſizione fatta in principio.

§. 9. Pongaſi per brevità $\frac{B^2}{A^2}=D$, ed avremo nell' intervallo $(2x+1)^{esimo}$ l' alzamento $C(1+D^{2x+1})$ nel ſeguente $(2x+2)^{esimo}$ $C(1-D^{2x+2})$, nel ſucceſſivo $C(1+D^{2x+3})$ e così degli altri; la ſomma pertanto degli alzamenti che accaderanno in $2z$ intervalli principiando dal $(2x+1)^{esimo}$ *incluſive* ſarà $=2zC+C(D^{2x+1}-D^{2x+2}+D^{2x+3}\ldots-D^{2x+2z})$ $=2zC+CD^{2x+1}(1+D^2+D^4\ldots+D^{2z-2})-CD^{2x+2}(1+D^2+D^4\ldots+D^{2z-2})=2zC+CD^{2x+1}(1-D)\frac{D^{2z}-1}{D^2-1}=2zC+\frac{CD^{2x+1}}{D+1}(1-D^{2z})$, e la ſomma degli alzamenti in intervalli $2z+1$ ſarà $=(2z+1)C+C(D^{2x+1}-D^{2x+2}+D^{2x+3}\ldots$,

$+ D^{2x+2z+1}) = (2z+1)C + CD^{2x+1}(1 + D^2 + D^4 \ldots + D^{2z}) - CD^{2x+2}(1 + D^2 + D^4 \ldots + D^{2z-2}) = (2z+1)C + \frac{CD^{2x+1}}{D+1}(1 + D^{2z+1})$. Suppoſto pertanto $\frac{CD^{2x+1}}{D+1} = E$, ſaranno le ſomme ſucceſſive corriſpondenti ad intervalli $2z$, $2z+1$, $2z+2$, $2z+3$ ecc.

$$2zC + E(1 - D^{2z})$$
$$(2z+1)C + E(1 + D^{2z+1})$$
$$(2z+2)C + E(1 - D^{2z+2})$$
$$(2z+3)C + E(1 + D^{2z+3})$$

ecc.

in ciaſcheduna delle quali formole poſto $x = 0$, ſi ottiene la ſomma degli alzamenti principiando dal primo, e poſto $z = \infty$ ſi ritrova $\frac{mnz}{A^2 + ab}$ come conviene per corriſpondere all' accennato di ſopra.

§. 10. Dalla ſomma degli alzamenti $2zC + C(D^{2x+1} - D^{2x+2} \ldots - D^{2x+2z})$ ſi avranno le due formole ſeguenti, la prima delle quali rappreſenta gli alzamenti corriſpondenti agl' intervalli impari, e la ſeconda quelli corriſpondenti ai pari, nella totalità degl' intervalli $2z$, cioè $zC + CD^{2x+1}(1 + D^2 + D^4 \ldots + D^{2z-2})$, $zC - CD^{2x+2}(1 + D^2 + D^4 \ldots + D^{2z-2})$ ovvero $zC + CD^{2x+1} \times \frac{D^{2z} - 1}{D^2 - 1}$, $zC - CD^{2x+2} \times \frac{D^{2z} - 1}{D^2 - 1}$. Se la totalità degl' intervalli foſſe $2z+1$ cioè numero impari, ſarebbero le due diviſate ſomme come ſegue

$\frac{2z+2}{2}C + CD^{2x+1} \times \frac{D^{2z+2} - 1}{D^2 - 1}$, $zC - CD^{2x+2} \times \frac{D^{2z} - 1}{D^2 - 1}$. Le differenze pertanto tra gli alzamenti occorſi negl' intervalli impari, e quelli occorſi nei pari nei due caſi generaliſſimi di $2z$, e $2z+1$, ſarannno come appreſſo $CD^{2x+1} \times \frac{1 - D^{2z}}{1 - D}$, $C + CD^{2x+1} \times \frac{1 - D^{2z+1}}{1 - D}$. Si oſſervi di paſſaggio che queſte due

espressioni nel caso di $D = 1$ si riducono (con i conosciuti soccorsi del calcolo infinitesimale) alle due seguenti $2zC$, $(2z+2)C$ che sono identiche con le espressioni in cui si trasformano in tale occorrenza le due altre $2zC + E(1 - D^{2z})$, $(2z+1)C + E(1 + D^{2z+1})$, lo che combina con quanto osservammo al §. 7. che quando l' area della colmata eguaglia quella del tronco, gli alzamenti corrispondenti agl' intervalli impari sono $= 0$.

§. 11. Essendo che pertanto si ottenga maggior alzamento dagli alzamenti corrispondenti agl' impari intervalli, che ai pari; si avrebbe maggior alzamento in colmata ad un dato numero di alzamenti corrispondenti ai soli impari intervalli, che da quelli in egual numero ma corrispondenti agl' intervalli impari, e pari insieme. Si aumenti adunque di s termini la progressione esprimente gli alzamenti corrispondenti agl' impari intervalli in ambi i casi generali precedenti, cioè che la totalità degl' intervalli pari ed impari insieme sia $2z$, ovvero $2z+1$, ed avremo le due espressioni seguenti

I.ª

$$(s+z)C + CD^{2x+1}(1 + D^2 + D^4 \ldots\ldots + D^{2z-2} + D^{2z} + D^{2z+2} \ldots\ldots + D^{2z+2s-2}) = (s+z)C + CD^{2x+1} \times \frac{D^{2z+2s} - 1}{D^2 - 1}$$

II.ª

$$(s+z+1)C + CD^{2x+2}(1 + D^2 + D^4 \ldots\ldots + D^{2z} + D^{2z+2} + D^{2z+4} \ldots + D^{2z+2s}) = (s+z+1)C + CD^{2x+1} \times \frac{D^{2z+2s+2} - 1}{D^2 - 1};$$

eguagliando queste respettivamente alle due trovate di sopra al §. 9. $2zC + E(1 - D^{2z})$, $(2z+1)C + E(1 + D^{2z+1})$ otterremo le due seguenti equazioni

$$zC + E(1 - D^{2z}) = sC + \frac{E}{D-1}(D^{2z+2s} - 1)$$

$$zC + E(1 + D^{2z+1}) = sC + \frac{E}{D-1}(D^{2z+2s+1} - 1)$$

da una delle quali in ciaſchedun caſo dipende il numero s degl' intervalli impari da aggiungerſi agli z nel primo caſo, o $z+1$ nel ſecondo a fine di ottenere con i ſoli alzamenti corriſpondenti agl' intervalli impari l' iſteſſa ſomma che riſulta da $2z$ ovvero $2z+1$ alzamenti corriſpondenti ad intervalli ſucceſſivamente impari, e pari.

§. 12. Nella circoſtanza di $D=1$ diventa $E=\frac{C}{2}$, e le due equazioni col calcolo differenziale riduconſi alle ſeguenti $zC=sC+\frac{C}{2}(2s+2z)$, $zC+C=sC+\frac{C}{2}(2s+2z+2)$ che danno ambedue $s=0$, lo che s'accorda a meraviglia con i reſultati ſuperiori. Se poi ſia D frazionario, accennerò due ripieghi per ottenere in molti caſi il valore di s. Qualora la frazione D ſia piccoliſſima, ed s debba eſſer numero conſiderabilmente grande, le due equazioni ſi riducono a queſte

$$zC+E(1-D^{2z})=sC-\frac{E}{D-1}$$

$$zC+E(1+D^{2z+2})=sC-\frac{E}{D-1}$$

dalle quali in molti caſi ſi deduce aſſai proſſimamente $s=z$, onde ſi può ſtabilire che quando l' area della colmata è aſſai grande in proporzione di quella del tronco del fiume, ſi avrà per lo più quaſi l' iſteſſo effetto dagli alzamenti corriſpondenti agl' intervalli alternativamente pari ed impari, che ſi avrebbe da un egual numero di alzamenti corriſpondenti agl' impari intervalli, e quindi può naſcere l' idea di conſigliare in pratica la eſecuzione delle bonificazioni col tronco più piccolo che ſia poſſibile. Quando poi D ſia frazione aſſai proſſima all' unità, ed s non ſia da preſumerſi aſſai grande, poſto $D=1-P$, ſarà P piccoliſſima frazione, e per conſeguenza potrà aſſumerſi

$$D^{2z+2s}=1-(2s+2z)P+\frac{(2s+2z)(2s+2z-1)}{1.\ \ 2.}P^2$$

$$-\frac{(2s+2z)(2s+2z-1)(2s+2z-2)}{1.\ \ 2.\ \ 3.}P^3;$$

$$D^{2z+2s+2} = 1 - \frac{2s+2z+2}{1.}P + \frac{(2s+2z+2)(2s+2z+1)}{1. \quad 2.}P^2$$

$$- \frac{(2s+2z+2)(2s+2z+1)(2s+2z)}{1. \quad 2. \quad 3.}P^3$$; e le due equazioni ſi ridurranno alle ſeguenti

$$zC + E(1 - D^{2z}) = sC + \frac{E}{1-D}\Big((2s+2z)P - \frac{(2s+2z)(2s+2z-1)}{1. \quad 2.}P^2 + \frac{(2s+2z)(2s+2z-1)(2s+2z-2)}{1. \quad 2. \quad 3.}P^3\Big);$$

$$zC + E(1 + D^{2z+1}) = sC + \frac{E}{1-D}\Big((2s+2z+2)P - \frac{(2s+2z+2)(2s+2z+1)}{1. \quad 2.}P^2 + \frac{(2s+2z+2)(2s+2z+1)(2s+2z)}{1. \quad 2. \quad 3.}P^3\Big)$$

ed eſſendo in ciaſcheduna di eſſe una radice almeno, neceſſariamente reale (mentre ſi poſſono prendere le terze, ſeſte, ſettime poteſtà ſe l' occorrenza il richieda) ſi verrà a calcolare il valore di s, come ſi voleva.

§. 13. L' iſteſſa approſſimazione avrà luogo in molti caſi per ritrovare il numero r degl' intervalli neceſſarj per giungere ad avere un dato alzamento M; infatti ponendo $rC + E(1 \pm D^r) = M$ ſarà in caſo che D ſia piccoliſſima frazione $r = \frac{M-E}{C}$, lo che reſtituendo i valori $E = \frac{CD^{2z+1}}{D+1}$, $D = \frac{ab}{A^2}$, $C = \frac{mn}{ab+A^2}$ diventa $r = \frac{M(ab+A)}{mn}$, come richiedeſi dalla natura della queſtione; ed in caſo che D ſia frazione poco inferiore all' unità ponendo come ſopra $1 - P = D$ troveremo col diſprezzare le ſuperiori potenze di P, da una equazione di 3.°, 4.°, 5.° grado ecc. dipendere il valore di r.

§. 14. Fino ad ora non abbiamo determinato queſti intervalli, in ciaſcheduno dei quali ſi è ſuppoſto depoſitarſi la

quantità di terra *mn*, e quindi non apparisce come possa trarsi alcun lume dalle formole ritrovate; prescindendo nonostante dalla cognizione della quantità *mn* si viene a stabilire molto più di quello, che in principio possa aspettarsi, per mezzo della seguente considerazione. Astraggasi dalle meteorologiche stravaganze, delle quali occorrendo si può tener conto, e riflettasi che il tempo delle piene d' un fiume per esempio in un anno è costante; grandi, o piccoli che siano gl' intervalli nel decorso di ciascheduno dei quali si deposita la terra *mn*, il numero di essi nel corso di tutti gli anni potrà assumersi per costante; osservando in conseguenza l' alzamento prodotto in colmata in un anno, si avrà (avvertendo che non si abbandonino le debite dimensioni degli argini, e dei regolatori) il paragone con i successivi ed il cercato alzamento come segue.

§. 15. Sia r il numero indeterminato degl' intervalli che decorrono nel primo anno della bonificazione, ed avremo l'alzamento in colmata $= rC + \frac{CD}{D+1}(1 \pm D^r)$. Abbiasi dall' osservazione quest' istesso alzamento $= M$; e per le cose preaccennate sarà l' alzamento nel secondo anno $= rC + \frac{CD^{r+1}}{D+1}(1 \pm D^r)$, nel terzo $= rC + \frac{CD^{2r+1}}{D+1}(1 \pm D^r)$ e così degli altri; accumulando in conseguenza gli alzamenti di un numero y di anni avremo questa somma

$$= yrC + \frac{CD(1 \pm D^r)}{D+1}(1 + D^r + D^{2r} \ldots\ldots + D^{(y-1)r}$$

$$= yrC + \frac{CD(1 \pm D^r)}{D+1} \times \frac{D^{yr} - 1}{D^r - 1}.$$ Posta questa quantità $= N$ alzamento ricercato, otterremo una equazione della forma di quella del §. 13, dalla soluzione della quale dipenderà il numero y degli anni necessarj per arrivare all' alzamento N. Ma prescindendo dalla soluzione diretta di questa equazione, dato per l' osservazione l' alzamento dell' anno primo M, si vede come assumendo arbitrariamente il numero r possa aversi la proporzione tra M e l' alzamento che è per competere ad un anno qualunque nell' ordine dei seguenti.

§. 16. Se allor quando è seguita la bonificazione per il

corso

corso di un anno si deviassero le acque dalla colmata fino a tanto che nel corso per esempio di un altro anno il respettivo tronco del fiume siasi ridotto relativamente alla superficie della colmata nelle istesse circostanze nelle quali trovavasi al principio dell' anno primo, è chiaro che nel terzo anno l' alzamento in colmata sarebbe l' istesso che fu nel primo cioè $= rC + \frac{CD}{1+D}(1 \pm D^r)$, e l' istesso dicasi (seguendo l' istessa ipotesi) nel 5° nel 7° anno ecc., di modo che seguitando questa maniera di bonificare interpolatamente nel corso di anni $2m+1$ avrebbesi l' alzamento $(m+1)C\left(r + \frac{D}{D+1}(1 \pm D^r)\right)$, là dove continuando l' alluvione ogni anno sarebbe l' alzamento

$$=(2m+1)rC + \frac{CD}{D+1} \times \frac{1 - D^{(2m+1)r}}{1-D^r}(1 \pm D^r).$$

§. 17. Può ciascheduno paragonare queste due espressioni usando qualche destrezza nelle diverse ipotesi del valor di r, ma generalmente supponendo x il numero degli anni per i quali è durata la continua bonificazione, e per conseguenza $xrC + \frac{CD}{D+1} \times \frac{1-D^{xr}}{1-D^r}(1 \pm D^r)$ l' alzamento occorso, troveremo il numero y degli anni che bisognano a fine di avere l' istesso alzamento per mezzo della bonificazione nella guisa sopraesposta alternativa; in fatti dalle cose premesse si ha l' equazione $y = \frac{xr(1+D)(1-D^r) + D(1-D^{xr})(1 \pm D^r)}{r(1+D)(1-D^r) + D(1-D^r)(1 \pm D^r)}$; questa espressione può ridursi a quest' altra cioè

$$x + \frac{D(1 \pm D^r)}{(1-D^r)\left(r(1+D) + D(1 \pm D^r)\right)}(1 + xD^r - x - D^{xr}) =$$

$$x - \frac{D(1 \pm D^r)}{(1-D^r)\left(r(1+D) + D(1 \pm D^r)\right)}\left(x - 1 + xD^r\left(\frac{D^{xr-r}}{x} - 1\right)\right);$$

ma la quantità $\frac{D(1 \pm D^r)}{(1-D^r)\left(r(1+D) + D(1 \pm D^r)\right)}$ è sempre positiva, come pure nella massima parte dei casi l' altra

$x - 1 + xD^r \left(\frac{D^{nr-r}}{x} - 1 \right)$, ed in conſeguenza ſi ultimerà la bonificazione in minor numero d' anni (in moltiſſimi caſi almeno i quali poſſono a piacere dettagliarſi per mezzo di queſte formole) operando interpolatamente piuttoſto che continuamente ogni anno; e quando ancora foſſe un poco ſuperiore il numero degli anni che occorrono per la bonificazione alternativa in paragone della continua, ciaſcheduno ſi accorge quanto metta maggior conto il ſeguire il primo metodo piuttoſto che il ſecondo (per quanto generalmente preferito) mentre negli anni nei quali la colmata è ſenza acqua può metterſi a profitto il ſuo terreno per le più facili ſemente, e di più in molti caſi s' impiega per ultimare la bonificazione minor diſpendio.

§. 18. Finalmente per accorgerſi quanto ſia fallace il dedurre dall' alzamento del primo, o ſecondo anno con una ſemplice proporzione quelli, che occorreranno nei ſucceſſivi, baſta oſſervare che con tal computo ſi avrebbe in anni y l'alzamento $y\left(rC + \frac{CD}{D+1} (1 \pm D^r) \right)$, ed in realtà l' alzamento è ſtato trovato ſopra $= yrC + \frac{CD}{D+1} (1 \pm D^r) \frac{1 - D^{yr}}{1 - D^r}$, e la prima ſomma eccede la ſeconda della quantità $\frac{CD}{D+1} (1 \pm D^r) \left(y - \frac{1 - D^{yr}}{1 - D^r} \right)$ la quale in certi valori aſſegnabili ſpecialmente alle quantità y, ed r diventa molto ſenſibile.

§. 19. Abbiamo ſempre ſuppoſto che nel principio della bonificazione il tronco del fiume ſia di una tal giacitura che il fondo della foce reſti a livello colla ſuperficie del terreno da bonificarſi, lo che talvolta non ſuccede potendo la linea del fondo eſſere alquanto ſuperiore o inferiore a quella che occorrerebbe per adempire tal condizione; allora naſcono formole diverſe pel calcolo degli alzamenti, e la ſerie che gli eſprime, lungi dal ſeguitare una legge coſtante, ne prende altra meno regolare, ma riducibile nonoſtante con i principj quaſi medeſimi ſopraeſpoſti. Con quelle formole ſi riſolvono diverſe queſtioni che ſi preſentano in ſeguito di queſte con-

ſiderazioni nel voler diſporre le colmate da farſi in diverſe porzioni di terreno ſucceſſivamente una dopo l' altra; per eſempio ſuppoſto che il tronco per aver colmato una porzione di campagna abbia talmente alzato il ſuo fondo che la foce reſti aſſai ſuperiore alla ſuperficie della porzione di terreno che debbeſi ſucceſſivamente bonificare, è chiaro che introducendo l' acqua in colmata, nel primo gli alzamenti saranno molto maggiori dei calcolati ſino ad ora, lo che ſarebbe vantaggioſo; ma ſe con chiuſa, o palafitta ſituata alla foce s' impediſca l' eſcavazione del tronco, perderemo il vantaggio ſopraccennato, ed invece ne avremo un altro cioè ſinattantochè la ſuperficie della colmata non ſiaſi alzata al livello del ſondo della foce diventando $=0$ il tronco non interrotto, negl' intervalli impari e nei pari ſaranno uguali gli alzamenti in colmata, e quindi la ſomma di tutti formerà più preſto una quantità ſignificante; trovo pertanto nei diverſi caſi quale dei due partiti ſia da preferirſi. In oltre ſe il terreno da bonificarſi ſia alquanto ſcoſceſo, e poſſano introdurſi l' acque tanto per la più baſſa quanto per la più alta parte, le diverſe modificazioni del tronco nei due diverſi caſi producono l' ultimazione della colmatura in tempo differente, e queſto tempo ancora ſi calcola; ma io mi luſingo di potere eſporre ſimili riſultati in altra occorrenza, allorchè mi fermerò a dettagliare delle avvertenze pratiche neceſſarie per profittare delle accennate teorie. In fatti convien diſtinguere l' eſtenſione del tronco del fiume da introdurſi nel calcolo, ed in certi caſi ſoſtituire la quantità $\frac{mnab}{2A^2}$ invece della $\frac{mnab}{A^2}$. Volendo poi aſſegnare *a priori* un valor proſſimo alla quantità r, fa d' uopo indagare la maſſa terroſa traſportata dal fiume, ed a tale oggetto ho praticato una macchinetta aſſai ſemplice per ottenere i ſaggi a diverſe profondità ſotto la ſuperficie del fiume iſteſſo: l' altezza del corpo d' acqua corrente, e lo ſtrato d' onde prendeſi quella, ſopra della quale vuole iſtituirſi l' eſperimento, ſono elementi da conſiderarſi per avere qualche deciſivo reſultato, quantunque ſiano ſtati negletti nelle famoſe eſperienze fatte ſu tale propoſito nel Reno di Germania, in quello di Bologna, nell' Arno ed al-

trove, ed io mi ſon trovato ad ottenere dall' iſteſſo volume d' acqua torbida preſo a diverſe altezze fino un quinto di terra più, o meno non ſolo nell' iſteſſo fiume, ma ancora nella iſteſſa piena, e nell' iſteſſo tempo.

APPENDICE.

Nel principio di queſta Memoria trovammo ſotto due differenti forme la ſomma d' una quantità di progreſſioni Geometriche, e ciò ne porge occaſione di accennare come alle ſomme delle progreſſioni ſuddette ſi riducano quelle di infinite ſerie, ed il reſpettivo riſcontro con infinite equazioni a differenze finite integrabili.

Siano le progreſſioni

$$1 \; \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{a-1}{a-1}$$

$$1+a \; \ldots\ldots\ldots = \frac{a^2-1}{a-1}$$

$$1+a+a^2 \; \ldots\ldots = \frac{a^3-1}{a-1}$$

$$1+a+a^2+a^3 \; \ldots\ldots = \frac{a^4-1}{a-1}$$

ecc. ecc.

$$1+a+a^2+a^3 \ldots\ldots + a^{x-1} = \frac{a^x-1}{a-1}$$

raccogliendo le ſomme da ambe le parti ſarà
$x+(x-1)a+(x-2)a^2+(x-3)a^3 \ldots + (x-x+1)a^{x-1}$
$= \frac{1}{a-1}(-x+a+a^2+a^3+a^4 \ldots + a^x)$, ma il primo membro di queſta equazione ſi riduce $= x(1+a+a^2 \ldots + a^{x-1}) - a(1+2a+3a^2+4a^3 \ldots (x-1)a^{x-2})$; dunque avremo
$\frac{1}{a-1}(-x+a+a^2+a^3 \ldots a^x) = x(1+a+a^2 \ldots + a^{x-1}) - a(1+2a+3a^2+4a^3 \ldots + (x-1)a^{x-2})$; ſommando in conſeguenza le progreſſioni, e dividendo per a, otterremo

$$\frac{1}{a-1} \times \frac{a^{x+1}-a}{(a-1)a} - \frac{x}{(a-1)a} = \frac{x(a^x-1)}{(a-1)a}$$

$-1-2a-3a^2-4a^3\dots-(x-1)a^{x-2}$ ovvero la somma della serie $1+2a+3a^2\dots+(x-1)a^{x-2}$ $=\frac{(x+1)(a-1)a^{x+2}-a(a^{x+1}-1)}{a(a-1)^2}$, e ponendo $x+1$ in vece d' x sarà la somma della serie

$$1+2a+3a^2\dots+xa^{x-1}=\frac{1+a^x(ax-x-1)}{(a-1)^2}.$$

§. 2. La serie $1+2a+3a^2\dots+xa^{x-1}$ $=2a(1+2a^2+3a^4+4a^6\dots+ya^z)+1+3a^2+5a^4$ $+7a^6\dots+(2r+1)a^{2r}$; ma la prima di queste due serie si somma per mezzo delle progressioni ponendo a^2 in vece di a, ovvero facendo come al §. 1.

$$1\ \dots\dots\dots = \frac{a^2-1}{a^2-1}$$

$$1+a^2\ \dots\dots = \frac{a^4-1}{a^2-1}$$

$$1+a^2+a^4\ \dots\dots = \frac{a^6-1}{a^2-1}$$

ecc. ecc.

$$1+a^2+a^4\dots+a^{2y}\ \dots = \frac{a^{2y+2}-1}{a^2-1}$$

donde si ottiene
$z(1+a^2+a^4\dots+a^{2y})-a^2(1+2a^2+3a^4\dots+(z-1)a^{2y-2}$ $=\frac{-z}{a^2-1}+\frac{a^2+a^4+a^6\dots+a^{2y+2}}{a^2-1}$, e per conseguenza sommando le due progressioni, avremo la somma della serie $1+2a^2+3a^4+4a^6\dots+ya^z$. Chiamisi S la somma della serie $1+2a+3a^2+4a^3\dots+xa^{x-1}$, ed S' la somma della serie $1+2a^2+3a^4+4a^6\dots+ya^z$, ed avremo la somma della serie $1+3a^2+5a^4+7a^6\dots(2r+1)a^{2r}=S-2aS'$, e dell' altra $1+4a^2+6a^4+8a^6\dots+(2r+2)a^{2r}$ $=S-2aS'+\frac{a^{2r+2}-a^2}{a^2-1}$.

§. 3. Ponendo inoltre

$$1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{1+a(a-2)}{(a-1)^2}$$

$$1+2a \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{1+a^2(2a-3)}{(a-1)^2}$$

$$1+2a+3a^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{1+a^3(3a-4)}{(a-1)^2}$$

ecc. ecc.

$$1+2a+3a^2+4a^3 \ldots + xa^{x-1} = \frac{1+a^x(ax-x-1)}{(a-1)^2}$$

ſarà ſommando da ambe le parti

$$x+(x-1)2a+(x-2)3a^2 \ldots\ldots + (x-x+1)xa^{x-1} =$$

$$\frac{x}{(a-1)^2}+\frac{\begin{pmatrix} a^2+2a^3+3a^4 \ldots\ldots + xa^{x+2} \\ -2a-3a^2-4a^3 \ldots\ldots -(x+1)a^x \end{pmatrix}}{(a-1)^2}$$; ma il primo membro ſi riduce $= xS - 2a(1+3a+6a^2+10a^3 \ldots + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}a^{x-2}$, ed il ſecondo $= F.S$ (intendendo per F la funzione che trovaſi ſommando le ſerie S); dunque la ſomma della ſerie

$$1+3a+6a^2+10a^3 \ldots\ldots + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}a^{x-2} = \frac{xS-F.S}{2a}$$

$$= \frac{(a^2x-2ax+x-a^2+1)S-(1+x)(1-a^x)}{2a(a-1)^2}.$$

§. 4. Diſponendo di nuovo queſte ſerie ora ſommate come abbiamo fatto dell' altre, otterrannoſi infinite altre ſerie, la ſomma delle quali ſi riduce alla ſemplice nozione delle Geometriche progreſſioni, aggiungendo o ſottraendo una delle quali ſi ridurrà a legge nota l' andamento dei coefficienti numerici. Si potranno anco variare le diſpoſizioni, e ottenere ſerie più complicate per eſempio

$$1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{1+a(a-2)}{(a-1)^2}$$

$$1+2a+3a^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{1+a^3(3a-4)}{(a-1)^2}$$

$$1+2a+3a^2+4a^3+5a^4 \;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{1+a^5(5a-6)}{(a-1)^2}$$

$$1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + 5a^4 + 6a^5 + 7a^6 = \frac{1 + a^7(7a-8)}{(a-1)^2}$$

$$1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + 5a^4 + 6a^5 + 7a^6 \ldots\ldots$$

$$+ xa^{x-1} + (x+1)a^x \ldots\ldots = \frac{1 + a^{x+1}\big((x+1)a + x + 2\big)}{(a-1)^2}$$

sommando da ambe le parti otterremo

$$z + (z-1)(2a + 3a^2) + (z-2)(4a^3 + 5a^4) + (z-3)(6a^5 + 7a^6) \ldots$$

$$+ (z - z + 1)\big(xa^{x-1} + (x+1)a^x\big) = \frac{z}{(a-1)^2}$$

$$+ \frac{1}{(a-1)^2}\Big(a(a-2) + a^3(3a-4) + a^5(5a-6) + a^7(7a-8) \ldots$$

$+ a^{x+1}\big((x+1)a - x - 2\big)\Big)$. Ma il secondo membro si riduce alle note serie già sommate ed il primo si decompone in una delle medesime meno la serie $2a + 3a^2 + 2(4a^3 + 5a^4)$ $+ 3(6a^5 + 7a^6) + 4(8a^7 + 9a^8) \ldots + (z-1)\big(xa^{x-1} + (x+1)a^x\big)$ la quale per conseguenza resterà sommata, e nell'istessa guisa senza altra pena che di maggior prolissità di calcolo questa molto più generale

$$2a + 3a^2 + 4a^3 \ldots + na^{n-1} +$$

$$2\big((n+1)a^n + (n+2)a^{n+1} + (n+3)a^{n+2} \ldots + (2n-1)a^{2n-2}\big) +$$

$$3\big(2na^{2n-1} + (2n+1)a^{2n} + (2n+2)a^{2n+1} \ldots + (3n-2)a^{3n-3}\big) +$$

$$4\big((3n+1)a^{3n} + (3n+2)a^{3n+1} + (3n+3)a^{3n+2} \ldots + (4n-3)a^{4n-4}\big) +$$

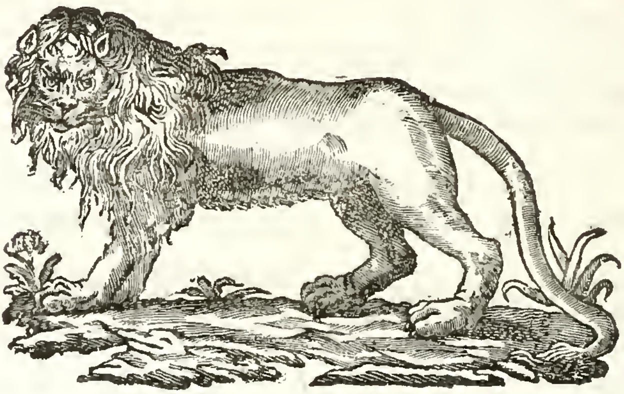
ecc. ecc.

$$(z-1)\big(xa^{x-1} + (x+1)a^x + (x+2)a^{x+1} \ldots (x+n-1)a^{x+n-2}\big).$$

attendendo a diverse avvertenze necessarie per la riduzione alle serie già sommate.

§. 5. Servirà questo cenno per indicare quante siano le famiglie delle serie complicatissime, e fino ad ora sommate col calcolo delle differenze finite, o infinitesime, o colla teoria delle serie ricorrenti, e nonostante riducibili alle più semplici Geometriche progressioni; trovando il valore di una frazione $\frac{P}{Q}$ nel caso di $P = 0$, $Q = 0$ avremo senza principj più sublimi il valore delle serie $1 + 2 + 3 + 4 \ldots + x$,

$1 + 5 + 7 + 9 \ldots + 2x + 1$ e de' numeri figurati ecc. Applicando poi questi stessi artifizj si trovano le integrazioni d' infinite differenziali a differenze finite ridotte alla somma di progressioni Geometriche, e la corrispondenza tra l' aggiunta, o la sottrazione della costante coll' aggiunta, o la sottrazione d' una progressione per ridurre i coefficienti numerici; dalle quali cose se possa trarsi utilità, molto meglio da una momentanea attenzione de' sagacissimi Geometri verrà posto in chiaro, che da' diffusi complicati calcoli, i quali io fossi qui per distendere.



SAGGIO

SAGGIO
DI OSSERVAZIONI ANATOMICHE
Intorno agli organi Elettrici della Torpedine.

Del Sig. MICHELE GIRARDI Medico di Camera di S. A. R. di Parma, Presidente al Gabinetto di Storia Naturale, e Professore della medesima, e di Anatomia.

Al Sig. GIO. GOTTLIEB WALTER celebre Professore di Notomia in Berlino.

L'Obbligante sorpresa che voi fatta mi avete nel mandarmi graziosamente l' Opere vostre, ed allora particolarmente quand' io appena pensar poteva che il mio nome noto vi fosse, e le gentili espressioni che meco usato avete mi somministrano ora favorevole occasione per dirigere a voi queste mie osservazioni onde in alcun modo mostrarvi con ciò la gratitudine mia. Oltre questo mi è pur dolce l' indirizzarle a voi e perchè vegga ciascuno quant' io a giusta ragione vi stimi, e perchè forse non v'è alcuno che meglio di voi possa decidere di quanto sien esse da valutarsi, siccome quello che molte delle più intricate parti e difficili del corpo umano avete sviluppate, e felicemente tutte delineate e descritte. Voi non ignorate certo che la torpedine ha fino da' più rimoti tempi risvegliata sempre la curiosità e l' attenzione dei Filosofi naturalisti. Il torpore, o sia intorpidimento da cui il suo nome deriva, o per dir vero la scossa che eccita nella mano di chi la tocca e la preme fu sempre un oggetto particolare, ed un argomento dovizioso di varie e ben fra loro diverse sentenze. Scrissero di queste *Aristotele*, *Dioscoride*, *Plinio*, *Galeno*, *Eliano*, e tant' altri, e tutti per il più a ciò condotti o dall' altrui autorità, o dalla voce comune dei pescatori, anzichè dalle proprie ed esatte loro os-

ſervazioni. Quindi la diverſità dell' opinioni, e la moltiplicità degli errori sì per riguardo agli effetti del peſce, che al peſce medeſimo. Volevano alcuni non ſolo che al toccar la torpedine s'eccitaſſe in noi la ſenſazion dolorifica, ma che e per l' aſta della foſcina, e per le reti entro cui foſſe preſa, e per la ſetola, e canna dell' amo ſcorreſſe l' attività ſua non ſolo ad intorpidir la mano del peſcatore, ma ad addormentarlo eziandio; altri non contenti di queſto tant' oltre ſi eſtendevano, che vi fu per ſino chi ſcriſſe che tale era la forza di queſto animale che paſſando la virtù ſua per l' acqua agitava la ſovrappoſta barca dei peſcatori, e che poſto fra morti peſci, quelli che venivano da lui tocchi ritornavano a muoverſi, come ſe vivi foſſero. Non diſſimili da queſte furono le varie opinion che ſi ebbero delle qualità intrinſeche della torpedine iſteſſa: pretendevano alcuni che le ſue carni ſiccome dolci, molli, e facili alla concozione, ottime foſſero per la nutrizione; laonde i Medici non ſolo ne lodavano l' uſo, ma ne predicavano i buoni effetti nella medicina ancora, e particolarmente per il male di capo, per l' epilepſia, per la riduzione dell' inteſtin retto ecc.; all' incontro volevano altri che la torpedine foſſe velenoſa, e nocivo molto il mangiarne; e però ne nacque preſſo alcune nazioni il bando aſſoluto di eſſa, proibendone con ciò pubblicamente a' peſcatori la vendita.

Tante e sì diverſe ſentenze, tuttochè col progreſſo del tempo di non poco moderate e corrette, riſvegliarono finalmente l' attenzion dei moderni, i quali poſto avendo a ſcrupoloſo eſame gli effetti tutti della torpedine, e levato il velo dell' ignoranza, ſcoperſero non altro eſſere l' intorpedimento che queſta produce, che una vera ſcoſſa elettrica, la quale ſoltanto allora, che viene immediatamente toccata, eccita nella mano e nel braccio di chi la tocca e la ſtringe. Di queſto ammirabile ſcoprimento ne ſiamo debitori al Sig. *Walſh*, ed indi al celebre noſtro amico e collega Sig. Ab. *Spallanzani*, il quale non contento di confermare in molte parti quanto quegli aveva attentamente oſſervato, più oltre con le proprie oſſervazioni eſtendendolo, or molti fatti illuſtrando, ora correggendone altri, nuove coſe e tutte intereſſanti produſſe. Stavaſi egli a Porto-Venere appunto dietro a

queſte occupandoſi, quand' io, paſſando a Genova, il ſorpreſi, ed allora fu che deſiderando egli di meco eſaminare la ſtruttura di queſti animali, per ciò che riguarda gli organi elettrici, non potendo allora per alcune combinazioni compiacerlo, m' impegnai di farlo in altro tempo, qualora favorevole occaſione ſi foſſe a me preſentata. In Genova dunque, fra le molte gentilezze compartitemi da quegli illuſtri cittadini, delle quali ſerberò ſempre coſtante memoria, queſta mi ſi offerſe, ed ivi appunto ebbero cominciamento queſte mie oſſervazioni, mercè la corteſia del Sig. *William Batt* illuſtre e dotto Medico, e Profeſſore di Chimica in quella Univerſità, il quale penetrato avendo il deſiderio mio, volle di una torpedine gentilmente favorirmi. Siccome però in quella delizioſa Metropoli non fu lungo il mio ſoggiorno, così qui reſtituitomi fui obbligato di procurarmene dell' altre dalla Spezia, e da Seſtri, onde più maturatamente eſaminare quant' ivi avevo quaſi di volo ed alla sfuggita oſſervato. Riguarderanno queſte ſol tanto gli organi elettrici, che proprj e particolari ſono di queſti animali, giacchè le altre parti, e la ſtruttura loro anatomica non differiſce in generale dall' altre raze, di cui la torpedine non è che una ſpecie particolare.

Le torpedini che furono da me eſaminate non eccedevano il peſo di trent' oncie, nè erano molto minori di venti. Avevano il dorſo, o ſia la faccia lor ſuperiore di colore oſcuro di cineree bolle macchiata, e la maggior parte con cinque nere marche e circolari diſtinta. Nella parte anteriore di queſta vi ſi vedevano gli occhi prominenti aſſai, e dietro a queſti due circolari fori, che ſi aprono nella parte ſuperior del palato. Il ventre, o ſia la faccia inferiore era bianca. Si diſtingue in queſta anteriormente la bocca, il cui labbro ſuperiore, che non ſi congiunge agli angoli con l' inferiore, aſcende e conduce a due piccole e quaſi rotonde aperture, le quali comunicano con due profondi ſeni ovali, e diviſi in molte picciole celle da membrane traſverſali, dalla pituitaria aſcendenti, ed interſecate da una longitudinale, le quali altro non ſono che le narici.. Verſo il centro, e lateralmente vi ſi veggono cinque feſſure in ciaſchedun lato, che ſono i fori delle branchie, le quali comunicano con l' interno del-

la gola, ed inferiormente l' ano; non omettendo che nel margine anteriore e laterale vi ſi riſcontrano molti forellini regolari, e diſtinti, dei quali in ſeguito parleremo. Tra queſti poi e le feſſure delle branchie accennate veggonſi molte macchie cineree, e come lenticulari, le quali indicano i ſottopoſti elettrici organi che dalla cute trapelano.

Queſti elettrici organi, oppure corpi falcati, ſono appunto quelli, dai quali l' accuratiſſimo noſtro *Redi* deduſſe il primo di tutti quella particolare ſenſazion dolorifica che dalle torpedini in noi deriva. Queſti organi ſono coſtituiti in ciaſchedun lato dell' animale, e ſi eſtendono in larghezza dal cranio e dalle branchie ſino alle cartilagini falcate delle gran pinne; in lunghezza dalle eſtremità anteriori alle cartilagini tranſverſe del diafragma. La figura di queſti corpi s' accoſta in certa maniera a quella delle reni, la cui parte conveſſa e più tenue guardi eſternamente, internamente la concava e la più craſſa. Non ſono però come le reni nella parte loro di mezzo elevati, ma piuttoſto longitudinalmente depreſſi. Sono queſti aderenti alle parti circonvicine, mercè d' una breve e forte tela cellulare, e d' alcuni faſci di fibre che dalla ſuperficie di queſti ſcorrono irregolarmente alle parti loro adjacenti. L' altezza di queſti organi è frappoſta tra la cute del dorſo e quella del ventre, ed a queſta ſono pure tenacemente attaccati. Non vuolſi per altro omettere che tra la ſuperficie di queſti corpi e la cute ritrovaſi una tenue ma forte membrana alla cute medeſima per una breviſſima cellulare ſtrettamente congiunta, le cui fibre con varia direzione procedendo alcune ſi perdono nella cute, ed altre negli organici corpi profondamente s' internano.

Queſti organi corriſpondono in lunghezza e latitudine alla grandezza della torpedine; quindi ſono maggiori o minori a proporzione ch' ella è maggiore o minore; dal che deriva non poterſi aſſegnare di queſti una dimenſione preciſa. Quelli però che furono da me oſſervati non erano di molto minori dell' eſtenſione d' un rene umano, alla cui figura, come abbiam detto, in gran parte ſi raſſomigliano.

La ſtruttura di queſti organi è particolare aſſai. Sono eſſi compoſti di moltiſſimi corpi o colonnette perpendicolari e per la maggior parte eſagone, tutte fra loro, mercè d' una te-

nuiſſima cellulare, aderenti; l' eſtremità delle quali ſi congiungono con la cute del dorſo, e quella del ventre: diſſi per la maggior parte eſagone, poichè ſe ne veggono alcune pentagone, e quadrangolari ancora, dipendendo talvolta la figura di queſte dalle differenti adeſioni d' alcune di eſſe, e dalla varia ſituazione e mozione dei corpi medeſimi.

Dell' altezza di queſte colonne ſi può ripetere quanto fu detto della grandezza dei corpi elettrici; ſono più lunghe ſe maggiore è l' animale, più brevi ſe minore. In univerſale però le più lunghe ſono quelle che ſi veggono nella parte più craſſa di queſti organi, la cui altezza non giunge intieramente a quella d' un pollice; le più brevi e corriſpondenti in altezza al dito mignolo, quelle che riguardano la circonferenza eſteriore. Il loro diametro a queſto pur corriſponde: non ſono tutte però interamente eguali, poichè ſi veggono alcune così un poco maggiori dell' altre: in generale non ſuperano il diametro d' una groſſa penna di gallo comune. Queſta groſſezza però voglio che ſia inteſa con reſtrizione, e ſoltanto relativa a quelle torpedini che furono da me eſaminate, non avendo io potuto aver la fortuna del *Redi*, a cui fu dato d' inciderne una del peſo di 15. libbre circa, le cui colonne erano sì groſſe, quanto una groſſa penna di cigno.

La ſoſtanza di queſte colonne è molle ma reſiſtente, e direi quaſi gelatinoſa; non già bianchiſſima, ma ſibbene cinerea, la quale eſſendo compreſa da una vagina bianca, che a guiſa di corteccia circonda e circonſcrive ciaſcheduna delle colonne accennate, detratta la cute compariſcono i corpi falcati come coperti, oppure intralciati d' una piccola reticella, o per dir meglio d' una di quelle maglie, delle quali le gentili noſtre donne ſogliono uſare oggigiorno per accreſcere ai loro veſtiti ornamento e vaghezza.

Queſte vagine, delle quali vengono circondate e compreſe le colonne tutte, ſe bene ſi conſiderino, moſtrano non altro eſſere certamente che una produzione della membrana ſottopoſta alla cute, e della cute medeſima, la quale come abbiam detto internandoſi nella ſoſtanza cinerea dei corpi falcati con molti e varj proceſſi, vengono queſti a coſtituire le vagine deſcritte, e con ciò a diſtinguere, ed in parte ancora a comporre le colonne medeſime.

Il numero di queste colonne in ciaschedun organo elettrico è vario, e relativo esso pure alla grandezza dell'animale. Alcuna volta ne ho numerate 420, tal' altra 480, ed ancora 520: questo numero però è egli così incostante, che di frequente mi è avvenuto di osservare non essere il numero d' una parte a quello dell' altra esattamente corrispondente, come si può vedere ancora in due torpedini che conservo nello spirito di vino, una di oncie sedici, l' altra di oncie quattro; la prima delle quali ha nella destra parte 514 colonne, nella sinistra 520: l' altra 265 nella destra, e 290 nella sinistra. Questa incostanza che in generale frequentemente ancora si osserva nei vasi, e nei nervi di ciaschedun animale, le quali nelle loro diramazioni quelle d' un lato non corrispondono sempre ed esattamente a quelle dell' altro, potrebbe forse indurre taluno a credere, che l' accrescimento del numero delle colonne da tutt' altro principio procedesse e differente da quello che veggiamo al crescere delle gengive nello sviluppo d' un nuovo dente, come ha l' *Hunter* opinato.

Se si esamini la natura di queste colonne o sia degli organi elettrici qualora sono questi naturalmente ed in sede propria costituiti, veggiamo che comprimendo con le dita alcuna parte di questi, levata appena la mano, si rimettono tosto le colonne al naturale livello, non rimanendovi indizio alcuno della fattavi compressione. Se si agitino poi, danno quelle mozioni medesime, che nell' agitamento d' un corpo gelatinoso si osserva.

Separato un pezzo di questi corpi ed agitato col manico del coltello sopra d' un vetro, la sostanza cinerea allora insensibilmente si scioglie, e svanisce in modo, che traspariscono le vagine, comprendenti le colonne, distinte in modo che la regolare e graziosa figura rappresentano di tanti favi uniti assieme, allora dal proprio alveario staccati. Questa cinerea sostanza però non svanisce intieramente nell' agitazione, ma si diminuisce soltanto, e rendesi ancor più diluta; e volendo più oltre agitarla, romponsi le vagine, e resta allora un semplice ed informe aggregato di cellulare e membrane, framischiato ad un avanzo della distrutta cinerea sostanza.

Se l' agitazione però diluisce e scioglie questa sostanza, una

leggier bollitura la condenſa e reſtringe, ed allora non rieſce difficile d' iſolare alcune delle colonne, le quali così iſolate non più eſagone o pentagone ma cilindriche intieramente ſi moſtrano. Se la bollitura poi di poco ecceda, anzichè prendere la ſoſtanza indicata una maggior conſiſtenza, ſi attenua, ed indi del tutto ſi ſcioglie.

Volendo eſaminare la ſtruttura di queſte colonne così iſolate e bollite, oppure agli organici corpi naturalmente congiunte, la più accurata inſpezione non mi potè mai ſomminiſtrar tanto lume quanto baſtaſſe per conoſcerle intieramente. Una leggiera macerazione però mi diede adito a penetrare più oltre, e ſe non ſono di molto ingannato, a conoſcerle ancora intieramente. La macerazione fatta nell' acqua ſemplice, ſciogliendo la tenue cellulare che vicendevolmente le colonne congiunge, moſtrava la maggior parte di queſte dalle vicine diſgiunte, e queſt' iſteſſe cilindriche e più riſtrette, dalle cui eſtremità ſi vedevano dei fiocchi filamentoſi, che davano come a divedere la ſoſtanza lor celluloſa. Le fibre poi, che componevano queſte colonne, ſembrava a primo aſpetto che teneſſero una ſpirale direzione, la quale poi eſaminata attentamente ſi vide non altro eſſere che l' effetto di quelle membrane che le colonne internamente compongono, come ha l' *Hunter* accuratamente oſſervato.

Queſta mirabile ſtruttura però non ſi moſtrò mai più chiara e diſtinta che nella macerazione di queſti corpi col vin roſſo eſeguita. Eſtratti queſti dal vino, e poſti nell' acqua, dopo una leggiera agitazione, ecco inalzarſi le bianche colonne in maſſima parte iſolate e fluttuanti, e come ad una roſſa baſe congiunte, le quali a' miei occhi offerivano un grazioſo ſpettacolo nell' antecedenti macerazioni non oſſervato. Queſto dovevaſi in gran parte alla tintura del vino, il quale penetrata avendo la ſoſtanza delle colonne, dava adito a conoſcerne più chiaramente i componenti. Si vedevano dunque le colonne tutte coperte di tante ſottiliſſime membrane le une ſovrappoſte alle altre, ed in modo tale coſtituite, che fra l' una e l' altra apparivano tanti ſpazj, o ſiano interſtizj, quante erano ad un di preſſo le membrane medeſime. Queſte per una tenuiſſima cellulare erano nella circonferenza alle vagine aderenti, e fors' anche

per lunghe fila fra loro, il che da principio faceva travedere quella ſpirale figura che abbiamo accennata. Gl' interſtizj poi fra l' una e l' altra di queſte membrane frappoſti contenevano in una tenuiſſima e laſſa cellulare quella gelatinoſa cinerea ſoſtanza delle colonne, la quale eſſendo nella macerazione in maſſima parte ſciolta e diſtrutta, le colonne non più cineree, ma bianche apparivano.

Nell' eſaminar queſti corpi così macerati due coſe mi ſi rappreſentarono, le quali forſe imporre potrebbero, come a me pure ſul principio impoſto avevano. La prima ſi fu che nell' agitazione, benchè leggieriſſima, di queſti corpi nell' acqua, le colonne facilmente ſi dividevano in molte e quaſi globoſe parti, come ſe le colonne di queſte iſteſſe, tutte iſolate, e le une ſovrappoſte alle altre, foſſero ſtate naturalmente compoſte: l' altra che le membrane componenti le colonne erano concave in una parte, e conveſſe dall' altra, e tutte coſtituite in maniera che a vicenda ricevevano, ed erano dall' altre coſtantemente ricevute. Queſta ſtruttura, che a primo aſpetto naturale ſembrava, ben ponderata ſi vide non altro eſſere che il ſemplice effetto della macerazione, poichè avendo queſta rilaſciate, ed in parte diſtrutte le vagine comprendenti le colonne, facilmente avveniva che queſte agitate nell' acqua ſi divideſſero in molte parti, le quali poi bene eſaminate ſi conobbe non altro eſſere che una parte delle colonne medeſime e tutte d' interſtizj regolari, e membrane compoſte. Lo ſteſſo dee pur dirſi della figura concava e circolare delle membrane, perchè mercè della macerazione diſtrutti gli appigli, e ridotteſi le colonne dalla figura eſagona alla circolare, e queſte iſteſſe per conſeguenza riſtrette, forza era che l' interne membrane di orizzontali ed eſagone che erano, eſſe pure e circolari e concave ſi rendeſſero, in quella maniera medeſima che una retta linea ed orizzontale compreſſa alle eſtremità infleſſa e curva divenire ſi vede.

Quanto ho ſino a qui deſcritto dell' organica ſtruttura di queſti elettrici corpi, altre oſſervazioni confermarono ancora, dietro alle quali mentre ſolitario nel mio gabinetto ſtava piacevolmente occupato, ebbi la tenera compiacenza di vedermi favorito da tre miei amici, i quali mi piace di nominare

minare, e per la sincera amicizia che loro professo, e perchè ancora avendo essi osservate le cose medesime danno non leggier peso alle mie osservazioni. Il primo di questi si fu il Sig. Dott. *Pietro Antonio Gasperotti* pubblico incisore di Notomia in questa R. Università, del quale, siccome d' occhio vero anatomico dotato, altre volte ebbi occasion di parlare, e di cui veggo in oggi con piacere avverate quelle speranze, che avevo un tempo di lui concepite; l' altro il Sig. Can. *Molinari*, il quale ad un sodo e giusto criterio accoppia molto bene lo studio e l' esercizio della Meccanica la più raffinata; il terzo il Sig. *Gio. Ulrici* uno dei più eccellenti Chimici che vanti questa nostra R. Farmacia. Questi non solo ebbero il piacere di veder chiaramente e le colonne isolate, e le membrane, e gl' interstizj di cui vanno composte, ma eziandio le sottilissime diramazioni dei nervi, e dei vasi, che per entro gli elettrici organi sono mirabilmente disposti.

Per ben intendere l' origine ed il progresso di queste nervose diramazioni, io penso che non sia per ispiacervi se prima di parlarvi dei nervi poche cose premetta della sorgente di questi, vale a dire del cervello; giacchè non mi pare che meriti d' essere nella discrizione di questi intieramente omesso. Voi ben sapete che il cervello delle torpedini, non meno che quello dell' altre raze, è di cinque lobi composto, i quali distinti particolarmente appariscono nella parte sua inferiore, o sia nella base del cervello, la quale ora vi sto discrivendo. Il lobo anteriore o sia il solitario è il maggiore di tutti. E' questo di figura quasi cilindrica, ma schiacciato all' innanzi, e dagli altri come distinto per un solco circolare e profondo; gli altri quattro vengono dietro, due anteriori e due posteriori, e questi sono così disposti, che nella loro figura in qualche maniera convengono coi corpi quadrigemelli del cervello umano. Dai due anteriori discendono due corpi longitudinali, che corrispondono ai corpi piramidali; dai posteriori ne derivano lateralmente altri tanti, che si potrebbero chiamar gli olivari, e questi nella parte superiore coperti da una sostanza cinerea e quasi corticale. Questi quattro corpi che formano come la midolla allungata, e sono tutti divisi da tre linee longitudinali, convengono in-

di tra loro, e reſtringendoſi compongono il principio della midolla ſpinale.

Dal cervello della torpedine naſcono molti nervi, alcuni dei quali non ſono che piccioli filamenti, che appena uſciti dal cranio ſi perdono ne' luoghi adjacenti; altri più conſiderabili, che ſcorrono ad alcune delle principali parti, e che meritano perciò d' eſſere annoverati e diſtinti. Il primo pajo di queſti è i nervi olfattorj, i quali nati a guiſa di due tenui filamenti dai lati del globo ſolitario ſi producono innanzi obbliquamente, e paſſando indi dalla cavità del cranio a quella delle narici ſi dilatano a guiſa degli olfattorj umani in una ſoſtanza ganglioforme, che ſcorre per il lungo, e quaſi da un eſtremo all' altro della membrana pituitaria. Da queſta ſoſtanza ſi producono moltiſſime diramazioni altre longitudinali, tranſverſali altre, le quali ſeguendo le traccie delle membrane aſcendenti da principio deſcritte, terminano in numeroſiſſimi filamenti, che a guiſa di fiocchi gli uni convenienti con gli altri ſi veggono in lunga ed ordinata ſerie diſpoſti verſo i lembi della pituitaria medeſima. Preſſo a queſti vengono gli optici nati da un ſolo principio dal ſolco che divide il ſolitario dai due lobi anteriori. Queſti eſciti dal cranio ſcorrono obbliquamente, e poſteriormente al globo dell' occhio. Dietro a queſti ſi vedono i motori degli occhi, i quali nati dai due lobi poſteriori del cervello vanno a terminare nei muſcoli all' occhio inſervienti. Dall' apice poi dei corpi olivari, e quaſi congiunti al primo pajo degli elettrici, naſcono que' nervi, i quali producendoſi lateralmente ed internamente al globo dell' occhio vanno a diſſeminarſi in due gruppi di ghiandole, che ſi veggono ſuperiormente, e nella parte anteriore degli occhi. Dalle parti laterali dei corpi olivari, e fors' anche dalla ſoſtanza cinerea che li copre, hanno origine tre paja di nervi, ch' io chiamerò elettrici, perchè tutti ſi diramano per la ſoſtanza degli elettrici organi. Il primo di queſti o ſia l' anteriore ed il minore paſſando innanzi ad una prominente cartilagine, produce fra gli altri minori aſſai un ramo conſiderabile ch' io chiamerò falcato, poichè aſcendendo lateralmente ed eſternamente al globo dell' occhio, ed indi inflettendoſi ſecondo la direzione dei corpi falcati, o organi elettrici, ſcorre lungo trat-

to fra questi e le cartilagini falcate delle gran pinne, e si diffonde in quel gruppo di ghiandole che si vede tra le cartilagini medesime e gli organi elettrici. Da questo ramo poi non lungi dall' origine sua ne nasce un altro minore, il quale scorre anteriormente, e va a terminare nell' altro gruppo di ghiandole che poste sono lateralmente ed anteriormente alle cavità delle narici. Il tronco poi di questo nervo entra nella parre anteriore degli organi accennati, ed indi inflettendosi ascende, e diviso in minutissimi rami tutto si diffonde nelle colonne anteriori dei corpi indicati. Dietro al primo pajo nasce il secondo che cede in crassezza ed in estensione al primo ed al terzo; questo uscito dal cranio, e passando tra la prima e seconda branchia, alle quali alcuni filamenti compartisce, quasi transversalmente, e nel mezzo penetra fra le colonne, indi alquanto esso pure inflettendosi, e per le colonne medesime minutamente diffondendosi ascende verso le parti anteriori. Il terzo pajo, cioè il posteriore ed il massimo, diviso quasi in origine in due grossi rami uniti assieme, ed indi in tre scorrendo tra la 2.ª e la 3.ª, e tra la 3.ª e 4.ª branchia entra transversalmente ed obbliquamente nei corpi indicati. L'anteriore di questi rami tutto si spiega e diffonde nelle parti di mezzo; alle inferiori e posteriori riguarda il secondo ramo; il terzo discendendo ai lati interni fra gli elettrici organi e la spina, ne' sottoposti muscoli, e nelle posteriori ed ultime branchie si distribuisce.

Queste tre paja di nervi che entrano negli organi elettrici sono nelle torpedini di crassezza tale, che confrontati con quelli che escono dal cervello delle raze, e che in certa maniera con questi convengono, veggonsi assai maggiori, quantunque le raze superino ben tre volte il peso delle torpedini stesse. Una tale differenza e così eccedente potrebbe facilmente indurre taluno a credere, che quella diversità che in questi si scorge essere vi potesse ancora nel cervello, crescendo questo nelle torpedini a misura che quelli grandeggiano. Una simile deduzione però, quantunque ragionevole assai, è appunto quella che non si scorge, giacchè si vede manifestamente che la mole del cervello delle torpedini non cresce in proporzione dei nervi accennati, quando all' incontro nelle

raze il cervello s' aumenta ſenza che i nervi acquiſtino una mole maggiore dell' indicata.

A chi ha sì bene come voi e sì felicemente oſſervate e deſcritte le più intralciate minute e quaſi inviſibili diramazioni dei nervi del torace, e del ventre non può rieſcir difficile il comprendere, come ed in quanti tenuiſſimi rami ſi dividano queſti nervi, i quali penetrando per ciaſcheduna colonna, ed ivi in minutiſſime altre diramazioni ſpiegandoſi non laſciano interſtizio o diviſione alcuna, che di filamenti nervoſi dotata non ſia.

Quello che diciamo dei nervi, convien pur ripeterlo dei vaſi ancora. Aſcende l' arteria dal cuore, e verſo il vertice della cavità triangolar del torace, la cui baſe guarda poſteriormente, in un picciolo ſacco, e quaſi circolare ſi ſpiega. Dalla parte anteriore di queſto naſce un groſſo tronco, il quale procedendo innanzi in due ſi divide, ed indi in più rami, i quali ſcorrono alle parti anteriori. Da ciaſcun lato poi del ſacco accennato ſi partono tre canali, i quali in maſſima parte procedendo verſo le branchie, entrano nelle branchie medeſime, e da queſte ſeguendo i nervi ſcorrono negli elettrici organi, e penetrando per le colonne diviſi in minutiſſime ramificazioni, e queſte per moltiplici e varie anaſtomoſi aſſieme congiunte, comunicano con tutti gl' interſtizj e membrane componenti le colonne medeſime. Le vene poi a queſt' arterie corriſpondenti da minutiſſime radici in rami maggiori convenendo, e queſti ſeguendo le traccie dei nervi e delle arterie per le branchie paſſano alla parte inferiore e lateral del torace in due ſoli tronchi diviſe, li quali convenendo inſieme hanno fine nell' orecchietta del cuore.

Il cuore e queſti vaſi, s' io non ſono di molto ingannato, mi ſono ſembrati eſſere in qualche maniera in proporzione con le tre ultime paja di nervi deſcritti, vale a dire maggiori proporzionatamente nelle torpedini che nelle raze; dal che ſe foſſe potrebbeſi allora dedurre non ſolo la copia maggiore di ſangue, e la forza e velocità con cui queſto viene ne' corpi elettrici traſmeſſo e ſoſpinto, ma l' uniformità della natura, la quale eſſendo ſtata negli elettrici organi prodiga di nervi ha voluto eſſerlo nulla meno di vaſi. Queſta differenza però merita ulteriore conferma, giacchè eſ-

sa non mi è sembrata tale, che nelle ultime sezioni, le quali a fronte delle maggiori premure non mi fu possibile sino ad ora, per mancanza di torpedini, di poter confermare. Di queste ed altre simili difficoltà che di frequente s' incontrano da quelli che lontani dal mare vogliono esaminare non solo la struttura, ma l' indole e la natura eziandio di molti pesci, ne parlai col celebre Sig. *Gio. Battista Pratolongo* illustre Medico, e Professore di Notomia in Genova, e lo eccitai, siccome dotato di tutte quelle qualità che necessarie sono ad un esperto osservatore, a promovere più oltre con nuove osservazioni questa ubertosissima parte di storia naturale, giacchè appunto in quel tempo stava egli in parte occupato dietro ad una scelta collezione di pesci per il Gabinetto di Storia naturale ivi allora grandiosamente cominciato dal genio particolare, e dalla splendidezza del Sig. Marchese *Filippo Durazzo*. Dal Sig. *Pratolongo* dunque, a cui scrissi non ha molto perchè voglia chiarirmi su ciò che riguarda il cuore ed i vasi che nelle torpedini passano agli organi elettrici, attendo risposta, la quale se verrà per tempo sarà certo a questa Memoria unita.

E giacchè si parla di vasi io non voglio omettere quelli che corrispondono ai forellini da me nel principio indicati, e che particolarmente s' incontrano nell' esterna circonferenza degli organi elettrici. Questi vasi ch' io chiamo mucosi perchè contengono un umore bianco, tenace, e mucoso, nel levare la cute del ventre si veggono scorrere anteriormente e lateralmente degli organi indicati, e delle cartilagini falcate delle gran pinne, sino a tanto che ciascuno di questi ha fine nel proprio corrispondente forellino. Quelli che si veggono anteriormente hanno origine sì nel dorso che nel ventre da due gruppi di ghiandole miliari poste superiormente ed inferiormente ai lati anteriori delle cavità delle narici: quelli che sono laterali nascono parimenti da due gruppi di simili ghiandole, che sono collocate tra i lati interni delle cartilagini indicate e gli esterni degli organi elettrici. Ognuno di questi canali nasce dalla sua particolar ghiandoletta, ed è quasi in origine egualmente grande, come in progresso ed in fine. Il diametro di questi canali è grande in proporzione alla di loro lunghezza, avendone veduti al-

cuni che non erano certo minori della ghiandola da cui si dipartivano. Di questi canali se ne veggono altri, che si aprono in molte altre parti della cute del dorso ed in quella del ventre, i quali però non sono nè così regolari nè costanti come gl'indicati. Sono destinati a trasportare l' umor glutinoso separato dalle ghiandole utile per difendere esternamente e lubricare la cute.

Raccogliendo quanto abbiamo sin qui detto dell' organica struttura dei corpi elettrici, sì per riguardo alle numerosissime orizzontali membrane che le colonne compongono, e per le moltiplici diramazioni dei nervi, come ancora per il cuore e per i vasi che larga copia di sangue trasportano ai corpi stessi, sembra potersi non senza ragione dedurre che la natura in questi organi abbia non meno in spaziosi piani, che in nervi ed in vasi ancora doviziosamente abbondato. Posto or dunque questo, sarebbe egli di molto lontano dal vero chi volendo rendere una qualche ragione degli effetti elettrici, che questi animali producono, opinasse, che messa in moto la materia elettrica dall' urto e dalla copia del sangue, e questa svegliata nei nervi, ed accresciuta dai numerosi piani delle colonne venisse indi ad eccitarne la scossa, applicando il moto del sangue alle convoluzioni del vetro, la nervea sostanza all' elettrica materia, le membrane ai piani che l' elettrica forza mirabilmente accrescono?

Ma voi ben vedete che in ciò passeggiam fra le tenebre, e che per ben fondare una qualche ragionata sentenza molte e replicate osservazioni converrebbero, non disgiunte dal confronto d' altri animali, e segnatamente con l' anguilla tremante del Surinam. Ma queste cose non ponno essere che a pochi concesse, e segnatamente al genio particolare di quelli che abitano alle spiaggie del mare, i quali oltre alla facilità d' aver molti pesci, ponno anche nel loro naturale elemento, ove convenga, osservarli.

P. S. Eccovi la risposta che attendevo dal Sig. Dott. *Pratolongo*, e di cui già vi ho scritto. Essa mi è giunta al momento che stavo per chiudere questa mia, ed ho piacere di potervela unire, poichè vedrete dalle osservazioni di questo illustre Professore confermata la grandezza maggiore del cuo-

re nelle torpedini, di quello che sia nelle raze, avutosi sempre riguardo alla grandezza e peso maggiore dei loro corpi.

A. C.

Genova 24. Giugno 1786.

Finalmente dopo tante ricerche sul principio di questa settimana mi è stata portata da' pescatori una torpedine del peso di 1 libra e $\frac{1}{2}$. Non posso esprimervi quanto ciò mi fosse di piacere vedendomi allora in istato d' adempiere all' incarico che da più d' un mese mi avevate affidato. Mi posi ben tosto ad anatomizzarla per fare il paragone tra la grandezza del di lei cuore e la grandezza di quello della raza di libre 10 e $\frac{1}{2}$ di peso della specie nominata da Linneo *Raja myraletus*, che avea anatomizzata pochi giorni avanti. Ed eccovi adesso il giudizio che ho potuto formare intorno a questa questione in seguito delle mie osservazioni.

Il cuore della torpedine paragonato con quello delle altre raze è molto più piccolo, e tale apparisce evidentemente a colpo d'occhio. Ma conviene sapere che le torpedini hanno un volume di corpo di gran lunga minore di quello del corpo d' altre raze, e che per conseguenza è minore altresì di gran lunga il loro peso. Ciò premesso qualora propongasi la questione se la cavità del cuore della torpedine sia maggiore o minore della cavità del cuore dell' altre raze, conviene paragonare la cavità del cuore delle prime e delle seconde col peso dei respettivi loro corpi. Trovata con questo paragone la ragione che ha la cavità del cuore delle torpedini, e delle altre raze al peso dei respettivi loro corpi, conviene vedere se la ragione che ha la cavità del cuore delle torpedini al peso dei loro corpi sia maggiore o minore della ragione, che ha parimente al peso dei loro corpi la cavità del cuore d' altre raze. Per arrivare ad acquistare questa cognizione ho riempiuto il cuore della torpedine, e quello della sopraddetta raza di mercurio, formando questo la più giusta misura dell' uno e dell'altro. Il mercurio con cui ho misurata la cavità del primo pesava sei dramme, e quello con cui ho misurata la cavità del secondo pesava ventitre

dramme. Il peso della torpedine come ho detto antecedentemente era 1 libbra e $\frac{1}{2}$ cioè dramme 144, il peso della raza era di libbre 10 e $\frac{1}{2}$ cioè di dramme 1008. Sicchè parlando in termini geometrici il peso del mercurio contenuto dal cuore della torpedine è al peso del corpo di essa come 6 a 144; il peso del mercurio contenuto dal cuore della raza è al peso del corpo della medesima, come 23 a 1008. Or la ragione di 6 a 144 è maggiore della ragione di 23 a 1008; e per mettere questa verità nella maggiore evidenza riduco ambedue le ragioni a termini più semplici con dividere l' antecedente ed il conseguente della prima ragione per 6, e l' antecedente ed il conseguente della seconda per 23. In questa maniera risultano le seguenti equazioni

1.ª ragione 6, 144 = 1, 24
2.ª ragione 23, 1008 = 1, 43 $\frac{19}{23}$

onde vedesi chiaramente che la prima ragione è maggiore e quasi doppia della seconda. Egli è perciò vero verissimo che il cuore della torpedine è maggiore e quasi doppio di quello dell' altra raza qualora si paragoni l' uno e l' altro col peso de' respettivi loro corpi. Ed eccovi per tal modo sciolta, per quanto mi pare, la proposta questione.

Confesso però che questa prova è determinata alla torpedine ed alla raza che ho osservata; per renderla generale converrebbe ripeterla in altre e molte torpedini ed in altre e molte raze. Io farò instanza a' pescatori perchè mi diano occasione di replicarla, ed allora mi farò un dovere di significarvene il risultato. Amatemi ed onoratemi spesso de' vostri comandi, io farò sempre

Il vostro affezionatiss. amico
BATTISTA PRATOLONGO.

Rappresenta questa Tavola la faccia inferiore, o sia il ventre della torpedine femmina, la cui parte sinistra, detratta soltanto la cute, dimostra gli organi elettrici e le altri parti tutte nella loro naturale sede costituite; la destra, levata la metà della mandibola inferiore con le parti del torace e del ventre, e con queste la base del cranio ancora, rappresenta particolarmente

particolarmente il cervello, l' origine dei nervi, e la naturale inserzione di questi negli organi elettrici.

AA. Il margine esteriore delle grandi laterali pinne.

BB. Le pinne posteriori e laterali.

CC. Le due pinne del dorso.

D. La coda.

EE. Cute recisa ed esternamente rovesciata.

F. La cartilagine falcata sinistra delle gran pinne.

aa. Vasi mucosi superiori.

bb. Vasi mucosi inferiori e laterali.

c. Gruppo di ghiandole da cui partono i vasi mucosi superiori.

d. Gruppo di ghiandole dalle quali nascono i mucosi inferiori.

G. Cartilagine falcata destra della gran pinna coperta dalla cute, ed in cui si veggono i

eee. Forellini regolari nei quali terminano i vasi mucosi.

HH. Elettrici organi per la maggior parte di

fff. Colonne esagone composti, le cui

ggg. Estremità insieme congiunte e naturalmente costituite rappresentano la figura di una maglia.

I. Il torace entro cui evvi inchiuso il cuore.

hh. Le cinque esterne fessure che corrispondono ai cinque interni fori delle branchie.

i. Cartilagine trasversa del diafragma.

j. Una parte della cartilagine medesima tagliata e rovesciata all' esterno.

K. Pareti del ventre naturalmente costituite.

L. Pareti medesime levate e rovesciate all'esterno onde apparisca

M. La cavità del ventre.

N. L' ano.

k. Una delle due circolari aperture che dalla parte esteriore ed anteriore del dorso si aprono nella parte superior del palato.

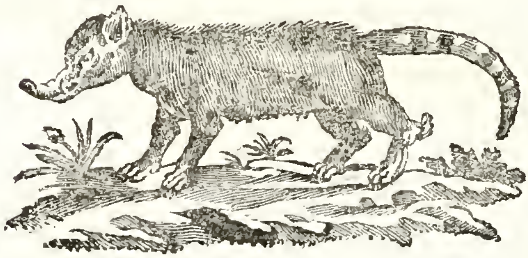
l. Il globo dell' occhio veduto posteriormente.

mm. Fori delle narici.

n. Mandibola superiore.

o. Metà della mandibola inferiore.

p. Muſcolo retrattore della mandibola inferiore.
q. Muſcolo comune alla mandibola inferiore e ſuperiore.
rr. Pareti del cranio aperto, onde ſi vegga nella ſua ſede il cervello.
s. Il lobo ſolitario del cervello.
t. I quattro lobi, due anteriori e due poſteriori.
uu. I corpi piramidali.
vv. I corpi olivari.
x. Spinal midolla, a' cui lati ſi veggono le
yy. Vertebre reciſe.
z. Il ſeguito della ſpina.
11. Nervi olfattorj.
2. Nervo optico.
3. Nervo che naſce dall' apice dei corpi olivari.
4. Il primo pajo dei nervi elettrici da cui ſi produce il
*** Ramo falcato.
5. Il ſecondo pajo degli elettrici.
6. Il terzo pajo degli elettrici medeſimi.
7. Nervi ſpinali che convengono aſſieme verſo la regione del diafragma.
8. Nervi parimenti ſpinali.



DELLE

SERIE RICORRENTI.

Del Sig. Gian-Francesco Malfatti Pubblico Professore di Matematica nella Pontificia Università di Ferrara.

1. L' Illustre Geometra Sig. *Luigi de là Grange*, che tiene un de' primi seggi tra i Matematici dell'Europa e fa tanto onore al nome italiano, nel 1.° Volume delle Memorie di Torino riduce la teoria delle serie ricorrenti alla integrazione delle equazioni lineari a differenze finite; e la stabilisce per tal modo su dei principj legittimi e naturali, laddove prima di lui essa era stata trattata per vie affatto indirette. Ritorna poi sullo stesso argomento nelle Memorie dell' Accademia Reale delle Scienze e belle Lettere di Berlino per l' anno 1775, e alla pag. 184 così la discorre.

2. „ Sia la serie y_0, y_1, y_2 ecc. y_x, y_{x+1}, y_{x+2} ecc. nel-
„ la quale si abbia costantemente questa equazione lineare
„ tra n termini successivi; $Ay_x + By_{x+1} + Cy_{x+2} +$ ecc.
„ $+ Ny_{x+n} = 0 \ldots\ldots (A)$, essendo A, B, C ecc. N coeffi-
„ cienti costanti qualunque. Questa sarà una serie ricorren-
„ te semplice dell'ordine n; e l'equazione (A) sarà l'equa-
„ zione differenziale finita, che si tratta d' integrare per
„ aver l' espressione del termine generale y_x della serie pro-
„ posta.

„ A questo fine suppongo $y_x = a\alpha^x$, essendo a, α costanti
„ indeterminate. Avrò dunque $y_{x+1} = a\alpha^{x+1}$, $y_{x+2} = a\alpha^{x+2}$ ecc.,
„ e facendo le sostituzioni nell' equazione (A), essa diver-
„ rà divisibile per $a\alpha^x$, e si avrà dopo la divisione $A + B\alpha$

„ $+C\alpha^2 +$ ecc. $+ N\alpha^n = 0 \ldots (B)$. Da questa equazione è
„ chiaro, 1.° che non trovandosi in essa il coefficiente a,
„ questo coefficiente resta arbitrario; 2.° che questa equazio-
„ ne essendo relativamente ad α del grado n, essa sommini-
„ strerà in generale n valori differenti di α che io denote-
„ rò con α, β, γ ecc. Si avrà dunque per tal modo pren-
„ dendo pure diversi coefficienti a, b, c ecc. n valori diversi
„ di y_x, cioè $a\alpha^x$, $b\beta^x$, $c\gamma^x$ ecc.; e siccome l'equazione (A)
„ è lineare, è facile il vedere che la somma di questi diffe-
„ renti valori di y_x vi soddisferà parimente. Di maniera che
„ si avrà in generale

$$y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + \text{ecc.}$$

„ E siccome questo valore di y_x contiene n costanti arbitra-
„ rie a, b, c ecc., esso sarà l'integrale completo dell'equa-
„ zione (A) dell' ordine n^{esimo}.

3. „ Se si suppone che i primi termini n della serie pro-
„ posta sian dati, si potrà col loro mezzo determinare le n
„ costanti arbitrarie a, b, c ecc., e a tal uopo basterà ri-
„ solvere le n equazioni

„ $y_0 = a + b + c +$ ecc.; $y_1 = a\alpha + b\beta + c\gamma +$ ecc.;

„ $y_2 = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2$ ecc.; $y_{n-1} = a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1} + c\gamma^{n-1}$ ecc.

„ Nel caso di $n = 1$, si ha $a = y_0$; nel caso di $n = 2$, si
„ avrà $a = \dfrac{y_1 - \beta y_0}{\alpha - \beta}$; $b = \dfrac{y_1 - dy_0}{\beta - \alpha}$; nel caso di $n = 3$ si avrà

„ $$a = \frac{y_2 - (\beta + \gamma) y_1 + \beta\gamma y_0}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)};\quad b = \frac{y_2 - (\alpha + \gamma) y_1 + \alpha\gamma y_0}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)};$$

„ $$c = \frac{y_2 - (\alpha + \beta) y_1 + \alpha\beta y_0}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$, e così di seguito. Da ciò e dal-
„ la nota teoria delle equazioni è facile il concludere, che
„ se si fa per abbreviare

„ $A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 +$ ecc. $+ N\alpha^n = P$

„ $B + C\alpha + D\alpha^2 + \text{ecc.} = \mathfrak{Q}$

„ $C + D\alpha + \text{ecc.} = R$

„ $D + \text{ecc.} = S$

ecc.

„ si avrà in generale $a = \dfrac{\mathfrak{Q}y_0 + Ry_1 + Sy_2 \text{ ecc.}}{dP:d\alpha}$; e cangiando „ in quest' espressione di a la quantità α in β, γ ecc., si „ avranno i valori degli altri coefficienti b, c ecc.

„ Se accade che due o più radici siano eguali, basterà sup- „ porre le lor differenze infinitamente piccole, e si troverà „ nel caso di $\beta = \alpha$, che i due termini $a\alpha^x + b\beta^x$ dell' es- „ pressione di y_x diverranno di questa forma $a'\alpha^x + b'x\alpha^{x-1}$, „ in cui sarà

„ $a' = \dfrac{\dfrac{d\mathfrak{Q}}{d\alpha}y_0 + \dfrac{dR}{d\alpha}y_1 + \dfrac{dS}{d\alpha}y_2 + \text{ecc.}}{d^2P:2d\alpha^2}$;

„ $b' = \dfrac{\mathfrak{Q}y_0 + Ry_1 + Sy_2 + \text{ecc.}}{d^2P:2d\alpha^2}$;

„ e se si ha $\gamma = \beta = \alpha$, allora i tre termini $a\alpha^x + b\beta^x$ „ $+ c\gamma^x$ diventeranno $a''\alpha^x + b''x\alpha^{x-1} + \dfrac{c''x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}$, ove „ sarà

„ $a'' = \dfrac{\dfrac{d^2\mathfrak{Q}}{2d\alpha^2}y_0 + \dfrac{d^2R}{2d\alpha^2}y_1 + \dfrac{d^2S}{2d\alpha^2}y_2 + \text{ecc.}}{d^3P:(2.3dx^3)}$

„ $b'' = \dfrac{\dfrac{d\mathfrak{Q}}{d\alpha}y_0 + \dfrac{dR}{dx}y_1 + \dfrac{dS}{dx}y_2 + \text{ecc.}}{d^3P:(2.3d\alpha^3)}$

„ $c'' = \dfrac{\mathfrak{Q}y_0 + Ry_1 + Sy_2 + \text{ecc.}}{d^3P:(2.3d\alpha^3)}$. E così del resto.„

4. Per vedere se queste formole canoniche, poste dal Ch. Autore pel caso delle radici eguali, sian giuste, io ne farò

l' applicazione ad un esempio facile di una serie ricorrente di 3.° grado. Sia questa 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 ecc., la quale ha per scala di relazione l' equazione $z^3 - z^2 - z + 1 = 0$, ossia $(z-1)^2(z+1) = 0$ contenente due radici eguali all' unità positiva ed una terza eguale all' unità negativa. Fatta pertanto $1 = \alpha$, e cangiato z in α, sarà $1 - \alpha - \alpha^2 + \alpha^3 = 0$, onde $1 - \alpha - \alpha^2 + \alpha^3 = P$; $-1 - \alpha + \alpha^2 = \mathfrak{Q}$; $-1 + \alpha = R$; $1 = S$. Quindi risulta
$\frac{dP}{d\alpha} = -1 - 2\alpha + 3\alpha^2$; $\frac{d^2P}{2d\alpha^2} = -1 + 3\alpha$; $\frac{d\mathfrak{Q}}{d\alpha} = -1 + 2\alpha$;
$\frac{dR}{d\alpha} = 1$; $\frac{dS}{d\alpha} = 0$, e rimesso il valore di α; $\mathfrak{Q} = -1$,
$R = 0$; $S = 1$; $\frac{dP}{d\alpha} = 0$; $\frac{d^2P}{2d\alpha^2} = 2$; $\frac{d\mathfrak{Q}}{d\alpha} = 1$; $\frac{dR}{d\alpha} = 1$;
$\frac{dS}{d\alpha} = 0$. Ora il termine generale di questa serie dev' essere della forma $a'\alpha^x + b'x\alpha^{x-1} + c(-1)^x$, ovvero $a' + b'x + c(-1)^x$. Ma in genere pel caso di 2 radici eguali abbiamo

$$a' = \frac{\frac{d\mathfrak{Q}}{d\alpha}y_0 + \frac{dR}{d\alpha}y_1 + \frac{dS}{d\alpha}y_2 \text{ ecc.}}{d^2P:2d\alpha^2};$$

$$b' = \frac{\mathfrak{Q}y_0 + Ry_1 + Sy_2 \text{ ecc.}}{d^2P:2d\alpha^2},$$

cioè sostituendo i valori di y_0, y_1, y_2, e così gli altri di $\mathfrak{Q}$, R, S, e loro differenziali, per ridurci alla nostra serie; $a' = 1$, $b' = \frac{1}{2}$; e diventando

$$c = \frac{\mathfrak{Q}y_0 + Ry_1 + Sy_2}{dP:d\beta},$$

ove si faccia $-1 = \beta$, e si riferiscano $\mathfrak{Q}$, R, S, P alla radice β, che fa nascere $\mathfrak{Q} = -1 - \beta + \beta^2 = 1$; $R = -1 + \beta = -2$; $S = 1$; $\frac{dP}{d\beta} = -1 - 2\beta + 3\beta^2 = 4$, e finalmente $c = \frac{1}{4}$; col canone del Sig. *de la Grange*, sarà il termine generale della proposta serie;

$1 + \frac{x}{2} + \frac{(-1)^x}{4}$; il che non concorda col vero, potendo chicchessia conoscere facilmente, che il vero termine generale è $\frac{3}{4} + \frac{x}{2} + \frac{(-1)^x}{4}$. Se faremo il confronto di questo col precedente, vedrem che la diversità consiste unicamente nel primo termine, cioè nel valore di a', che non ben si determina col fare $a' = \frac{\frac{dQ}{d\alpha}y_0 + \frac{dR}{d\alpha}y_1 + \frac{dS}{d\alpha}y_2 \text{ ecc.}}{d^2P:2d\alpha^2}$, perchè a questa frazione va aggiunta o levata qualche cosa. Da ciò ho preso argomento di rifarmi da capo e di esaminare più intimamente questa materia per vedere se mi riesca nel caso delle radici eguali di presentare con maggiore esattezza il termine generale delle serie ricorrenti.

5. Stabilita la ricorrente generica, $y_0, y_1, y_2, y_3 \ldots\ldots, y_x, y_{x+1}, y_{x+2} \ldots\ldots, y_{x+t}$ il cui termine generale è y_x, suppongo che l' equazione di relazione sia
$Ay_x + By_{x+1} + Cy_{x+2} \ldots\ldots + Ky_{x+t-1} + y_{x+t} = 0$, onde la serie sia del grado t. Fatto $y_x = cz^x$, la suddetta equazione si ridurrà a quest' altra $A + Bz + Cz^2 \ldots\ldots + Kz^{t-1} + z^t = 0$, le cui radici di num.° t rappresento coi simboli α, β, γ, ecc., che danno il termine generale $y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x$ ecc., ove a, b, c ecc. sono costanti arbitrarie di num.° eguale al num.° delle radici. Per aver poi i valori di queste costanti, dati a x i valori successivi di 0, 1, 2 ecc. confronterò il termine generale modificato a tali ipotesi coi primi termini della serie che devono esser noti, formando tante equazioni, quante sono le costanti a, b, c ecc., le quali per tal modo verran date dalle funzioni y_0, y_1, y_2 ecc. e dalle radici α, β, γ ecc.

6. Nel caso di $t = 1$, unica debb' essere la radice dell' equazione di relazione, e si fa il termine generale per que-

sta ipotesi $y_x = a\alpha^x$; onde posto $x = 0$, sarà $y_0 = a\alpha^0 = a$, e quindi $y_x = y_0\alpha^x$, ove noteremo, che il coefficiente di y_0 è l' unità positiva. All' ipotesi di $t = 2$ corrispondono due radici α, β e diventa $y_x = a\alpha^x + b\beta^x$. Sicchè fatto successivamente $x = 0$ e $x = 1$ ci nascono le due equazioni $y_0 = a + b$; $y_1 = a\alpha + b\beta$, dalle quali traendo i valori delle indeterminate a, b si ottiene $a = \dfrac{-\beta y_0 + y_1}{\alpha - \beta}$; $b = \dfrac{-\alpha y_0 + y_1}{\beta - \alpha}$. Sia $t = 3$, alla quale ipotesi compete il termine generale $y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x$. Poste successivamente $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ si hanno le tre equazioni $y_0 = a + b + c$; $y_1 = a\alpha + b\beta + c\gamma$; $y_2 = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2$, alle quali applicando le regole algebraiche, finalmente si ottiene

$$a = \frac{\beta\gamma y_0 - (\beta + \gamma) y_1 + y_2}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}; \quad b = \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha + \gamma) y_1 + y_2}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)};$$

$$c = \frac{\alpha\beta y_0 - (\alpha + \beta) y_1 + y_2}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}.$$

Così se faremo $t = 4$, essendo δ la 4.^{a} radice e d la costante corrispondente, nel termine generale $a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + d\delta^x$ risulta

$$a = \frac{-\beta\gamma\delta y_0 + (\beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta) y_1 - (\beta + \gamma + \delta) y_2 + y_3}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)};$$

$$b = \frac{-\alpha\gamma\delta y_0 + (\alpha\gamma + \alpha\delta + \gamma\delta) y_1 - (\alpha + \gamma + \delta) y_2 + y_3}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)};$$

$$c = \frac{-\alpha\beta\delta y_0 + (\alpha\delta + \beta\delta + \alpha\beta) y_1 - (\alpha + \beta + \delta) y_2 + y_3}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)(\gamma - \delta)};$$

$$d = \frac{-\alpha\beta\gamma y_0 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) y_1 - (\alpha + \beta + \gamma) y_2 + y_3}{(\delta - \alpha)(\delta - \beta)(\delta - \gamma)}.$$

Quindi trarrem la regola de' valori di a, b, c, d ecc. per le ſucceſſive ipoteſi di $t = 5$, $t = 6$ ecc., la quale è la ſeguente. Sia $z^t + pz^{t-1} + qz^{t-2} \ldots + fz^2 + gz + k = 0 \ldots (A)$ l' equazione delle radici diſuguali α, β, γ, δ ecc., ϕ. Eſſa equivalerà a queſt' altra $(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)\ldots(z-\phi) = 0$, e l'ultimo termine k ſarà eguale al prodotto delle medeſime radici preſe negativamente, cioè ſarà $k = (-\alpha)(-\beta)(\ldots)(-\phi)$; e queſto prodotto ſarà poſitivo ſe il num.° delle radici è pari, negativo ſe diſpari. Che ſe queſto prodotto venga diviſo per uno de' ſuoi fattori $-\alpha$, $-\beta$ ecc., il quoziente che riſulta ſarà al contrario poſitivo ſe il num.° delle radici è diſpari, e negativo ſe pari. Conſiderati ora i coefficienti di y_0 nel valore di a per le ſuperiori ipoteſi di t, vedremo, che

	$t = 1$		1
	$t = 2$		$-\beta$
a		corriſponde il coefficiente di y_0	
	$t = 3$		$\beta\gamma$
	$t = 4$		$-\beta\gamma\delta$
	ecc.		ecc.

Onde generalmente il ſuddetto coefficiente di y_0 nel valore di a ſarà $\frac{k}{-\alpha}$; e per la ſimilitudine del coefficiente di y_0 negli altri valori di b, c, d ecc. ſarà eſſo nel valore di b eguale a $\frac{k}{-\beta}$, nel valore di c eguale a $\frac{k}{-\gamma}$, cioè ſarà eguale al prodotto di tutte le radici dell' equazione (A) preſe negativamente, levata quella cui compete il coefficiente di cui ſi cerca il valore.

7. Una ſemplice occhiata che ſi dia agli eſempj addotti nel precedente §. fa poi conoſcer la regola che oſſervano i coefficienti de' termini y_1, y_2, y_3 ecc. A buon conto i ſegni procedono alternativamente coſicchè ſe il coefficiente di y_0 è

positivo, si fa negativo quello di y_1, indi torna negativo l'altro di y_2 ecc.; e succede il contrario se il coefficiente di y_0 sia negativo. In oltre, supposto v. g. che sia il coefficiente di y_0 il prodotto de' tre fattori $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ nel valore di a, sarà il coefficiente di y_1, la somma di tutti gli ambi, che formar si possono co' tre suddetti fattori, la quale riesce positiva, e il coefficiente di y_2 la somma de' tre fattori $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$, che diventa un quanto negativo; finalmente è 1 il coefficiente del termine y_3 che rimane. Così supposte 5 le radici dell' equazione (*A*) che siano α, β, γ, δ, ε, sarà il coefficiente di $y_0 = \beta\gamma\delta\varepsilon$; quello di $y_1 = -(\beta\gamma\delta + \beta\gamma\varepsilon + \beta\delta\varepsilon + \gamma\delta\varepsilon)$; quello di $y_2 = \beta\gamma + \beta\delta + \beta\varepsilon + \gamma\delta + \gamma\varepsilon + \delta\varepsilon$; quello di $y_3 = -(\beta + \gamma + \delta + \varepsilon)$, e finalmente l' ultimo di $y_4 = 1$. Con simile discorso determineremo i coefficienti di y_0, y_1, y_2 ecc. pei valori di b, c, d ecc. Quanto poi ai denominatori de' suddetti valori di a, b, c ecc. vedremo a un tratto, che per avere il denominatore di a, essendo $(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)\ldots\ldots(z-\phi)$ equivalente al primo membro dell' equazione (*A*), bisogna levare il fattore $z-\alpha$, onde rimanga soltanto $(z-\beta)(z-\gamma)\ldots\ldots(z-\phi)$. Fatto quindi $z=\alpha$, il risultante prodotto $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\ldots\ldots(\alpha-\phi)$ sarà il ricercato denominatore. Così per avere il denominatore di b sarà mestieri dividere l' intero prodotto per $z-\beta$, e posto nel quoziente $z=\beta$, sarà $(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)\ldots\ldots(\beta-\phi)$ il denominatore di b. Così si dica per gli altri denominatori.

8. In altro modo ancora si potranno avere gli anzidetti coefficienti di y_1, y_2 ecc. conosciuto che sia il primo di y_0. Sia, per esempio, $\beta\gamma\delta\ldots\phi$ questo coefficiente di y_0 che spetta al valore di a. Prescindo ora dal segno e fingo variabili

le costanti β, γ, δ..... ϕ. Differenzio il prodotto $\beta\gamma\delta....\phi$ facendo che ogni differenziale che risulta sia diviso per la differenza di quella quantità che si è fatta variare. Uniti quindi tutti i termini di questa differenziazione, ho il valore del coefficiente di y_1. Questo secondo coefficiente si differenzj di nuovo collo stesso metodo, e adunati i termini della differenziazione, e divisi per 2, ho il coefficiente di y_2. Seguito a differenziare questo terzo coefficiente, e i termini risultanti divisi per 3 mi danno il coefficiente di y_3. Vado avanti fino a numero t di differenziazioni, e l'ultima mi dà un aggregato, che diviso per t sarà il coefficiente di y_t. Si avverta però in tutti questi coefficienti di salvar la legge dell' alternativa de' segni che abbiam sopra notata.

9. Sia per esempio $-\beta\gamma\delta$ il coefficiente di y_0 nel valore di a. Si prenda esso positivamente, e si differenzj alla maniera indicata. Avremo $D.\beta\gamma\delta=\frac{\beta\gamma d\delta}{d\delta}+\frac{\beta\delta d\gamma}{d\gamma}+\frac{\gamma\delta d\beta}{d\beta}=\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta$. Questo aggregrato di 3 termini si torni a differenziare, e nascerà $D(\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)=\frac{\beta d\gamma}{d\gamma}+\frac{\gamma d\beta}{d\beta}+\frac{\beta d\delta}{d\delta}+\frac{\delta d\beta}{d\beta}+\frac{\delta d\gamma}{d\gamma}+\frac{\gamma d\delta}{d\delta}=2\beta+2\gamma+2\delta$, onde $\frac{D(\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)}{2}=\beta+\gamma+\delta$. Da ultimo differenziando questo risultato, abbiamo $D(\beta+\gamma+\delta)=\frac{d\beta}{d\beta}+\frac{d\gamma}{d\gamma}+\frac{d\delta}{d\delta}=3$, sicchè $\frac{D(\beta+\gamma+\delta)}{3}=1$. Sarà pertanto, avendo riguardo all' alternativa de' segni,

$$a = -\frac{\beta\gamma\delta y_0 + (\beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta)y_1 - (\beta + \gamma + \delta)y_2 + y_3}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)}$$; che è quello che abbiamo trovato al §. 6. Collo steſſo metodo arriveremo a trovare i numeratori de' valori di b, c, d, non ſolo per queſta ipoteſi della ricorrente di 4.° grado, ma per le ricorrenti di qualunque grado t, quando le radici $\alpha, \beta, \gamma .. \phi$ ſian tutte tra loro diſuguali.

10. Ho poſta la condizione che le radici α, β, γ ecc. ſiano tra loro diſuguali, perchè al caſo che vi ſian delle radici eguali, alcuni valori di a, b, c ecc. diventano infiniti. Fatto $t = 3$, abbiam veduto al §. 6 eſſere $a = \frac{\beta\gamma y_0 - (\beta + \gamma)y_1 + y_2}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}$;

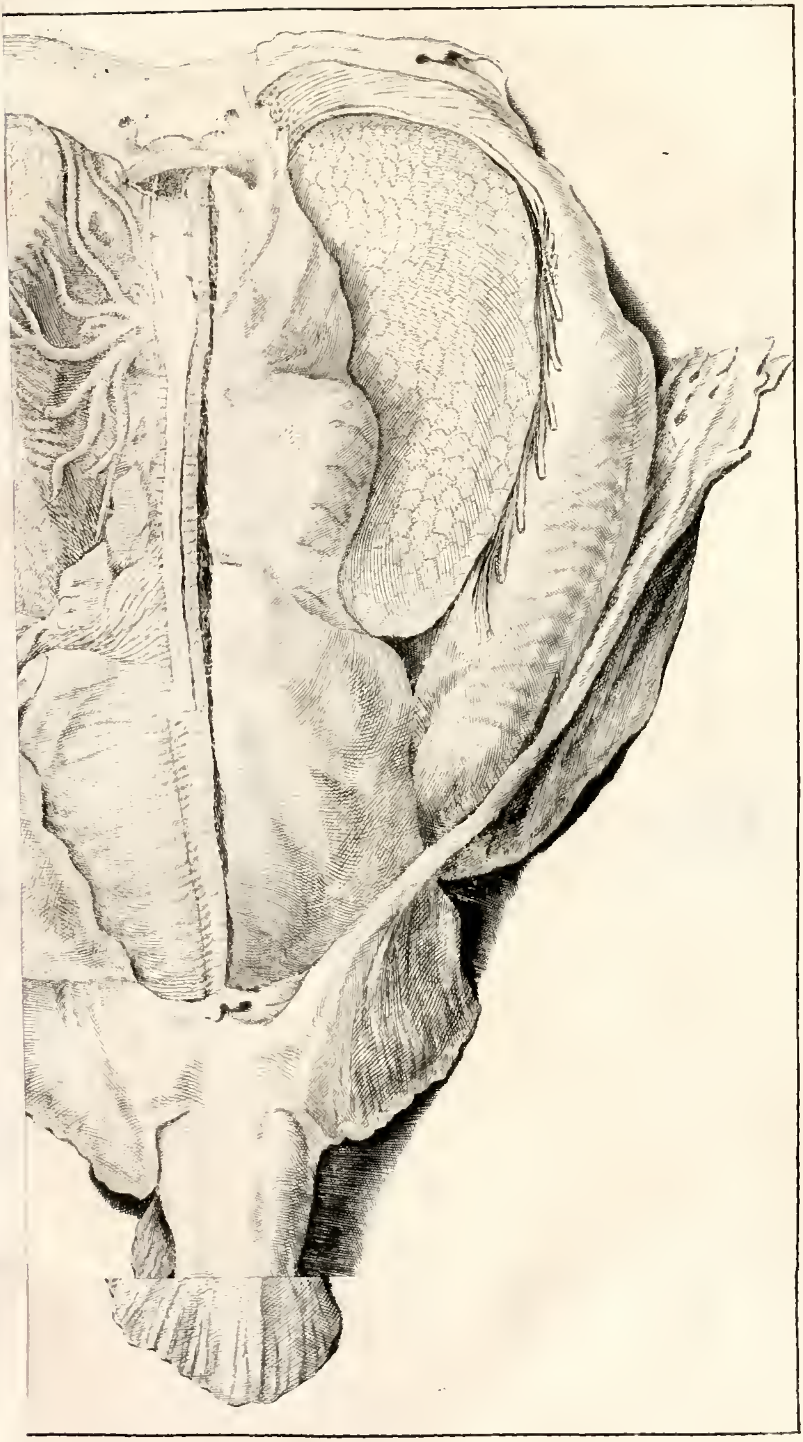
$b = \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha + \gamma)y_1 + y_2}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)}$; $c = \frac{\alpha\beta y_0 - (\alpha + \beta)y_1 + y_2}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$. Onde ſe ſi ſuppone, che ſia $\beta = \alpha$, i due valori di a e di b ſono quantità infinite, rimanendo finito il 3.° di c. Così ſi dee dire reſpettivamente per le altre ipoteſi di t ove in eſſe alcune radici ſiano eguali.

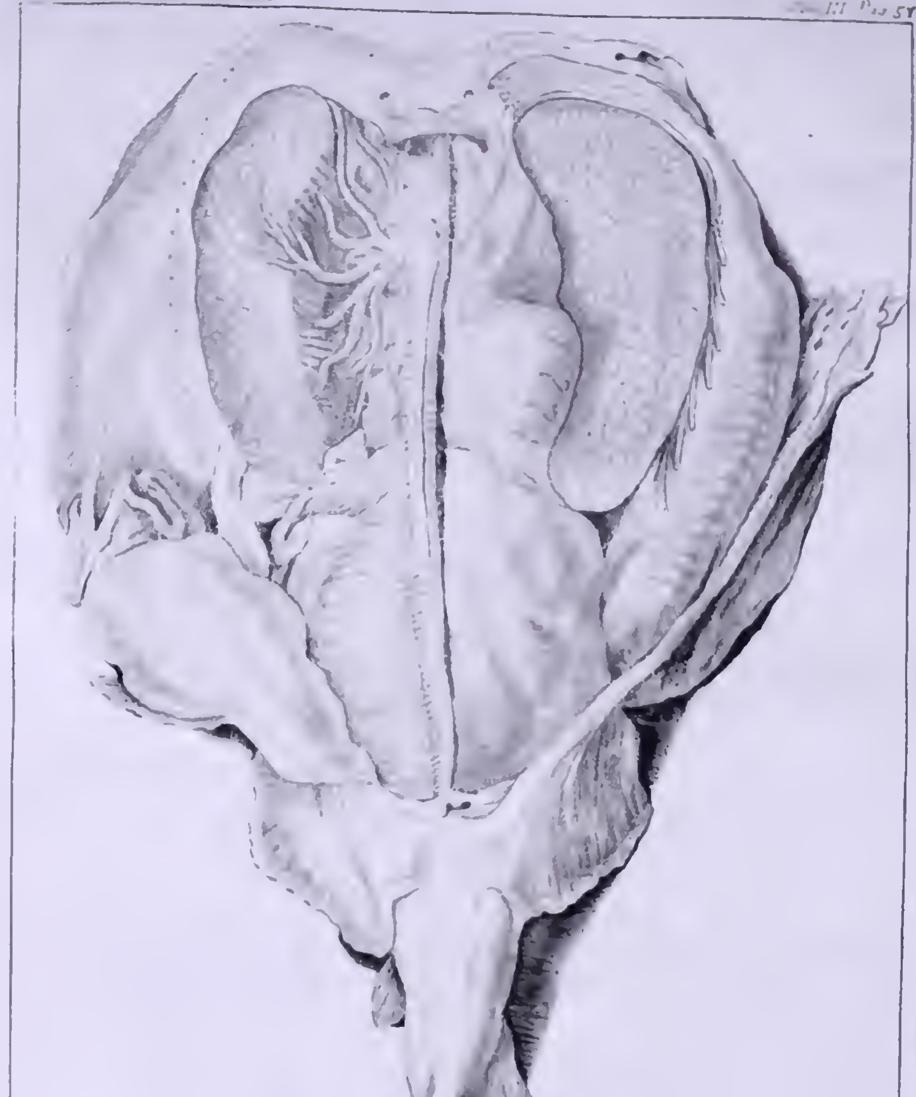
11. Per rimediare a queſto inconveniente farem così. Supporremo che nel termine generale della ricorrente $a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + d\delta^x$ ecc., quando $\beta = \alpha$, ſia $\beta = \alpha + d\alpha$: e conſiderando in queſto 1.° eſempio una ricorrente di 3.° grado, coſicchè il ſuo termine generale ſia $a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x$, colla ſoſtituzione di $\alpha + d\alpha$ in vece di β, avrem cangiato il termine generale in queſt' altro $a\alpha^x + b(\alpha + d\alpha)^x + c\gamma^x$ che differiſce infinitamente poco dal vero. Col canone neutoniano ſi butti ora in ſerie la podeſtà x del binomio $\alpha + d\alpha$, e naſcerà $(\alpha + d\alpha)^x = \alpha^x + x d\alpha . \alpha^{x-1} + \frac{x(x-1)}{2} d\alpha^2 . \alpha^{x-2} +$ ecc.

Quindi il termine generale ſarà $a\alpha^x + b\alpha^x + bx d\alpha . \alpha^{x-1} + \frac{bx(x-1)}{2} d\alpha^2 . \alpha^{x-2} +$ ecc. $+ c\gamma^x$ .... (B). Noi abbiam trovato ſuperiormente $b = \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha + \gamma)y_1 + y_2}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)}$, cioè col ſo-

E
H
H
A
E
F
I
K
M
N
B
C
C
D

E
H
A
H
A
G
I
F
E
K
L
M
N
B
B
C
C
D





ſtituire $d\alpha$ in vece di $\beta-\alpha$; $b=\dfrac{\alpha\gamma y_0-(\alpha+\gamma)y_1+y_2}{d\alpha(\beta-\gamma)}$, oſſia

$b=\dfrac{\alpha\gamma y_0-(\alpha+\gamma)y_1+y_2}{d\alpha(\alpha-\gamma)}$; onde ſarà

$bd\alpha=\dfrac{\alpha\gamma y_0-(\alpha+\gamma)y_1+y_2}{\alpha-\gamma}$; e queſta è una quantità finita. Ma ſe $bd\alpha$ è una quantità finita, ſarà una quantità infinitamente piccola $bd\alpha^2$, e molto più $bd\alpha^3$ ecc. Oltracciò, poichè $a=\dfrac{\beta\gamma y_0-(\beta+\gamma)y_1+y_2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$, avrem colla ſoſtituzione di $-d\alpha$ in vece di $\alpha-\beta$; $a=\dfrac{\beta\gamma y_0-(\beta+\gamma)y_1+y_2}{-d\alpha(\alpha-\gamma)}$, che è pure un quanto infinito. Se però uniremo inſieme i due valori infiniti di a e di b ſervendoci delle loro eſpreſſioni generali, verremo a coſtituire un aggregato finito. In fatti

$a+b=\dfrac{\beta\gamma y_0-(\beta+\gamma)y_1+y_2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}-\dfrac{\alpha\gamma y_0+(\alpha+\gamma)y_1-y_2}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}$; e riducendo le frazioni alla ſteſſa denominazione;

$a+b=\dfrac{(\beta^2\gamma-\beta\gamma^2-\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2)y_0+(\alpha^2-\beta^2)y_1+(\beta-\alpha)y_2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$, e dividendo la frazione per $\alpha-\beta$;

$a+b=\dfrac{(\gamma^2-\alpha\gamma-\beta\gamma)y_0+(\alpha+\beta)y_1-y_2}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$ eſpreſſione libera dagl' infiniti. Onde fatto $\beta=\alpha$, ſarà

$a+b=\dfrac{(\gamma^2-2\alpha\gamma)y_0+2\alpha y_1-y_2}{(\alpha-\gamma)^2}$. Nel termine generale (B) verrà dunque dato il coefficiente di α^x e l' altro di $x\alpha^{x-1}$, che ſono quantità finite, riuſcendo infiniteſimi i coefficienti

fuſſeguenti $bd\alpha^2$, $bd\alpha^3$ ecc. de' termini $\frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}$, $\frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot 3}\alpha^{x-3}$ ecc. Traſcurati pertanto queſti termini come nulli, quando ſia $t=3$, e $\alpha=\beta$, colla ſoſtituzione de' trovati valori di $a+b$ e di $bd\alpha$, ſarà il termine generale della ricorrente $\left(\frac{(\gamma^2-2\alpha\gamma)y_0+2\alpha y_1-y_2}{(\alpha-\gamma)^2}\right)\alpha^x$ $+\left(\frac{\alpha\gamma y_0-(\alpha+\gamma)y_1+y_2}{\alpha-\gamma}\right)x\alpha^{x-1}+c\gamma^x$, ovvero, perchè $c=\frac{\alpha\beta y_0-(\alpha+\beta)y_1+y_2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$, cioè nel caſo noſtro $c=\frac{\alpha^2 y_0-2\alpha y_1+y_2}{(\gamma-\alpha)^2}$, diventa il ſuddetto termine generale, cioè $y_x=\left(\frac{\alpha^2 y_0-2\alpha y_1+y_2}{(\gamma-\alpha)^2}\right)\gamma^x+\left(\frac{\alpha\gamma y_0-(\alpha+\gamma)y_1+y_2}{\alpha-\gamma}\right)x\alpha^{x-1}$ $+\left(\frac{(\gamma^2-2\alpha\gamma)y_0+2\alpha y_1-y_2}{(\alpha-\gamma)^2}\right)\alpha^x$. All' ultimo coefficiente di α^x daremo la ſeguente forma equivalente $-\frac{\alpha\gamma y_0+(\alpha+\gamma)y_1-y_2}{(\alpha-\gamma)^2}$ $-\frac{\gamma y_0+y_1}{\alpha-\gamma}$, e per brevità chiamato $\frac{\alpha\gamma y_0-(\alpha+\gamma)y_1+y_2}{\alpha-\gamma}=A$, riſulterà il termine generale

$$y_x=\frac{(\alpha^2 y_0-2\alpha y_1+y_2)}{(\gamma-\alpha)^2}\gamma^x+Ax\alpha^{x-1}+\frac{(-\gamma y_0+y_1-A)}{\alpha-\gamma}\alpha^x.$$

12. Veggiamo ora ſe col metodo del §. 8 poſſiam trovare i coefficienti tutti de' termini. Poichè l' equazione in z

della nostra ricorrente potrà vestir questa forma $(z-\alpha)^2 \times (z-\gamma)=0$, e l' ultimo termine del 1.° membro di questa equazione è $-\alpha^2\gamma$, ad avere il coefficiente di γ^x insegna il metodo che dobbiam dividere $-\alpha^2\gamma$ per $-\gamma$, e resta di quoziente α^2 che è appunto il moltiplicatore di y_0 nel coefficiente di γ^x. Si differenzj adesso α^2 al solito modo, e avremo $\frac{2\alpha d\alpha}{d\alpha}=2\alpha$, che per l'alternativa de' segni preso negativamente costituirà il moltiplicatore di y_1. Finalmente si differenzj 2α, onde nasca $\frac{2d\alpha}{d\alpha}=2$. Questo quoziente deesi dividere per 2 e risulta 1, che preso positivamente è appunto il moltiplicatore di y_2. Per aver poi il divisore del coefficiente di γ^x vuole l'indicato metodo che si divida il primo membro dell' equazione in z pel fattor $z-\gamma$, e che nel quoziente si ponga γ in vece di z. Ciò facendo si ottiene $(\gamma-\alpha)^2$ che è esattamente il denominatore del coefficiente di γ^x. Passiamo presentemente al coefficiente A del termine $x\alpha^{x-1}$ e cerchiamo il moltiplicatore di y_0. Secondo la regola si dee dividere $-\alpha^2\gamma$ per $-\alpha$ che dà di quoziente $\alpha\gamma$; e questa è la quantità che in A moltiplica y_0. Appresso colle differenziazioni si ha $\frac{\alpha d\gamma}{d\gamma}+\frac{\gamma d\alpha}{d\alpha}=D.\alpha\gamma=\alpha+\gamma$. Onde $-(\alpha+\gamma)$ debb' essere il moltiplicatore di y_1 come è effettivamente. Seguitando la differenziazione risulta $D(\alpha+\gamma)=\frac{d\alpha}{d\alpha}+\frac{d\gamma}{d\gamma}=2$, e diviso questo risultato per 2 nasce 1 di quoziente che è il moltiplicatore di y_2 nel coefficiente A. Per il denominatore prescrive generalmente il §. 7 che dal primo membro dell' equazione in z si tolga quel fattore che contiene quella radice, alla quale spetta il coefficiente di cui s' indaga il valore, e si ponga nel quoziente la stessa radice in vece dell' incognita z. Ciò che ottiensi dopo questa operazione è precisamen-

te il denominatore ricercato. Ma se nel presente caso dell' equazione $(z-\alpha)^2(z-\gamma)=0$ si togliesse solo il binomio $z-\alpha$, resterebbe $(z-\alpha)(z-\gamma)$, e in questo quoziente posto $z=\alpha$, avrebbesi un risultato nullo. Egli è dunque necessario, perchè non resti zero di quoziente, dividere $(z-\alpha)^2(z-\gamma)$ pel prodotto di tutte le radici eguali, cioè al caso per $(z-\alpha)^2$. Nel quoziente poi $z-\gamma$ sostituito α in vece di z si avrà $\alpha-\gamma$, e questo è il denominatore di A. Resta l' ultimo coefficiente del termine α^x per cui bisogna trovar la regola. La difficoltà consiste ne' termini $-\gamma y_0 + y_1$ ma per questi stessi la regola del §. 8 non vien meno. L' ultimo termine del 1.° membro dell' equazione in z che è $-\alpha^2\gamma$ si divida per $(-\alpha)(-\alpha)$ ossia per α^2, e il quoziente $-\gamma$ è il fattore di y_0. Differenziando poi γ abbiamo

$\frac{d\gamma}{d\gamma}=1$ che è il fattore di y_1. Il denominatore di quest' ultimo coefficiente è lo stesso che quello di A; onde colla sola cognizione dell' ultimo termine del 1.° membro dell' equazione in z e colle differenziazioni prescritte restan trovati tutti i coefficienti, e si ha in pronto il termine generale della nostra serie.

13. L' ultimo termine del valore di y_x (§. 11) è

$\frac{(-\gamma y_0 + y_1 - A)\alpha^x}{\alpha-\gamma}$, essendo A il coefficiente del termine precedente $x\alpha^{x-1}$. Ora non è ben chiaro, se al caso di due radici eguali, e di qualunque numero di radici disuguali dopo aver trovato in questo ultimo termine il coefficiente di y_0, y_1 ecc. debbasi sempre sottrarre A semplicemente, o un qualche moltiplo di A. Ci darà su di ciò qualche lume la ricorrente che ha per termine generale $a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + d\delta^x$, in cui sia $\alpha=\beta$. Fatto dunque $\beta=\alpha+d\alpha$ avremo $y_x = a\alpha^x + b(\alpha+d\alpha)^x + c\gamma^x + d\delta^x$, ossia coll' uso del canone $y_x=(a+b)\alpha^x$

$+ bd\alpha x\alpha^{x-1}$

$+bd\alpha x\alpha^{x-1}+c\gamma^x+d\delta^x$ che differisce infinitamente poco da $a\alpha^x+b\beta^x+c\gamma^x+d\delta^x$. Si ponga in questo successivamente $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$, e risultano le 4 seguenti equazioni $a+b+c+d=y_0$; $a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta=y_1$; $a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+d\delta^2=y_2$; $a\alpha^3+b\beta^3+c\gamma^3+d\delta^3=y_3$, dalla risoluzione delle quali si ricava

$$a=-\frac{\beta\gamma\delta y_0+(\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)y_1-(\beta+\gamma+\delta)y_2+y_3}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)};$$

$$b=-\frac{\alpha\gamma\delta y_0+(\alpha\gamma+\alpha\delta+\gamma\delta)y_1-(\alpha+\gamma+\delta)y_2+y_3}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)};$$

$$c=-\frac{\alpha\beta\delta y_0+(\alpha\delta+\beta\delta+\alpha\beta)y_1-(\alpha+\beta+\delta)y_2+y_3}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}$$

$$d=-\frac{\alpha\beta\gamma y_0+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)y_1-(\alpha+\beta+\gamma)y_2+y_3}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}.$$

Perchè $\alpha=\beta$, qui pure a e b son due quantità infinite rimanendo finite c e d le quali anche si cangiano ne' valori seguenti;

$$c=-\frac{\alpha^2\delta y_0+(\alpha^2+2\alpha\delta)y_1-(2\alpha+\delta)y_2+y_3}{(\gamma-\alpha)^2(\gamma-\delta)};$$

$$d=-\frac{\alpha^2\gamma y_0+(\alpha^2+2\alpha\gamma)y_1-(2\alpha+\gamma)y_2+y_3}{(\delta-\alpha)^2(\delta-\gamma)}$$

Ridotte poi al medesimo denominatore due quantità infinite a, b, e fattane la somma, avremo

$$a+b=\frac{\begin{array}{l}\big(\gamma\delta(\alpha^3-\beta^3)-\gamma^2\delta(\alpha^2-\beta^2)-\gamma\delta^2(\alpha^2-\beta^2)+\gamma^2\delta^2(\alpha-\beta)\big)y_0\\ -\big((\gamma+\delta)(\alpha^3-\beta^3)-(\gamma^2+\gamma\delta+\delta^2)(\alpha^2-\beta^2)\big)y_1+\big(\alpha^3-\beta^3-(\gamma^2+\gamma\delta\\ +\delta^2)(\alpha-\beta)\big)y_2-\big(\alpha^2-\beta^2-(\gamma+\delta)(\alpha-\beta)\big)y_3\end{array}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)};$$

e dividendo la frazione per $\alpha-\beta$, poi facendo nel quoziente $\alpha=\beta$;

$$a+b=\frac{(3\alpha^2\gamma\delta-2\alpha\gamma^2\delta-2\alpha\gamma\delta^2+\gamma^2\delta^2)y_0-(3\alpha^2\gamma+3\alpha^2\delta-2\alpha\gamma^2-2\alpha\gamma\delta-2\alpha\delta^2)y_1+(3\alpha^2-\gamma^2-\gamma\delta-\delta^2)y_2-(2\alpha-\gamma-\delta)y_3}{(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2}$$

che metteremo sotto quest' altra forma equivalente

$$a+b=\frac{\gamma\delta y_0-(\gamma+\delta)y_1+y_2-\overline{2\alpha-\gamma-\delta}\times\overline{-\alpha\gamma\delta y_0+(\alpha\gamma+\alpha\delta+\gamma\delta)y_1-(\alpha+\gamma+\delta)y_2+y_3:(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}}{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}$$

Finalmente nel valore di b posto $d\alpha$ in vece di $\beta-\alpha$, e quindi fatto $\beta=\alpha$, sarà

$$bd\alpha=-\frac{\alpha\gamma\delta y_0+(\alpha\gamma+\alpha\delta+\gamma\delta)y_1-(\alpha+\gamma+\delta)y_2+y_3}{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}.$$ E però surrogando A in vece del valore di $bd\alpha$, nascerà

$$a+b=\frac{\gamma\delta y_0-(\gamma+\delta)y_1+y_2-(2\alpha-\gamma-\delta)A}{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}$$ e avremo

$$y_x=\frac{(-\alpha^2\delta y_0+(\alpha^2+2\alpha\delta)y_1-(2\alpha+\delta)y_2+y_3)\gamma^x}{(\gamma-\alpha)^2(\gamma-\delta)}$$
$$+\frac{(-\alpha^2\gamma y_0+(\alpha^2+2\alpha\gamma)y_1-(2\alpha+\gamma)y_2+y_3)\delta^x}{(\delta-\alpha)^2(\delta-\gamma)}$$
$$+Ax\alpha^{x-1}+\frac{(\gamma\delta y_0-(\gamma+\delta)y_1+y_2-(2\alpha-\gamma-\delta)A)\alpha^x}{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}.$$

14. Applichiamo anche a questo esempio la nostra regola. L' equazione in z per la nostra serie è $(z-\alpha)^2(z-\gamma)(z-\delta)=0$ e l' ultimo termine del 1°. membro è $\alpha^2\gamma\delta$. Onde per avere il coefficiente di y_0 nel numeratore di c divideremo $\alpha^2\gamma\delta$ per $-\gamma$ e risulterà $-\alpha^2\delta$ come appunto si è sopra trovato. Eseguite poi le consuete dif-

ferenziazioni, farà $D.\alpha^2\delta = \alpha^2 + 2\alpha\delta$; $\frac{D(\alpha^2 + 2\alpha\delta)}{2} = 2\alpha + \delta$; $\frac{D(2\alpha + \delta)}{3} = 1$, i quai valori col riguardo dell' alternativa de' fegni fono i moltiplicatori di y_0, y_1, y_2, y_3, e coftituifcono il numeratore di c. Il fuo denominatore poi fi avrà levando da $(z - \alpha)^2(z - \gamma)(z - \delta)$ il binomio $z - \gamma$ e facendo nel quoto $(z - \alpha)^2(z - \delta)$ l' incognita $z = \gamma$; il che dà $(\gamma - \alpha)^2(\gamma - \delta)$, che è il denominatore ricercato. Con fimile difcorfo troveremo immantinente il valore di d che è fimile affatto al valore di c. Quanto al valore di $bd\alpha$ offia di A coll' ifteffo metodo fi divida $\alpha^2\gamma\delta$ per $-\alpha$ e nel quoto $-\alpha\gamma\delta$ abbiamo il coefficiente di y_0 appartenente ad A. In oltre $D.\alpha\gamma\delta = \alpha\gamma + \alpha\delta + \gamma\delta$; $\frac{D(\alpha\gamma + \alpha\delta + \gamma\delta)}{2} = \alpha + \gamma + \delta$; $\frac{D(\alpha + \gamma + \delta)}{3} = 1$ e quefti alternando i fegni rifultano i coefficienti di y_0, y_1, y_2, y_3 nel numeratore di A. Dal prodotto $(z - \alpha)^2(z - \gamma)(z - \delta)$ fi levi il fattore $(z - \alpha)^2$, e nel quoziente fi faccia $z = \alpha$, onde nafca $(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)$ che farà il denominatore di A. Refta il valore di $a + b$ che determineremo così. Il prodotto $\alpha^2\gamma\delta$ dividafi per $(-\alpha)(-\alpha)$ cioè per α^2, e avrem $\gamma\delta$ che farà il coefficiente di y_0 in $a + b$. Dunque, effendo $D.\gamma\delta = \gamma + \delta$, e $\frac{D.(\gamma + \delta)}{2} = 1$, farà $-(\gamma + \delta)$ il coefficiente di y_1, e 1 il coefficiente di y_2 nella prima parte del valore di $a + b$. L' altra parte è $-(2\alpha - \gamma - \delta)A$; e per trovare il coefficiente $2\alpha - \gamma - \delta$ quefta è la regola. Nel denominatore di A che è $(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)$ fi faccia variare la quantità α, e differenziando e dividendo i differenziali per $d\alpha$, avremo $(\alpha - \gamma)\frac{d\alpha}{d\alpha} + (\alpha - \delta)\frac{d\alpha}{d\alpha} = 2\alpha - \gamma - \delta$,

che è precisamente il moltiplicatore di $-A$. Così se nell' esempio del §. 11 considerata α come variabile si fosse differenziato $\alpha-\gamma$ che è il denominatore di A, si sarebbe ottenuto $D.(\alpha-\gamma)=\frac{d\alpha}{d\alpha}=1$, che moltiplica $-A$ nella 2.ª parte del valore di $a+b$ che competeva a quella serie. E questa regola varrà sempre per determinare i coefficienti del termine generale di una ricorrente, nella quale si verifichi l' eguaglianza di due radici dell' equazione in z qualunque sia il numero delle altre che son disuguali, come apparirà a ciascuno che voglia farne la pruova.

15. Passo ora a considerare quelle ricorrenti, delle quali l' equazione in z ha tre radici eguali, e stabilisco il termine generale della serie $y_x=a\alpha^x+b\beta^x+c\gamma^x+d\delta^x$, in cui sia $\alpha=\beta=\gamma$. Riduco ad essere disuguali queste tre radici col fare che ciascuna di esse differisca infinitamente poco dalla prima α, e pongo $\beta=\alpha+d\alpha$; $\gamma=\alpha+d\beta$, cosicchè il termine generale diventi $a\alpha^x+b(\alpha+d\alpha)^x+c(\alpha+d\beta)^x+d\delta^x$. Adoperando il canone, risulta, prendendo in esso per ciascun binomio tre soli termini; $y_x=a\alpha^x+b\alpha^x+bd\alpha x\alpha^{x-1}$

$$+bd\alpha^2\frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}+c\alpha^x+cd\beta x\alpha^{x-1}+cd\beta^2\frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}+d\delta^x,$$

ossia $y_x=(a+b+c)\alpha^x+(bd\alpha+cd\beta)x\alpha^{x-1}$

$+(bd\alpha^2+cd\beta^2)\frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}+d\delta^x$. Nel termine generale della prima forma $a\alpha^x+b\beta^x+c\gamma^x+d\delta^x$ si faccia successivamente $x=0, 1, 2, 3$, e si eguaglino i risultati ai primi 4 termini della data serie y_0, y_1, y_2, y_3. Dalle 4 equazioni cavati poi i quattro valori di a, b, c, d, nasce

$$a=-\frac{\beta\gamma\delta y_0+(\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)y_1-(\beta+\gamma+\delta)y_2+y_3}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}$$

$$b=-\frac{\alpha\gamma\delta y_0+(\alpha\delta+\alpha\gamma+\gamma\delta)y_1-(\alpha+\gamma+\delta)y_2+y_3}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}$$

$$c = -\frac{\alpha\beta\delta y_0 + (\alpha\beta + \alpha\delta + \beta\delta)y_1 - (\alpha + \beta + \delta)y_2 + y_3}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)(\gamma - \delta)}$$

$$d = -\frac{\alpha\beta\gamma y_0 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)y_1 - (\alpha + \beta + \gamma)y_2 + y_3}{(\delta - \alpha)(\delta - \beta)(\delta - \gamma)}.$$

I valori di a, b, c, perchè $\alpha = \beta = \gamma$, riescono infiniti di 2.° ordine, ma il valore dell' ultimo simbolo d è una quantità finita, perchè in esso nessun fattore del denominatore si annulla. Perilchè in quest' ultimo si potrà subito sostituire α in vece di β e di γ, e ci si presenterà

$$d = -\frac{\alpha^3 y_0 + 3\alpha^2 y_1 - 3\alpha y_2 + y_3}{(\delta - \alpha)^3}.$$ Ciò fatto uniremo insieme i tre valori di a, b, c ed otterremo, che sebbene ciascuno in particolare sia un infinito di 2.° ordine, tutti e tre non facciano che una quantità finita. In fatti riducendo i tre valori suddetti allo stesso denominatore e poi dividendo la frazione per $(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)$, si ha

$$a + b + c = \frac{(\alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta - \alpha\delta^2 - \beta\delta^2 - \gamma\delta^2 + \delta^3)y_0 - (\alpha\gamma + \alpha\beta + \beta\gamma)y_1 + (\alpha + \beta + \gamma)y_2 - y_3}{(\delta - \alpha)(\delta - \beta)(\delta - \gamma)},$$

che è una quantità finita. Quindi introdotto α in vece di β e di γ, sarà

$$a + b + c = \frac{(-3\alpha^2\delta + 3\alpha\delta^2 - \delta^3)y_0 + 3\alpha^2 y_1 - 3\alpha y_2 + y_3}{(\alpha - \delta)^3}.$$ Ne' valori di b, c si sostituisca $\alpha + d\alpha$ in vece di β; e $\alpha + d\beta$ in vece di γ, e avremo, moltiplicando b per $d\alpha$, e c per $d\beta$;

$$b\,d\alpha = \frac{(-\alpha^2\delta - \alpha\delta d\beta)y_0 + \big(\alpha^2 + 2\alpha\delta + (\alpha + \delta)d\beta\big)y_1 - (2\alpha + \delta + d\beta)y_2 + y_3}{(d\alpha - d\beta)(\alpha - \delta + d\alpha)};$$

$$c\,d\beta = \frac{(\alpha^2\delta + \alpha\delta d\alpha)y_0 - \big(\alpha^2 + 2\alpha\delta + (\alpha + \delta)d\alpha\big)y_1 + (2\alpha + \delta + d\alpha)y_2 - y_3}{(d\alpha - d\beta)(\alpha - \delta + d\beta)}.$$

Di questi due ultimi valori si faccia la somma, riducendoli prima alla stessa denominazione. Fatta poscia la divisione per $d\alpha - d\beta$, e trascurati que' termini che rispetto ad altri sono infinitesimi, si avrà

$$bd\alpha + cd\beta = \frac{(2\alpha^2\delta - \alpha\delta^2)y_0 - (2\alpha^2 + 2\alpha\delta - \delta^2)y_1 + 3\alpha y_2 - y_3}{(\alpha - \delta)^2}.$$

Finalmente moltiplicando $bd\alpha$ per $d\alpha$, e $cd\beta$ per $d\beta$, avremo

$$bd\alpha^2 = \frac{(-\alpha^2\delta d\alpha - \alpha\delta d\alpha d\beta)y_0 + \big((\alpha^2 + 2\alpha\delta)d\alpha + (\alpha + \delta)d\alpha d\beta\big)y_1 - \big((2\alpha + \delta)d\alpha + d\alpha d\beta\big)y_2 + d\alpha y_3}{(d\alpha - d\beta)(\alpha - \delta + d\alpha)}$$

$$cd\beta^2 = \frac{(\alpha^2\delta d\beta + \alpha\delta d\alpha d\beta)y_0 - \big((\alpha^2 + 2\alpha\delta)d\beta + (\alpha + \delta)d\alpha d\beta\big)y_1 + \big((2\alpha + \delta)d\beta + d\alpha d\beta\big)y_2 - d\beta y_3}{(d\alpha - d\beta)(\alpha - \delta + d\beta)}$$

Deonsi questi altri due valori ridurre allo stesso denominatore, farne indi la somma, e dividere il risultato per $(d\alpha - d\beta)(\alpha - \delta)$ dopo aver negligentati i termini infinitesimi; e risulta

$$bd\alpha^2 + cd\beta^2 = \frac{-\alpha^2\delta y_0 + (\alpha^2 + 2\alpha\delta)y_1 - (2\alpha + \delta)y_2 + y_3}{\alpha - \delta}.$$

Riprendiamo ora in mano il valore di $bd\alpha + cd\beta$ e presentiamolo sotto questa forma equivalente;

$$bd\alpha + cd\beta = \frac{\alpha\delta y_0 - (\alpha + \delta)y_1 + y_2 - \big(-\alpha^2\delta y_0 + (\alpha^2 + 2\alpha\delta)y_1 - (2\alpha + \delta)y_2 + y_3\big) : \alpha - \delta}{\alpha - \delta}.$$

Dunque posto $bd\alpha^2 + cd\beta^2 = A$, sarà

$$bd\alpha + cd\beta = \frac{\alpha\delta y_0 - (\alpha + \delta)y_1 + y_2 - A}{\alpha - \delta}.$$

Parimente il valore di $a + b + c$ si può porre sotto quest' altra forma;

$$a + b + c = \frac{-\delta y_0 + y_1 - \big((2\alpha^2\delta - \alpha\delta^2)y_0 - (2\alpha^2 + 2\alpha\delta - \delta^2)y_1 + 3\alpha y_2 - y_3\big) : (\alpha - \delta)^2}{\alpha - \delta}$$

$$= \frac{-\delta y_0 + y_1 - (bd\alpha + cd\beta)}{\alpha - \delta}$$; e però fatto $bd\alpha + cd\beta = A'$, sarà

$$a + b + c = \frac{-\delta y_0 + y_1 - A'}{\alpha - \delta}$$. Si chiami questo valore A'', e colle sostituzioni avremo il termine generale della serie così

espresso $y_x = -\dfrac{(-\alpha^3 y_0 + 3\alpha^2 y_1 - 3\alpha y_2 + y_3)\delta^x}{(\delta - \alpha)^3}$

$+ A''\alpha^x + A'x\alpha^{x-1} + \dfrac{Ax(x-1)\alpha^{x-2}}{2}$, essendo

$$A = \frac{-\alpha^2\delta y_0 + (\alpha^2 + 2\alpha\delta)y_1 - (2\alpha + \delta)y_2 + y_3}{\alpha - \delta};$$

$$A' = \frac{\alpha\delta y_0 - (\alpha + \delta)y_1 + y_2 - A}{\alpha - \delta}; \quad A'' = \frac{-\delta y_0 + y_1 - A'}{\alpha - \delta}.$$ Ho supposto in questo calcolo, che 3 soli siano i termini che si devon prender nel canone neutoniano a motivo che i susseguenti siano infinitesimi. E realmente il 4.° darebbe

$(bd\alpha^3 + cd\beta^3)\dfrac{x(x-1)(x-2)}{2.3}\alpha^{x-3}$; or siccome b, c non sono che infiniti di 2.° ordine, diventa $bd\alpha^3 + cd\beta^3$ un infinitesimo di ordine primo; e però il termine è trascurabile, il che a maggior ragione deesi dire de' susseguenti.

16. Questo lungo e nojoso calcolo resta di molto abbreviato col mio metodo. Eccone il tipo. L' equazione in z per la nostra ricorrente ha questa forma $(z-\alpha)^3(z-\delta) = 0$, in cui l' ultimo termine del primo membro è $\alpha^3\delta$. Si divida $\alpha^3\delta$ per $-\delta$ e resta $-\alpha^3$. Onde $D.\alpha^3 = 3\alpha^2$; $\dfrac{D.3\alpha^2}{2} = 3\alpha$;

$\dfrac{D.3\alpha}{3} = 1$. In oltre $\dfrac{(z-\alpha)^3(z-\delta)}{z-\delta} = (z-\alpha)^3 = (\delta-\alpha)^3$ quando si pone $z = \delta$. Dunque coll' alternativa de' segni

$$d = \frac{-\alpha^3 y_0 + 3\alpha^2 y_1 - 3\alpha y_2 + y_3}{(\delta - \alpha)^3}.$$ Cerco ora il valore di A; al

qual fine divido $\alpha^3\delta$ per $-\alpha$, e ho $-\alpha^2\delta$, e quindi $D.\alpha^2\delta = \alpha^2 + 2\alpha\delta$; $\frac{D(\alpha^2+2\alpha\delta)}{2} = 2\alpha + \delta$; $\frac{D(2\alpha+\delta)}{3} = 1$. Divido poi $(z-\alpha)^3(z-\delta)$ per $(z-\alpha)^3$, e nel quoziente $z-\delta$ faccio $z=\alpha$, e mi risulta $\alpha-\delta$ che è il denominatore di A. Sicchè alternando i segni;

$$A = \frac{-\alpha^2\delta y_0 + (\alpha^2+2\alpha\delta)y_1 - (2\alpha+\delta)y_2 + y_3}{\alpha-\delta}.$$

Passo al valore di A' e divido $\alpha^3\delta$ per $(-\alpha)(-\alpha)$ e ho di quoziente $\alpha\delta$; e quindi $D.\alpha\delta = \alpha+\delta$; $\frac{D(\alpha+\delta)}{2} = 1$. Per avere il coefficiente di $-A$ nel valore di A', differenzio al modo solito il denominatore $\alpha-\delta$ supponendo che varj solo α, e ho 1 di risultato. Dunque $A' = \frac{\alpha\delta y_0 - (\alpha+\delta)y_1 + y_2 - A}{\alpha-\delta}$. Da ultimo per rintracciare il valore di A'' faccio la divisione di $\alpha^3\delta$ per $(-\alpha)(-\alpha)(-\alpha)$, e mi nasce il quoziente $-\delta$, che somministra $D.\delta = 1$, essendo anche 1 il differenziale di $\alpha-\delta$ nell' ipotesi di α variabile unicamente, cioè essendo 1 il moltiplicatore di $-A'$ in A''. Quindi $A'' = \frac{-\delta y_0 + y_1 - A'}{\alpha-\delta}$, con che son note tutte le parti del nostro termine generale.

17. Sia il termine generale di una ricorrente $y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + d\delta^x + e\varepsilon^x$, e suppongasi $\alpha = \beta = \gamma$. Onde fatto $\beta = \alpha + d\alpha$; $\gamma = \alpha + d\beta$, e presi 3 soli termini nel canone neutoniano, perchè son 3 le radici eguali, risulta il termine generale equivalente $y_x = (a+b+c)\alpha^x$

$$+ (bd\alpha + cd\beta)x\alpha^{x-1} + (bd\alpha^2 + cd\beta^2)\frac{x(x-1)\alpha^{x-2}}{2} + d\delta^x + e\varepsilon^x,$$

o, fatto per brevità $bd\alpha^2 + cd\beta^2 = A$; $bd\alpha + cd\beta = A'$; $a+b+c = A''$; $y_x = d\delta^x + e\varepsilon^x + A''\alpha^x + A'x\alpha^{x-1} + \frac{Ax(x-1)\alpha^{x-2}}{2}$.

I coefficienti

I coefficienti d, e, A si hanno colla regola del §. 8. L'equazione in z della nostra serie è $(z-\alpha)^3(z-\delta)(z-\varepsilon)=0$ e l' ultimo termine del primo membro si fa $-\alpha^3\delta\varepsilon$. Dunque $\frac{-\alpha^3\delta\varepsilon}{-\delta}=\alpha^3\varepsilon$; $D.\alpha^3\varepsilon=\alpha^3+3\alpha^2\varepsilon$; $\frac{D(\alpha^3+3\alpha^2\varepsilon)}{2}=3\alpha^2+3\alpha\varepsilon$; $\frac{D(3\alpha^2+3\alpha\varepsilon)}{3}=3\alpha+\varepsilon$; $\frac{D(3\alpha+\varepsilon)}{4}=1$. Di più $\frac{(z-\alpha)^3(z-\delta)(z-\varepsilon)}{z-\delta}=(z-\alpha)^3(z-\varepsilon)$. Dunque il divisore è $(\delta-\alpha)^3(\delta-\varepsilon)$, e però

$$d=\frac{\alpha^3 y_0-(\alpha^3+3\alpha^2\varepsilon)y_1+(3\alpha^2+3\alpha\varepsilon)y_2-(3\alpha+\varepsilon)y_3+y_4}{(\delta-\alpha)^3(\delta-\varepsilon)};$$

e per la somiglianza delle funzioni;

$$e=\frac{\alpha^3\delta y_0-(\alpha^3+3\alpha^2\delta)y_1+(3\alpha^2+3\alpha\delta)y_2-(3\alpha+\delta)y_3+y_4}{(\varepsilon-\alpha)^3(\varepsilon-\delta)}.$$

In oltre colla stessa regola ottiensi

$$A=\frac{\alpha^2\delta\varepsilon y_0-(\alpha^2\delta+\alpha^2\varepsilon+2\alpha\delta\varepsilon)y_1+(\alpha^2+2\alpha\delta+2\alpha\varepsilon+\delta\varepsilon)y_2-(2\alpha+\delta+\varepsilon)y_3+y_4}{(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)}.$$

Per aver poi A', A'', nella 2.ª forma del termine generale porremo successivamente $x=0, 1, 2, 3$ onde nascano le 4 equazioni; $A''+d+e=y_0$; $A''\alpha+A'+d\delta+e\varepsilon=y_1$; $A''\alpha^2+2A'\alpha+A+d\delta^2+e\varepsilon^2=y_2$; $A''\alpha^3+3A'\alpha^2+3A\alpha+d\delta^3+e\varepsilon^3=y_3$. Da queste opportunamente maneggiate si ricaverà

$$A'=\frac{-\alpha\delta\varepsilon y_0+(\alpha\delta+\alpha\varepsilon+\delta\varepsilon)y_1-(\alpha+\delta+\varepsilon)y_2+y_3-A(2\alpha-\delta-\varepsilon)}{(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)};$$

$$A''=\frac{\delta\varepsilon y_0-(\delta+\varepsilon)y_1+y_2-A'(2\alpha-\delta-\varepsilon)-A}{(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)}.$$

18. Usando il metodo sempre praticato, quando siamo arrivati al coefficiente $\alpha^2\delta\varepsilon$ di y_0 nel valore di A troviam

tosto i coefficienti di y_0 ne' valori di A', A''. Per avere quel di A', basta dividere $\alpha^2\delta\varepsilon$ per $-\alpha$, e il quoto $-\alpha\delta\varepsilon$ è il coefficiente di y_0 in A'. L' altro poi di A'' si ha dividendo quel di A' per $-\alpha$, onde nasce $\delta\varepsilon$ che moltiplica y_0 in A''. La costante regola delle differenziazioni ci farà poi conoscere in A', A'' i coefficienti di y_1, y_2, y_3. Si noti che in A' oltre i termini delle y abbiamo ancora $-A(2\alpha-\delta-\varepsilon)$, e che A, A' hanno lo stesso denominatore. Non ci vien però meno la regola per trovare questo denominatore, perchè essendo il 1.° membro dell'equazione in z $(z-\alpha)^3(z-\delta)(z-\varepsilon)$, se si divide esso per $(z-\alpha)^3$ e nel quoziente si fa $z=\alpha$, abbiamo appunto il denominatore $(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)$ che appartiene ancora ad A''. Questo differenziato colla supposizione che varj solo α e diviso per $d\alpha$ esibisce $2\alpha-\delta-\varepsilon$ che è esattamente il coefficiente di $-A$ nel valore di A'. Così nel valore di A'' esso moltiplica $-A'$, ma oltre il termine $-A'(2\alpha-\delta-\varepsilon)$ ci comparisce eziandio il nuovo termine $-A$ che nell' esempio del §. 15. manca. Esso ha per coefficiente l' unità che potrebbe anch'essere ciò che risulta dalla differenziazione del coefficiente di $-A'$, quando in esso varj solo α e resti diviso per $2d\alpha$, mentre $D(2\alpha-\delta-\varepsilon)=\frac{2d\alpha}{2d\alpha}=1$; e se ciò fosse, si vedrebbe il perchè nel precedente esempio sia svanito il termine di A. Imperocchè il valore di A'' in esso è $\frac{-\delta y_0+y_1-A'}{\alpha-\delta}$, dove l' unità è il coefficiente di $-A'$ il cui differenziale è zero, e quindi non può aversi alcun termine di A, per esser nullo il suo moltiplicatore. Se regga questo discorso, che è semplicemente congetturale, ce 'l farà palese un altro esempio di ricorrente più alta a cui presentemente ci rivolgiamo.

19. Venga dunque proposto per termine generale di una ricorrente; $a\alpha^x+b\beta^x+c\gamma^x+d\delta^x+e\varepsilon^x+l\lambda^x$, e sia $\alpha=\beta=\gamma$. Col metodo solito si trasformi esso nell' equiva-

lente $l\lambda^x + e\varepsilon^x + d\delta^x + \frac{Ax(x-1)\alpha^{x-2}}{2} + A'x\alpha^{x-1} + A''\alpha^x$, ove $A = bd\alpha^2 + cd\beta^2$; $A' = bd\alpha + cd\beta$; $A'' = a + b + c$. I valori di l, e, d, A ci vengon dati dall'ultimo termine $\alpha^3\delta\varepsilon\lambda$ del primo membro dell' equazione in z, rispetto ai numeratori, e da $(z-\alpha)^3(z-\delta)(z-\varepsilon)(z-\lambda)$ rispetto ai denominatori, se si osservano le regole prescritte. I rimanenti valori poi di A', A'' si avranno col porre nel termine generale trasformato $x = 0, 1, 2, 3, 4$, e maneggiare le 5 equazioni che nascono dal' confronto dei primi 5 termini della serie data in guisa simile a quella che abbiamo usato al §. 17. Con ciò si ottiene

$$l = \frac{-\alpha^3\delta\varepsilon y_0 + (3\alpha^2\delta\varepsilon + \alpha^3\delta + \alpha^3\varepsilon)y_1 - (\alpha^3 + 3\alpha^2\delta + 3\alpha^2\varepsilon + 3\alpha\delta\varepsilon)y_2 + (3\alpha^2 + 3\alpha\delta + 3\alpha\varepsilon + \delta\varepsilon)y_3 - (3\alpha + \delta + \varepsilon)y_4 + y_5}{(\lambda-\alpha)^3(\lambda-\delta)(\lambda-\varepsilon)}$$

$$e = \frac{-\alpha^3\delta\lambda y_0 + (3\alpha^2\delta\lambda + \alpha^3\delta + \alpha^3\lambda)y_1 - (\alpha^3 + 3\alpha^2\delta + 3\alpha^2\lambda + 3\alpha\delta\lambda)y_2 + (3\alpha^2 + 3\alpha\delta + 3\alpha\lambda + \delta\lambda)y_3 - (3\alpha + \delta + \lambda)y_4 + y_5}{(\varepsilon-\alpha)^3(\varepsilon-\delta)(\varepsilon-\lambda)}$$

$$d = \frac{-\alpha^3\varepsilon\lambda y_0 + (3\alpha^2\varepsilon\lambda + \alpha^3\varepsilon + \alpha^3\lambda)y_1 - (\alpha^3 + 3\alpha^2\varepsilon + 3\alpha^2\lambda + 3\alpha\varepsilon\lambda)y_2 + (3\alpha^2 + 3\alpha\varepsilon + 3\alpha\lambda + \varepsilon\lambda)y_3 - (3\alpha + \varepsilon + \lambda)y_4 + y_5}{(\delta-\alpha)^3(\delta-\varepsilon)(\delta-\lambda)}$$

$$A = \frac{-\alpha^2\delta\varepsilon\lambda y_0 + (\alpha^2\delta\varepsilon + \alpha^2\delta\lambda + \alpha^2\varepsilon\lambda + 2\alpha\delta\varepsilon\lambda)y_1 - (\alpha^2\delta + \alpha^2\varepsilon + \alpha^2\lambda + 2\alpha\delta\varepsilon + 2\alpha\delta\lambda + 2\alpha\varepsilon\lambda + \delta\varepsilon\lambda)y_2 + (\alpha^2 + 2\alpha\delta + 2\alpha\varepsilon + 2\alpha\lambda + \delta\varepsilon + \delta\lambda + \varepsilon\lambda)y_3 - (2\alpha + \delta + \varepsilon + \lambda)y_4 + y_5}{(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\lambda)}$$

$$A' = \frac{\alpha\delta\varepsilon\lambda y_0 - (\alpha\delta\varepsilon + \alpha\delta\lambda + \alpha\varepsilon\lambda + \delta\varepsilon\lambda)y_1 + (\alpha\delta + \alpha\varepsilon + \alpha\lambda + \delta\varepsilon + \delta\lambda + \varepsilon\lambda)y_2 - (\alpha + \delta + \varepsilon + \lambda)y_3 + y_4 - A(3\alpha^2 - 2\alpha\delta - 2\alpha\varepsilon - 2\alpha\lambda + \delta\varepsilon + \delta\lambda + \varepsilon\lambda)}{(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\lambda)}$$

$$A''=\frac{-\delta\varepsilon\lambda y_0+(\delta\varepsilon+\delta\lambda+\varepsilon\lambda)y_1-(\delta+\varepsilon+\lambda)y_2+y_3-A'(3\alpha^2-2\alpha\delta-2\alpha\varepsilon-2\alpha\lambda+\delta\varepsilon+\delta\lambda+\varepsilon\lambda)-A(3\alpha-\delta-\varepsilon-\lambda)}{(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\lambda)}.$$

In questo valore di A'' è realmente

$$\frac{D(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\lambda)}{d\alpha}=3\alpha^2-2\alpha\delta-2\alpha\varepsilon-2\alpha\lambda+\delta\varepsilon+\delta\lambda+\varepsilon\lambda,$$

come porta la regola. Di più abbiamo

$$\frac{D(3\alpha^2-2\alpha\delta-2\alpha\varepsilon-2\alpha\lambda+\delta\varepsilon+\delta\lambda+\varepsilon\lambda)}{2d\alpha}=3\alpha-\delta-\varepsilon-\lambda,$$ che

è precisamente il coefficiente di $-A$ in A'' come erasi nell' antecedente §. conghietturato.

20. Un maggior numero di radici eguali nell' equazione in z non altera le nostre regole. Se le radici eguali saran quattro, nel termine generale vi saran 4 termini appartenenti alle stesse radici, e 4 in conseguenza i coefficienti che lor competono, i quali chiameremo A, A', A'', A''' osservando l' ordine degli altri esempj. Il coefficiente A si determina col metodo de' coefficienti delle radici disuguali, avuto però il debito riguardo alla formazione del denominatore, che serve anche pei valori di A', A'', A'''. L' altro A' è tale, che oltre i termini proprj delle y avrà un termine in cui entra il precedente A. Così il terzo A'' ai termini delle y avrà due termini aggiunti, il primo de' quali contiene A', l'altro A. Finalmente il quarto A''' sarà composto de' respettivi termini delle y, e di 3 altri termini, nel primo de' quali sia A'', nel secondo A', nel terzo A. Questo è ciò a cui ci guida l' analogia degli esempj precedenti. Per assicurarcene maneggieremo un nuovo esempio di serie ricorrente.

21. Abbiasi una serie del termine generale $a\alpha^x+b\beta^x+c\gamma^x+d\delta^x+e\varepsilon^x+l\lambda^x+p\pi^x$, e vaglia l'ipotesi $\alpha=\beta=\gamma=\delta$. Poichè 4 sono le radici eguali, andran presi i 4 primi termini del canone dopo essersi fatto $\beta=\alpha+d\alpha$; $\gamma=\alpha+d\beta$; $\delta=\alpha+d\gamma$, e dopo avere alzato i binomj alla podestà x. Per tal modo avremo il termine generale trasformato

$$=p\pi^x+l\lambda^x+e\varepsilon^x+(bd\alpha^3+cd\beta^3+d\delta\gamma^3)\frac{x(x-1)(x-2)\alpha^{x-3}}{2.3}$$

$$+(bd\alpha^2+cd\beta^2+d\delta\gamma^2)\frac{x(x-1)\alpha^{x-2}}{2}+(bd\alpha+cd\beta+d\delta\gamma)x\alpha^{x-1}$$

$+(a+b+c+d)\alpha^x$, ovvero, fatto uso de' simboli majuscoli pei termini che spettano alle potenze di α;

$$p\pi^x+l\lambda^x+e\varepsilon^x+\frac{Ax(x-1)(x-2)\alpha^{x-3}}{2.3}+\frac{A'x(x-1)\alpha^{x-2}}{2}$$

$+A''x\alpha^{x-1}+A'''\alpha^x$. Investighiamo ora i valori de' coefficienti colla nostra regola e a norma della congettura del §. 20. Essendo l' equazione in z della nostra serie $(z-\alpha)^4(z-\varepsilon)(z-\lambda)(z-\pi)=0$, l' ultimo termine del primo membro si fa $-\alpha^4\varepsilon\lambda\pi$. Dunque

$$p=\frac{\alpha^4\varepsilon\lambda y_0-(\alpha^4\varepsilon+\alpha^4\lambda+4\alpha^3\varepsilon\lambda)y_1+(\alpha^4+4\alpha^3\varepsilon+4\alpha^3\lambda+6\alpha^2\varepsilon\lambda)y_2-(4\alpha^3+6\alpha^2\varepsilon+6\alpha^2\lambda+4\alpha\varepsilon\lambda)y_3+(6\alpha^2+4\alpha\varepsilon+4\alpha\lambda+\varepsilon\lambda)y_4-(4\alpha+\varepsilon+\lambda)y_5+y_6}{(\pi-\alpha)^4(\pi-\varepsilon)(\pi-\lambda)}$$

Cangiando poi λ in π, e π in λ si ha il valore di l. Così cangiando ε in π, e π in ε si ha il valore di e. Quanto al valore di A, esso risulta

$$A=\frac{\alpha^3\varepsilon\lambda\pi y_0-(\alpha^3\varepsilon\lambda+\alpha^3\varepsilon\pi+\alpha^3\lambda\pi+3\alpha^2\varepsilon\lambda\pi)y_1+(\alpha^3\varepsilon+\alpha^3\lambda+\alpha^3\pi+3\alpha^2\varepsilon\lambda+3\alpha^2\varepsilon\pi+3\alpha^2\lambda\pi+3\alpha\varepsilon\lambda\pi)y_2-(\alpha^3+3\alpha^2\varepsilon+3\alpha^2\lambda+3\alpha^2\pi+3\alpha\varepsilon\lambda+3\alpha\varepsilon\pi+3\alpha\lambda\pi+\varepsilon\lambda\pi)y_3+(3\alpha^2+3\alpha\varepsilon+3\alpha\lambda+3\alpha\pi+\varepsilon\lambda+\varepsilon\pi+\lambda\pi)y_4-(3\alpha+\varepsilon+\lambda+\pi)y_5+y_6}{(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\lambda)(\alpha-\pi)}$$

E quindi

$$A'=\frac{-\alpha^2\varepsilon\lambda\pi y_0+(\alpha^2\varepsilon\lambda+\alpha^2\varepsilon\pi+\alpha^2\lambda\pi+2\alpha\varepsilon\lambda\pi)y_1-(\alpha^2\varepsilon+\alpha^2\lambda+\alpha^2\pi+2\alpha\varepsilon\lambda+2\alpha\varepsilon\pi+2\alpha\lambda\pi+\varepsilon\lambda\pi)y_2+(\alpha^2+2\alpha\varepsilon+2\alpha\lambda+2\alpha\pi+\varepsilon\lambda+\varepsilon\pi+\lambda\pi)y_3-(2\alpha+\varepsilon+\lambda+\pi)y_4+y_5-A(3\alpha^2-2\alpha\varepsilon-2\alpha\pi+\varepsilon\lambda+\varepsilon\pi+\lambda\pi)}{(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\lambda)(\alpha-\pi)}$$

$$A''=\frac{\alpha\varepsilon\lambda\pi y_0-(\alpha\varepsilon\lambda+\alpha\varepsilon\pi+\alpha\lambda\pi+\varepsilon\lambda\pi)y_1+(\alpha\varepsilon+\alpha\lambda+\alpha\pi+\varepsilon\lambda+\varepsilon\pi+\lambda\pi)y_2-(\alpha+\varepsilon+\lambda+\pi)y_3+y_4-A'(3\alpha^2-2\alpha\varepsilon-2\alpha\lambda-2\alpha\pi+\varepsilon\lambda+\varepsilon\pi+\lambda\pi)-A(3\alpha-\varepsilon-\lambda-\pi)}{(\alpha-\varepsilon)(\alpha-\lambda)(\alpha-\pi)}$$

$$A''' = \frac{-\varepsilon\lambda\pi y_0 + (\varepsilon\lambda + \varepsilon\pi + \lambda\pi) y_1 - (\varepsilon + \lambda + \pi) y_2 + y_3 - A''(3\alpha^2 - 2\alpha\varepsilon - 2\alpha\lambda - 2\alpha\pi + \varepsilon\lambda + \varepsilon\pi + \lambda\pi) - A'(3\alpha - \varepsilon - \lambda - \pi) - A}{(\alpha - \varepsilon)(\alpha - \lambda)(\alpha - \pi)}$$

22. Se coll' ordinario metodo ponendo ſucceſſivamente $x = 0$, $x = 1$ ecc. ſino a $x = 6$ ſi formeranno 7 equazioni tra le modificazioni corriſpondenti del termine generale traſſormato e i 7 primi termini della ricorrente y_0, y_1 ecc. indi trattandole colle regole algebraiche ſi cercheranno i valori de' coefficienti A, A', A'', A''', queſti ſi troveranno eguali a quelli che ci ha ſomminiſtrato il noſtro metodo. Avvertiremo ſoltanto, perchè non naſca equivoco, che nel valore di A''' l'ultimo termine del numeratore $-A$ è col coefficiente 1 perchè la differenziazione del coefficiente di $-A'$ facendo variar ſolo α, e poi diviſa per $3dx$ dà appunto l'unità. Non ſi potrà sbagliare nell' aſſegnare il valor numerico che divide la differenziazione, ſe ſi ſarà attenzione al numero delle majuſcole precedenti che ſono nel numeratore, che ſi computano inſiem con quella di cui ſi cerca il moltiplicatore. Nel valore di A''', il coefficiente di $-A''$ è il differenziale del denominator della formola, che deeſi dividere per $1.dx$ atteſochè innanzi A'' non v' è majuſcola alcuna. Il moltiplicatore di $-A'$ è il differenziale del moltiplicatore di $-A''$ diviſo per $2dx$, perchè innanzi A v' è A''. Finalmente il coefficiente di $-A$ è il differenziale del coefficiente di $-A'$ diviſo per $3d\alpha$ per ragione che avanti A ci ſono le 2 majuſcole A', A''. Simile diſcorſo faremo pei moltiplicatori delle majuſcole ne' valori di A'', A' e varrà la regola per tutte le ipoteſi di ſerie ricorrenti, che abbiano nella equazione di relazione qualſiſia numero di radici eguali.

23. Eſprimeremo in un' altra maniera i coefficienti del termine generale delle ricorrenti, la quale ci potrà eſſere di molto comodo per certe determinate ſerie; ma prima di tutto ci convien fare alcune rifleſſioni. Sia l' equazione in z, che è la ſcala di relazione della ricorrente, $z^2 + pz + q = 0$. Se ſupponiamo che queſta equazione naſca dal prodotto $(z - \gamma)(z - \delta) = 0$, ovvero $z^2 - (\gamma + \delta)z + \gamma\delta = 0$, ſarà col confronto $\gamma\delta = q$; $-(\gamma + \delta) = p$. Dunque, facendo va-

riar γ, δ e prendendo al solito modo le differenze parziali, avremo $D.\gamma\delta = D.q$, cioè $D.q = \gamma + \delta$, ossia $D.q = -p$. In oltre, poichè $-(\gamma+\delta) = p$, sarà $\frac{D(\gamma+\delta)}{2} = \frac{-D.p}{2}$. Ma $\frac{D(\gamma+\delta)}{2} = 1$. Dunque $\frac{D.p}{2} = -1$. Sia la data equazione in z la seguente $(z-\gamma)(z-\delta)(z-\varepsilon) = 0$, ossia $z^3 - (\gamma+\delta+\varepsilon)z^2 + (\gamma\delta+\gamma\varepsilon+\delta\varepsilon)z - \gamma\delta\varepsilon = 0$, la quale esprimo in quest' altro modo; $z^3 + pz^2 + qz + r = 0$, e si hanno le 3 equazioni $-\gamma\delta\varepsilon = r$; $\gamma\delta+\gamma\varepsilon+\delta\varepsilon = q$; $-(\gamma+\delta+\varepsilon) = p$. Da queste si deduce $D.\gamma\delta\varepsilon = -D.r$; $\frac{D(\gamma\delta+\gamma\varepsilon+\delta\varepsilon)}{2} = \frac{D.q}{2}$; $\frac{D(\gamma+\delta+\varepsilon)}{3} = -\frac{D.p}{3}$; e siccome $D.\gamma\delta\varepsilon = \gamma\delta+\gamma\varepsilon+\delta\varepsilon$, avremo $D.r = -q$; così essendo $\frac{D(\gamma\delta+\gamma\varepsilon+\delta\varepsilon)}{2} = \gamma+\delta+\varepsilon$, e $\frac{D.(\gamma+\delta+\varepsilon)}{3} = 1$, sarà $\frac{D.q}{2} = -p$, e $\frac{D.p}{3} = -1$. E' facile il vedere che questa regola ha luogo di qualunque grado sia l' equazione in z. Supposta pertanto la seguente generalissima
$z^v + fz^{v-1} + gz^{v-2} + hz^{v-3} \ldots + qz^3 + rz^2 + tz + u = 0$, di cui le radici siano β, γ, δ ecc. di numero v, esprimano b, c, d ecc. i coefficienti che nel termine generale moltiplicano β^x, γ^x, δ^x ecc., e si cerchi il valore di b. Per le cose dette al §. 6. nel numeratore di b sarà il coefficiente di $y_0 = \frac{u}{-\beta}$. Ora egli è cosa certissima, che essendo $z-\beta$ un fattore della suddetta equazione, se in essa pongo β in vece di z, il risultato è nullo. Onde $\beta^v + f\beta^{v-1} + g\beta^{v-2} + h\beta^{v-3} \ldots + q\beta^3 + r\beta^2 + t\beta + u = 0$, e però

$$\frac{u}{-\beta} = \beta^{v-1} + f\beta^{v-2} + g\beta^{v-3} + h\beta^{v-4} \ldots + q\beta^2 + r\beta + t \ldots (C).$$

Quest' omogeneo di comparazione sarà dunque il moltiplicatore di y_0 nel numeratore di b, che per brevità denoteremo da qui innanzi col simbolo $N.b$, e così i numeratori di c, d ecc. verranno espressi da $N.c$, $N.d$ ecc. Per aver poi il

coefficiente di y_1 in *N.b* si sa che bisogna colla solita regola prendere le differenze parziali di (*C*) mutando il segno ne' termini che si producono. Il perchè differenziando colla sempre praticata divisione delle differenze, che per comodo si ommettono, si avrà $\frac{Du}{-\beta} = (v-1)\beta^{v-2} + \beta^{v-2}df + (v-2)f\beta^{v-3} + \beta^{v-3}dg + (v-3)g\beta^{v-4} + \beta^{v-4}dh + (v-4)h\beta^{v-5} \ldots + \beta^2 dq + 2q\beta + \beta dr + r + dt$. Ma per ciò che abbiam detto al principio di questo §., diventa $df = -v$, $dg = -(v-1)f$; $dh = -(v-2)g$ ecc; $du = -t$; $dt = -2r$; $dr = -3q$ ecc. Dunque sostituendo i valori di questi differenziali sarà $\frac{D.u}{-\beta} = (v-1)\beta^{v-2} - v\beta^{v-2} + (v-2)f\beta^{v-3} - (v-1)f\beta^{v-3} + (v-3)g\beta^{v-4} - (v-2)g\beta^{v-4} + (v-4)h\beta^{v-5} - (v-3)h\beta^{v-5} \ldots + 2q\beta - 3q\beta + r - 2r$, cioè dopo la riduzione; $\frac{D.u}{-\beta} = -\beta^{v-2} - f\beta^{v-3} - g\beta^{v-4} - h\beta^{v-5} \ldots - q\beta - r$. Quindi per la legge dell' alternativa de' segni sarà il moltiplicatore di $y_1 = \beta^{v-2} + f\beta^{v-3} + g\beta^{v-4} + h\beta^{v-5} \ldots + q\beta + r \ldots (D)$.

Si passi a investigare il differenziale di questo 2.° coefficiente che ci darà l' altro di y_2, e avremo $D(D) = (v-2)\beta^{v-3} + \beta^{v-3}df + (v-3)f\beta^{v-4} + \beta^{v-4}dg + (v-4)g\beta^{v-5} + \beta^{v-5}dh + (v-5)h\beta^{v-6} \ldots + \beta dq + q + dr$. Sicchè sostituendo i valori di df, dg ecc., cangiando i segni e dividendo per 2 come vuol la regola, ritroveremo il coefficiente di $y_2 = \beta^{v-3} + f\beta^{v-4} + g\beta^{v-5} + h\beta^{v-6} \ldots + p\beta + q$. Così il coefficiente di y_3 diventa $\beta^{v-4} + f\beta^{v-5} + g\beta^{v-6} + h\beta^{v-7} \ldots + p$; e riesce chiaro, che dato il coefficiente primo di y_0, levando da questo l' ultimo termine e dividendo gli altri per β, nascerà il coefficiente di y_1, medesimamente levato da questo secondo l' ultimo termine e dividendo gli altri per β, avremo il coefficiente di y_2; e nella stessa guisa diremo dei susseguenti cosicchè sarà

N.b =

$$N.b = (\beta^{v-1} + f\beta^{v-2} + g\beta^{v-3} \ldots + p\beta^3 + q\beta^2 + r\beta + t)y_0$$
$$+ (\beta^{v-2} + f\beta^{v-3} + g\beta^{v-4} \ldots + p\beta^2 + q\beta + r)y_1$$
$$+ (\beta^{v-3} + f\beta^{v-4} + g\beta^{v-5} \ldots + p\beta + q)y_2$$
$$+ (\beta^{v-4} + f\beta^{v-5} + g\beta^{v-6} \ldots + p)y_3 \ldots + (\beta + f)y_{v-2} + y_{v-1}.$$

24. Essendo simile il raziocinio ed il calcolo pel rintracciamento de' numeratori di c, d ecc. che appartengono alle radici potenziate γ^x, δ^x ecc., per avere $N.c$ non si avrà da far altro che cangiare nella precedente formola β in γ; e così β in δ ove si voglia $N.d$, ecc. Anzi se supporremo che alcune di queste radici diventino tra loro eguali, e sia ciascuna di esse $=\alpha$, poichè chiamato m il numero di queste radici eguali, abbiamo in y_x l' ultimo termine spettante ad $\alpha = \frac{Ax(x-1)(x-2)\ldots(x-(m-2))\alpha^{x-(m-1)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$, e si è veduto ne' superiori §§., che in $N.A$ il coefficiente di y_0, supposto u l' ultimo termine dell' equazione in z, è $\frac{u}{-\alpha}$, espressione affatto simile alle altre $\frac{u}{-\beta}$, $\frac{u}{-\gamma}$ ecc., si fa evidente, che sarà pure

$$N.A = \alpha^{v-1} + f\alpha^{v-2} + g\alpha^{v-3} + h\alpha^{v-4} \ldots + p\alpha^3 + q\alpha^2 + r\alpha + t)y_0$$
$$+ (\alpha^{v-2} + f\alpha^{v-3} + g\alpha^{v-4} + h\alpha^{v-5} \ldots p\alpha^2 + q\alpha + r)y_1$$
$$+ (\alpha^{v-3} + f\alpha^{v-4} + g\alpha^{v-5} + h\alpha^{v-6} \ldots + p\alpha + q)y_2$$
$$+ (\alpha^{v-4} + f\alpha^{v-5} + g\alpha^{v-6} + h\alpha^{v-7} \ldots + p)y_3 \ldots$$
$$+ (\alpha + f)y_{v-2} + y_{v-1} \ldots (D).$$

25. Al ritrovamento dei denominatori di b, c, d ecc. servirà questo

LEMMA

Sia la formola generale $z^v + fz^{v-1} + gz^{v-2} + hz^{v-3} \ldots + qz^3 + rz^2 + tz + u$, le cui radici siano β, γ, δ ecc. di

numero v. Dico che se dividerò la formola per $z-\beta$, e poi nel quoziente porrò β in vece di z, risulterà $v\beta^{v-1}+(v-1)f\beta^{v-2}+(v-2)g\beta^{v-3}+(v-3)h\beta^{v-4}\dots+3q\beta^2+2r\beta+t$. Cangiando poi β in γ, δ ecc. avrò i quozienti che nascono dividendo la formola per $z-\gamma$, $z-\delta$ ecc.

Per dimostrar questo, dobbiam fare l' attual divisione della proposta formola per $z-\beta$, e nasce di quoziente $z^{v-1}+(\beta+f)z^{v-2}+(\beta^2+\beta f+g)z^{v-3}+(\beta^3+\beta^2 f+\beta g+h)z^{v-4}\dots+\beta^{v-1}+f\beta^{v-2}+g\beta^{v-3}+h\beta^{v-4}\dots+q\beta^2+r\beta+t$, perchè l' ultimo residuo $\beta^v+f\beta^{v-1}+g\beta^{v-2}+h\beta^{v-3}\dots+t\beta+u$ debb' esser nullo atteso che si è posto $z-\beta$ un divisore esatto della formola stabilita. Sostituiamo ora nel quoziente β in vece di z, e sarà facile il vedere che esso si tramuta in un altro, in cui abbiamo v termini β^{v-1}, indi $v-1$ termini $f\beta^{v-2}$, e così $v-2$ termini $g\beta^{v-3}$ ecc. fino agli ultimi $3q\beta^2+2r\beta+t$. Dunque $\frac{z^v+fz^{v-1}\dots+tz+u}{z-\beta}$ $=v\beta^{v-1}+(v-1)f\beta^{v-2}+(v-2)g\beta^{v-3}+(v-3)h\beta^{v-4}\dots+3q\beta^2+2r\beta+t\dots(E)$, quando nel quoto si ponga β in vece di z. Cangiato poi β in γ, δ ecc., l' espressione (E) diventerà il quoziente della formola divisa per $z-\gamma$, $z-\delta$ ecc., ove in esso si metta γ, δ ecc. in vece di z.

26. Abbiansi nella formola z^v+fz^{v-1} ecc. più fattori eguali $z-\alpha$. Se la dividiam per un d' essi, e poi nel quoto surroghiamo α a z, è chiaro che sarà $\frac{z^v+fz^{v-1}\text{ ecc.}}{z-\alpha}$ $=v\alpha^{v-1}+(v-1)f\alpha^{v-2}+(v-2)g\alpha^{v-3}\dots+3q\alpha^2+2r\alpha+t$. Ora cosa diventerà il quoziente, se si divida la formola pel prodotto di due fattori eguali cioè per $(z-\alpha)^2$, e si sostituisca poi in esso α in cambio di z? La formola divisa per $z-\alpha$ per l' antecedente §. deve dare $z^{v-1}+(\alpha+f)z^{v-2}+(\alpha^2+\alpha f+g)z^{v-3}+(\alpha^3+\alpha^2 f+\alpha g+h)z^{v-4}\dots+\alpha^{v-1}+f\alpha^{v-2}+g\alpha^{v-3}+h\alpha^{v-4}\dots+q\alpha^2+r\alpha+t$. Questa dunque si dee tornare a dividere per $z-\alpha$, e nasce di quoziente $z^{v-2}+(2\alpha+f)z^{v-3}+(3\alpha^2+2\alpha f+g)z^{v-4}+(4\alpha^3+3\alpha^2 f+2\alpha g+h)z^{v-5}\dots+(v-1)\alpha^{v-2}+(v-2)f\alpha^{v-3}$

$+(v-3)g\alpha^{v-4}\ldots+2q\alpha+r$. Fatto quindi $z=\alpha$, avremo $(1+2+3+4\ldots+v-1)\alpha^{v-2}+(1+2+3\ldots+v-2)f\alpha^{v-3}$ $+(1+2+3\ldots+v-3)g\alpha^{v-4}\ldots+3q\alpha+r$, ovvero

$$\frac{z^v+fz^{v-1}\text{ ecc.}}{(z-\alpha)^2}=\frac{v(v-1)\alpha^{v-2}}{2}+\frac{(v-1)(v-2)f\alpha^{v-3}}{2}$$

$$+\frac{(v-2)(v-3)g\alpha^{v-4}}{2}\ldots+3q\alpha+r.$$ Così se si vorrà sapere cosa risulti quando si divida la formola per $(z-\alpha)^3$, e si faccia poi $z=\alpha$, con simile raziocinio si troverà

$$\frac{z^v+fz^{v-1}\text{ ecc.}}{(z-\alpha)^3}=\frac{v(v-1)(v-2)\alpha^{v-3}}{2.3}$$

$$+\frac{(v-1)(v-2)(v-3)f\alpha^{v-4}}{2.3}$$

$$+\frac{(v-2)(v-3)(v-4)g\alpha^{\alpha v-5}}{2.3}\ldots+q;$$ e quindi in genere si potrà stabilire la verità di questa equazione;

$$\frac{z^v+fz^{v-1}\text{ ecc.}}{(z-\alpha)^m}=\frac{v(v-1)(v-2)\ldots(v-(m-1))\alpha^{v-m}}{1.2.3\ldots.m}$$

$$+\frac{(v-1)(v-2)(v-3)\ldots(v-m)f\alpha^{v-(m+1)}}{1.2.3\ldots.m}$$

$$+\frac{(v-2)(v-3)(v-4)\ldots.(v-(m+1))g\alpha^{v-(m+2)}}{1.2.3\ldots.m}\text{ ecc.}\ldots(F)$$

fino al termine in cui α non ha più alcuna dimensione.

27. I due ultimi §§. ci somministrano i valori de' denominatori non solo di b, c, d ecc. che appartengono alle radici disuguali β, γ, δ ecc. ma ancora di A, A', $A''\ldots A^{m-1}$ che corrispondono alle diverse podestà di α nel termine generale della ricorrente, la cui equazione in z ha numero m di radici α eguali. Resta che si trovino gl' interi numeratori di A', $A''\ldots. A^{m-1}$, che in y_x moltiplicano

$$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots.(x-(m-3))x^{x-(m-2)}}{1.2.3\ldots(m-2)};$$

$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(m-4))\alpha^{x-(m-3)}}{1.2.3\ldots(m-3)}$ ecc. fino al termine α^x, per la qual cosa adopreremo sì fattamente. L' equazione in z della ricorrente di grado v è, come sopra,

$(G)\ldots z^v + fz^{v-1} + gz^{v-2} + hz^{v-3} \ldots + pz^4 + qz^3 + rz^2 + tz + u = 0$, nella quale poste radici eguali α di num.° m, diventa $v-m$ il num.° delle altre radici. Dunque in essa fatto $z=\alpha$ il risultato sarà zero, e avremo

$\alpha^v + f\alpha^{v-1} + g\alpha^{v-2} \ldots + p\alpha^4 + q\alpha^3 + r\alpha^2 + t\alpha = -u$; onde

$$(H)\ldots \frac{u}{-\alpha} = \alpha^{v-1} + f\alpha^{v-2} + g\alpha^{v-3} \ldots + p\alpha^3 + q\alpha^2 + r\alpha + t,$$

che è il coefficiente di y_0 in A come si è veduto al §. 24. In oltre, poichè nell' equazione (G) vi sono m radici eguali α, per la regola di *Huddens*, moltiplicati i termini successivi per la serie aritmetica v, $v-1$, $v-2$ ecc., il risultato sarà pure eguale a zero, e in esso vi saranno radici eguali α di num.° $m-1$. Con tale moltiplicazione risulta $vz^v + (v-1)fz^{v-1} + (v-2)gz^{v-2} \ldots + 4pz^4 + 3qz^3 + 2rz^2 + tz = 0$. Onde dividendo l' equazione per z e poi cangiando z in α, avrassi $v\alpha^{v-1} + (v-1)f\alpha^{v-2} + (v-2)g\alpha^{v-3} \ldots + 4p\alpha^3 + 3q\alpha^2 + 2r\alpha + t = 0$, con che resta dato per gli altri simboli il valore di t. Questo valore si sostituisca in (H), e ci nascerà

$$\frac{u}{-\alpha} = -(v-1)\alpha^{v-1} - (v-2)f\alpha^{v-2} - (v-3)g\alpha^{v-3} \ldots - 3p\alpha^3 - 2q\alpha^2 - r\alpha;$$ sicchè dividendo per $-\alpha$;

$$(I)\ldots \frac{u}{(-\alpha)^2} = (v-1)\alpha^{v-2} + (v-2)f\alpha^{v-3} + (v-3)g\alpha^{v-4} \ldots + 3p\alpha^2 + 2q\alpha + r,$$ che, come si sa, è il coefficiente di y_0 in A'.

28. La equazione $vz^v + (v-1)fz^{v-1} \ldots + tz = 0$ divisa per z dà quest' altra $vz^{v-1} + (v-1)fz^{v-2} + (v-2)gz^{v-3} \ldots + 4pz^3 + 3qz^2 + 2rz + t = 0$, la quale contenendo $m-1$ radici eguali α potrà essere termine per termine moltiplicata dalla serie aritmetica de' rispettivi esponenti, e quel che risulta sarà parimente zero. Fatto dunque questo, poi diviso ogni cosa per $2z$ indi cangiando z in α,

si avrà $\frac{v(v-1)\alpha^{v-2}}{2} + \frac{(v-1)(v-2)f\alpha^{v-3}}{2} \ldots + 6px^2$ $+ 3qx + r = 0$. Si ponga nell' equazione (I) il valore di r dato da questa equazione, e dopo le riduzioni e la divisione dell' equazione per $-\alpha$, ottiensi

$$\frac{u}{(-\alpha)^3} = \frac{(v-1)(v-2)\alpha^{v-3}}{2} + \frac{(v-2)(v-3)f\alpha^{v-4}}{2}$$

$+ \frac{(v-3)(v-4)g\alpha^{v-5}}{2} \ldots + 3p\alpha + q$, la quale espressione è il coefficiente di y_0 in A''. Con simile operazione si troverà

$$\frac{u}{(-\alpha)^4} = \frac{(v-1)(v-2)(v-3)\alpha^{v-4}}{2.3}$$

$+ \frac{(v-2)(v-3)(v-4)f\alpha^{v-5}}{2.3} \ldots + p$; essendo questo il coefficiente di y_0 in A'''. Laonde generalmente il coefficiente di y_0 in A^{m-1} che è l' ultimo di quelli che appartengono alla radice α e moltiplica α^v viene espresso dalla seguente equazione

$$(L) \ldots \frac{u}{(-\alpha)^m} = \frac{(v-1)(v-2)(v-3)\ldots(v-(m-1))\alpha^{v-m}}{1.2.3\ldots.(m-1)}$$

$$+ \frac{(v-2)(v-3)(v-4)\ldots(v-m)f\alpha^{v-(m+1)}}{1.2.3\ldots.(m-1)}$$

$$+ \frac{(v-3)(v-4)(v-5)\ldots(v-(m+1))g\alpha^{v-(m+2)}}{1.2.3\ldots.(m-1)} \text{ ecc.}$$

fino a quel termine che ha per coefficiente numerico l' unità positiva.

29. Conosciuto il moltiplicatore di y_0 in A^{m-1} che è il termine generale delle A, si renderà noto quello di y_1 che nasce dal differenziare nel modo consueto il valore di $\frac{u}{(-\alpha)^m}$ cambiando poi i segni. Intraprendasi pertanto questa differenziazione, e sarà

$$\frac{Du}{(-\alpha)^m} = \frac{(v-1)(v-2)(v-3)\ldots(v-m)\alpha^{v-(m+1)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-2)(v-3)(v-4)\ldots(v-m)\alpha df^{v-(m+1)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-2)(v-3)\ldots(v-(m+1))f\alpha^{v-(m+2)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-3)(v-4)\ldots(v-(m+1))\alpha^{v-(m+2)}dg}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-3)(v-4)\ldots(v-(m+2))g\alpha^{v-(m+3)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-4)(v-5)\ldots(v-(m+2))\alpha^{v-(m+3)}dh}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-4)(v-5)\ldots(v-(m+3))h\alpha^{v-(m+4)}}{1.2.3\ldots(m-1)} + \text{ecc.}$$

E posto $-v$, $-(v-1)f$, $-(v-2)g$ ecc. in vece di df, dg, dh ecc. dopo la riduzione degli omogenei allo stesso denominatore, e il cangiamento de' segni, risulterà il suddetto moltiplicatore di y_1, ossia

$$\frac{Du}{(-\alpha)^m} = \frac{(v-2)(v-3)\ldots(v-m)\alpha^{v-(m+1)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-3)(v-4)\ldots(v-(m+1))f\alpha^{v-(m+2)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-4)(v-5)\ldots(v-(m+2))g\alpha^{v-(m+3)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-5)(v-6)\ldots(v(m+3))h\alpha^{v-(m+4)}}{1.2.3\ldots(m-1)} + \text{ecc.} \ldots (M).$$

Questo coefficiente dall' altro di y_0 (L) si può cavare in questa maniera. Si ommetta il 1.° termine che moltiplica α^{v-m}, nel 2.° si sostituisca 1 in vece di f, nel 3.° si metta f in vece

di g, nel 4.° g in vece di h, e così di mano in mano finchè si arriva all'ultimo termine, che non ha altro coefficiente fuorchè l' unità.

30. Ad avere il moltiplicatore di y_2 converrà differenziare l' equazione (M), dividere per 2 i termini che nascono e cangiare i segni. Eccone il calcolo;

$$\frac{D.D\frac{u}{(-\alpha)^m}}{2}=\frac{(v-2)(v-3)\ldots\big(v-(m+1)\big)x^{v-(m+2)}}{2.1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-3)(v-4)\ldots\big(v-(m+1)\big)x^{v-(m+2)}df}{2.1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-3)(v-4)\ldots\big(v-(m+2)\big)f\alpha^{v-(m+3)}}{2.1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-4)(v-5)\ldots\big(v-(m+2)\big)\alpha^{v-(m+3)}dg}{2.1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-4)(v-5)\ldots\big(v-(m+3)\big)g\alpha^{v-(m+4)}}{2.1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-5)(v-6)\ldots\big(v-(m+3)\big)x^{v-(m+4)}dh}{2.1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-5)(v-6)\ldots\big(v-(m+4)\big)h\alpha^{v-(m+5)}}{2.1.2.3\ldots(m-1)}$$ ecc. Colla sostituzione de' valori delle differenze df, dg, dh ecc. e colla riduzione degli omogenei dopo il cangiamento de' segni si ottiene

$$\frac{D.D\frac{u}{(-\alpha)^m}}{2}=\frac{(v-3)(v-4)\ldots\big(v-(m+1)\big)\alpha^{v-(m+2)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-4)(v-5)\ldots\big(v-(m+2)\big)f\alpha^{v-(m+3)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(v-5)(v-6)\ldots\big(v-(m+3)\big)gx^{v-(m+4)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$+ \frac{(v-6)(v-7)\ldots\big(v-(m+4)\big)h\alpha^{v-(m+5)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$ ecc. Questo è il coefficiente di y_2 il quale dall' altro di y_1 si può dedurre così. Si prescinda in (M) dal primo termine. Nel 2.° si metta 1 in vece di f, nel 3.° f in vece di g, nel 4.° g in vece di h ecc. appunto come s'è fatto in (L) per trovar (M), e si avrà l' intento. Onde per la somiglianza del calcolo, potremo stabilir senz' altro che sia il moltiplicatore di y_3, ovvero

$$\frac{D.D.D\dfrac{u}{(-\alpha)^m}}{2.3} = \frac{(v-4)(v-5)\ldots\big(v-(m+2)\big)\alpha^{v-(m+3)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$+ \frac{(v-5)(v-6)\ldots\big(v-(m+3)\big)f\alpha^{v-(m+4)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$ ecc., e così si dica de' susseguenti fino al termine y_{v-m} che ha solo 1 di moltiplicatore.

31. Stando dunque sul generale, siccome il numeratore di A^{m-1} ha due parti, la prima composta de' termini ne' quali entrano y_0, y_1, y_2 ecc., la seconda de' termini ne' quali entrano A^{m-2}, A^{m-3} ecc., come s' è veduto negli esempj precedenti, respettivamente ai termini delle y sarà la prima parte di questo numeratore eguale all' espressione seguente;

$$(N)\ \frac{\ldots 1}{1.2.3\ldots(m-1)}\Big(\big((v-1)(v-2)\ldots\big(v-(m-1)\big)\alpha^{v-m}$$

$$+ (v-2)(v-3)\ldots(v-m)f\alpha^{v-(m+1)} + \text{ecc.}\big)y_0$$

$$+ \big((v-2)(v-3)\ldots(v-m)\alpha^{v-(m+1)}$$

$$+ (v-3)(v-4)\ldots\big(v-(m+1)\big)f\alpha^{v-(m+2)} + \text{ecc.}\big)y_1$$

$$+ (v-3)(v-4)\ldots\big(v-(m+1)\big)\alpha^{v-(m+2)}$$

$$+ (v-4)(v-5)\ldots\big((v-m+2)f\alpha^{v-(m+3)} + \text{ecc.}\big)y_2 + \ldots + y_{v-m}\Big)$$

32. Serviamoci presentemente delle abbreviazioni del Sig.

la Grange

la Grange (§. 3). Facciasi l' espressione generale dell' equazione in z, cioè

$$z^{v} + fz^{v-1} + gz^{v-2} + hz^{v-3} \ldots + qz^{3} + rz^{2} + tz + u = 0 = P$$

$$z^{v-1} + fz^{v-2} + gz^{v-3} + hz^{v-4} \ldots + qz^{2} + rz + t = Q$$

$$z^{v-2} + fz^{v-3} + gz^{v-4} + hz^{v-5} \ldots + qz + r = R$$

$$z^{v-3} + fz^{v-4} + gz^{v-5} + hz^{v-6} \ldots + q = S$$

ecc.

e supponiamo che in P vi siano radici eguali α di num.° m essendo le altre β, γ, δ ecc. di num.° $v-m$. Sarà il termine generale y_x della ricorrente che corrisponde alla formola P, come segue

$$y_x = b\beta^x + c\gamma^x + d\delta^x + \text{ecc.} + \frac{Ax(x-1)(x-2)\ldots\big(x-(m-2)\big)\alpha^{x-(m-1)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+ \frac{A'x(x-1)(x-2)\ldots\big(x-(m-3)\big)\alpha^{x-(m-2)}}{1.2.3\ldots(m-2)}$$

$$+ \frac{A''x(x-1)(x-2)\ldots\big(x-(m-4)\big)\alpha^{x-(m-3)}}{1.2.3\ldots(m-3)} + \ldots + A^{m-1}\alpha^{x}$$

Ora dalle premesse equazioni col far z variabile si trae pigliando le differenze

$$\frac{dP}{dz} = vz^{v-1} + (v-1)fz^{v-2} + (v-2)gz^{v-3} + (v-3)hz^{v-4} \ldots$$
$$+ 3qz^{2} + 2rz + t$$

$$\frac{d^2P}{2dz^2} = \frac{v(v-1)z^{v-2}}{2} + \frac{(v-1)(v-2)fz^{v-3}}{2} + \frac{(v-2)(v-3)gz^{v-4}}{2}$$
$$+ \frac{(v-3)(v-4)hz^{v-5}}{2} + \ldots + 3qz + r$$

$$\frac{d^3P}{2.3dz^3} = \frac{v(v-1)(v-2)z^{v-3}}{2.3} + \frac{(v-1)(v-2)(v-3)fz^{v-4}}{2.3}$$
$$+ \frac{(v-2)(v-3)(v-4)gz^{v-5}}{2.3} \ldots + q$$

:

:

:

$$\frac{d^mP}{1.2.3\ldots m dz^m}=\frac{v(v-1)(v-2)\ldots\big(v-(m-1)\big)z^{v-m}}{1.2.3\ldots m}$$

$$+\frac{(v-1)(v-2)(v-3)\ldots(v-m)fz^{v-(m+1)}}{1.2.3\ldots m}$$

$$+\frac{(v-2)(v-3)(v-4)\ldots\big(v-(m+1)\big)gz^{v-(m+2)}}{1.2.3\ldots m}+\text{ecc.}$$

$$\frac{dQ}{dz}=(v-1)z^{v-2}+(v-2)fz^{v-3}+(v-3)gz^{v-4}\ldots+2qz+r$$

$$\frac{d^2Q}{2dz^2}=\frac{(v-1)(v-2)z^{v-3}}{2}+\frac{(v-2)(v-3)fz^{v-4}}{2}$$

$$+\frac{(v-3)(v-4)gz^{v-5}}{2}+\ldots+q$$

$$\frac{d^3Q}{2.3dz^3}=\frac{(v-1)(v-2)(v-3)z^{v-4}}{2.3}+\frac{(v-2)(v-3)(v-4)fz^{v-5}}{2.3}$$

$$+\frac{(v-3)(v-4)(v-5)gz^{v-6}}{2.3}+\text{ecc.}$$

ecc.

$$\frac{dR}{dz}=(v-2)z^{v-3}+(v-3)fz^{v-4}+(v-4)gz^{v-5}+\text{ecc.}$$

$$\frac{d^2R}{2dz^2}=\frac{(v-2)(v-3)z^{v-4}}{2}+\frac{(v-3)(v-4)fz^{v-5}}{2}$$

$$+\frac{(v-4)(v-5)gz^{v-6}}{2}+\text{ecc.}$$

$$\frac{d^3R}{2.3dz^3}=\frac{(v-2)(v-3)(v-4)z^{v-5}}{2.3}+\frac{(v-3)(v-4)(v-5)fz^{v-6}}{2.3}$$

$$+\frac{(v-4)(v-5)(v-6)gz^{v-7}}{2.3}+\text{ecc.}$$

ecc.

$$\frac{dS}{dz}=(v-3)z^{v-4}+(v-4)fz^{v-5}+(v-5)gz^{v-6}+\text{ecc.}$$

$$\frac{d^2S}{2dz^2}=\frac{(v-3)(v-4)z^{v-5}}{2}+\frac{(v-4)(v-5)fz^{v-6}}{2}$$

$$+\frac{(v-5)(v-6)gz^{v-7}}{2}+\text{ecc.}$$

$$\frac{d^3S}{2.3dz^3}=\frac{(v-3)(v-4)(v-5)z^{v-6}}{2.3}+\frac{(v-4)(v-5)(v-6)fz^{v-7}}{2.3}$$
$$+\frac{(v-5)(v-6)(v-7)gz^{v-8}}{2.3}+\text{ecc.}$$

ecc. ecc.

33. Se ne' valori di $\mathfrak{Q}$, R, S ecc. poniam β in vece di z, diventano essi i coefficienti di y_0, y_1, y_2 ecc. in Nb (§. 23.) e così sostituendo γ, δ ecc. a z, si fanno essi i coefficienti di y_0, y_1, y_2 ecc. in Nc, Nd ecc. Oltracciò nel valore di $\frac{dP}{dz}$ surrogando a z le radici β, γ, δ ecc., risultano i valori de' denominatori di b, c, d, ecc. (§. 25). Onde facendo indicare qual radice va sostituita a z in $\mathfrak{Q}$, R, S dalla differenza parziale che divide dP nel denominatore, sarà

$$b=\frac{\mathfrak{Q}y_0+Ry_1+Sy_2\ldots\ldots+y_{v-1}}{dP:d\beta};$$
$$c=\frac{\mathfrak{Q}y_0+Ry_1+Sy_2\ldots\ldots+y_{v-1}}{dP:d\gamma};$$
$$d=\frac{\mathfrak{Q}y_0+Ry_1+Sy_2\ldots\ldots+y_{v-1}}{dP:d\delta},$$

ecc. Quanto al numeratore di A vale la stessa regola, che si è osservata in b, c, d ecc. (§. 24), ma il suo denominatore, che è comune eziandio agli altri simboli A', A'' ecc. e che è stato segnato con (F) al §. 26, è quel che diventa $\frac{d^mP}{1.2.3\ldots mdz^m}$, quando nel suo valore (§. 32) si ponga α in vece di z. Dunque sarà

$$A=\frac{\mathfrak{Q}y_0+Ry_1+Sy_2\ldots\ldots+y_{v-1}}{d^mP:(1.2.3\ldots md\alpha^m)}.$$

Il valore di A' nel numeratore dev' esser composto di due parti; la prima de' termini, ne' quali entrano y_0, y_1, y_2 ..... y_{v-2}, essendo formata l' altra dal differenziale del denominatore di A moltiplicato in $-A$, supposto che varj solo α, come apparisce dagli e-

sempj de' §. 18, 19. La suddetta prima parte si caverà dal valor generale che ha essa nel numeratore di A^{m-1} (§. 31); ove si ponga $m=2$, e sarà

$$((v-1)\alpha^{v-2}+(v-2)f\alpha^{v-3}+(v-3)g\alpha^{v-4}\text{ ecc.})y_0$$

$$+((v-2)\alpha^{v-3}+(v-3)f\alpha^{v-4}+(v-4)g\alpha^{v-5}\text{ ecc.})y_1$$

$$+((v-3)\alpha^{v-4}+(v-4)f\alpha^{v-5}+(v-5)g\alpha^{v-6}\text{ ecc.})y_2\ldots+y_{v-2}.$$

Ma fatto $z=\alpha$, i moltiplicatori di y_0, y_1, y_2 ecc. sono eguali ai valori di $\frac{dQ}{d\alpha}$, $\frac{dR}{d\alpha}$, $\frac{dS}{d\alpha}$ ecc. Dunque coll' unione di tutte e due le parti, e col medesimo denominatore che ha A avremo

$$A'=\frac{\frac{dQ}{d\alpha}y_0+\frac{dR}{d\alpha}y_1+\frac{dS}{d\alpha}y_2\ldots\ldots+y_{v-2}-\frac{Ad^{m+1}P}{1.2.3\ldots\ldots md\alpha^{m+1}}}{d^mP:(1.2.3\ldots md\alpha^m)}$$

Fatto in (N) $m=3$, onde risulti $\Big(\frac{(v-1)(v-2)\alpha^{v-3}}{1.2}$ $+\frac{(v-2)(v-3)f\alpha^{v-4}}{1.2}\text{ ecc.}\Big)y_0+\big((v-2)(v-3)\alpha^{v-4}$ $+(v-3)(v-4)f\alpha^{v-5}\text{ ecc.}\big)y_1\ldots+y_{v-3}$, questa è la prima parte del numeratore di A''. Ora poichè colla sostituzione di $z=\alpha$ ne' valori di $\frac{d^2Q}{1.2dz^2}$, $\frac{d^2R}{1.2dz^2}$, $\frac{d^2S}{1.2dz^2}$ ecc. risultano i moltiplicatori stessi di y_0, y_1, y_2 nell' anzidetta prima parte, e la seconda pei §. 18., 19. è $-\frac{A'd^{m+1}P}{1.1.2.3\ldots.md\alpha^{m+1}}$ $-\frac{Ad^{m+2}P}{1.2.1.2.3\ldots md\alpha^{m+2}}$; ci si presenterà il valore di

$$A'' = \frac{\frac{d^2 \mathfrak{Q} y_0}{1.2 d\alpha^2} + \frac{d^2 R y_1}{1.2 d\alpha^2} + \frac{d^2 S y_2}{1.2 d\alpha^2} \dots + y_{v-3} - \frac{A' d^{m+1} P}{1.1.2.3\dots m d\alpha^{m+2}} - \frac{A d^{m+2} P}{1.2.1.2.3\dots m d\alpha^{m+2}}}{d^m P:(1.2.3\dots m d\alpha^m)}$$

Similmente difcorrendo, troveremo

$$A''' = \frac{\frac{d^3 \mathfrak{Q} y_0}{1.2.3 d\alpha^3} + \frac{d^3 R y_1}{1.2.3 d\alpha^3} + \frac{d^3 S y_2}{1.2.3 d\alpha^3} \dots + y_{v-4} - \frac{A'' d^{m+1} P}{1.1.2.3\dots m d\alpha^{m+3}} - \frac{A' d^{m+2} P}{1.2.1.2.3\dots m d\alpha^{m+2}} - \frac{A d^{m+3} P}{1.2.3.1.2.3\dots m d\alpha^{m+3}}}{d^m P:(1.2.3\dots m d\alpha^m)}$$

e così le altre A'''', A''''' ecc. fino all' ultima A^{m-1}, il cui valore verrà così efpreffo

$$A^m \alpha^1 = \frac{\frac{d^{m-1} \mathfrak{Q} y_0}{1.2\dots(m-1) d\alpha^{m-1}} + \frac{d^{m-1} R y_1}{1.2.3\dots(m-1) d\alpha^{m-1}} \dots + y_{v-m} - \frac{A^{m-2} d^{m+1} P}{1.1.2.3\dots m d\alpha^{m+1}} - \frac{A^{m-3} d^{m+2} P}{1.2.1.2.3\dots m d\alpha^{m+2}} \dots - \frac{A d^{2m-1} P}{1.2\dots(m-1)1.2\dots m d\alpha^{m-1}}}{d^m P:(1.2.3\dots m d\alpha^m)}$$

e però farà il termine generale del §. 31, cioè

$$y_x = \left(\frac{\mathfrak{Q} y_0 + R y_1 + S y_2 \dots + y_{v-1}}{dP:d\beta}\right)\beta^x$$

$$+ \left(\frac{\mathfrak{Q} y_0 + R y_1 + S y_2 \dots + y_{v-1}}{dP:d\gamma}\right)\gamma^x$$

$$+ \left(\frac{\mathfrak{Q} y_0 + R y_1 + S y_2 \dots + y_{v-1}}{dP:d\delta}\right)\delta^x + \text{ecc.}$$

$$+\left(\frac{\overset{(A)}{\mathfrak{Q}y_0+Ry_1+Sy_2\ldots+y_{v-1}}}{d^mP:(1.2.3\ldots.md\alpha^m)}\right)\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(m-2))\alpha^{x(m-1)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+\left(\frac{\overset{(A')}{\frac{d\mathfrak{Q}y_0}{d\alpha}+\frac{dRy_1}{d\alpha}+\frac{dSy_2}{d\alpha}\ldots+y_{v-2}-\frac{Ad^{m+1}P}{1.2.3\ldots.md\alpha^{m+1}}}}{d^mP:(1.2.3\ldots.md\alpha^m)}\right)\times$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(m-3))x^{x-(m-2)}}{1.2.3\ldots(m-2)}$$

$$+\left(\frac{\overset{(A'')}{\frac{d^2\mathfrak{Q}y_0}{2d\alpha^2}+\frac{d^2Ry_1}{2d\alpha^2}+\frac{d^2Sy_3}{2d\alpha^2}\ldots+y_{v-3}-\frac{A'd^{m+1}P}{1.1.2.3\ldots md\alpha^{m+1}}-\frac{Ad^{m+2}P}{1.2.1.2.3\ldots md\alpha^{m+2}}}}{d^mP:(1.2.3\ldots md\alpha^m)}\right)\times$$

$$\frac{x(x-1)\ldots(x-(m-4))\alpha^{x-(m-3)}}{1.2.3\ldots(m-3)}+\ldots..$$

$$+\left(\frac{\overset{(A^{m-1})}{\frac{d^{m-1}\mathfrak{Q}y_0}{1.2\ldots(m-1)dx^{m-1}}+\frac{d^{m-1}Ry_1}{1.2\ldots(m-1)d\alpha^{m-1}}+\ldots..y_{v-m}-\frac{A^{m-2}d^{m+1}P}{1.1.2.3\ldots.mdx^{m+1}}-\frac{A^{m-3}d^{m+2}P}{1.2.1.2.3\ldots md\alpha^{m+2}}\ldots..-\frac{Ad^{2m-1}P}{1.2\ldots(m-1)1.2\ldots md\alpha^{2m-1}}}}{d^mP:(1.2.3\ldots md\alpha^m)}\right)\alpha^x.$$

I simboli (A), (A'), (A'') ecc. (A^{m-1}) i quali rappresentan lo stesso che A, A', A'' ecc. hanno per valore le frazioni sottoposte che stan chiuse tra le due parentesi, e ci ricorderemo che in ciascun termine del valore di y_x quelli di $\mathfrak{Q}$, R, S ecc. e de' loro differenziali, siccome dei differen-

ziali di P vanno adattati alle ſoſtituzioni che ſi fanno in vece di z delle radici β, γ, δ ecc. α ed indicate dai moltiplicatori corriſpondenti β^x, γ^x, δ^x ecc., $\alpha^{x-ecc.}$..., α^x.

34. Rieſce ora patentiſſimo in che convengano i valori de' coefficienti b, c, d ecc. A, A', A'' ecc. aſſegnati dal celebre Sig. la *Grange* coi noſtri, e in che diſcordino. Que' che riguardano le radici diſuguali β, γ, δ ecc. e così il primo A che appartiene alle radici α uguali, ſono intieramente conformi. Non così diremo degli altri valori di A', A'', A''' ecc. nel determinare i quali queſto gran Geometra ha ommeſſo tutti i termini, ne' quali entrano le A, A', A''...; A^{m-1}, che aggiunger ſi devono ne' numeratori alla prima parte che contiene y_0, y_1, y_2 ecc., ſenza de' quali termini non ſi ha il valor giuſto delle A', A'' ecc. Rimeſſi pertanto queſti termini, ſi riordina ogni coſa e ſi preſenta con tutta l' accuratezza il termine generale delle ricorrenti che abbiano num.° m di radici eguali α, e coll' iſteſſa facilità ſi eſibirà quello di altre ricorrenti che oltre il num.° m di radici α abbiano num.° n di radici eguali β, num.° p di radici eguali γ ecc., eſſendo qualunque altro numero le radici diſuguali.

35. E' facile il vedere che $\dfrac{d^mP}{1.2.3...md\alpha^m}$ non è altro che il quoto, il quale naſce dalla formola di relazione $z^v + fz^{v-1}$ ecc. diviſa per $(z-\alpha)^m$, ove in eſſo ſoſtituiſcaſi α per z. Quindi chiamato Z queſto quoziente, ſarà $Z = \dfrac{d^mP}{1.2.3...md\alpha^m}$, e paſſando alle differenziazioni colla variabilità di α; $\dfrac{dZ}{d\alpha} = \dfrac{d^{m+1}P}{1.1.2.3...md\alpha^{m+1}}$; $\dfrac{d^2Z}{2d\alpha^2}$ $= \dfrac{d^{m+2}P}{1.2.1.2.3...md\alpha^{m+2}}$ ecc. onde $A = \dfrac{Qy_0 + Ry_1 ... + y_{v-1}}{Z}$;

$$A' = \frac{\frac{dQ}{d\alpha}y_0 + \frac{dR}{d\alpha}y_1 ... + y_{v-2} - \frac{AdZ}{d\alpha}}{Z};$$

$$A'' = \frac{\frac{d^2 Q}{2d\alpha^2}y_0 + \frac{d^2 R}{2d\alpha^2}y_1 \ldots + y_{v-3} - \frac{A' dZ}{d\alpha} - \frac{A d^2 Z}{1.2 d\alpha^2}}{Z} \text{ ecc.}$$

ſino ad

$$A^{m-1} = \frac{\frac{d^{m-1}Q}{1.2\ldots(m-1)d\alpha^{m-1}}y_0 + \frac{d^{m-1}R}{1.2\ldots(m-1)d\alpha^{m-1}}y_1 \ldots + y_{v-m} - \frac{A^{m-2}dZ}{d\alpha} - \frac{A^{m-3}d^2Z}{1.2d\alpha^2} - \frac{A^{m-4}d^3Z}{1.2.3d\alpha^3} \ldots - \frac{Ad^{m-1}Z}{1.2\ldots(m-1)d\alpha^{m-1}}}{Z}.$$

Queſti valori delle A così preſentati ſono più comodi, e fanno ſchivare m differenziazioni di una formola anche più grande di quella che equivale a Z.

36. Adattiamo le teorie ſin qui eſpoſte ad una certa claſſe di ricorrenti, che hanno innanzi al primo termine y_0 tanti termini eguali a zero, quanti ſono i moltiplicatori della ricorrente meno uno, o, eſſendo v il grado della ſerie, tanti termini innanzi al primo nulli quanto è il numero $v-1$. Tal proprietà hanno tutte quelle ſerie, che ſervono per trovare il numero delle maniere, colle quali unendo inſieme un dato numero di termini diverſi della ſerie aritmetica de' numeri naturali o continuata ſenza limite o ſino a un determinato numero, ſi può formare una data ſomma. Ora egli è certo, che, chiamato y_0 il primo termine d'una sì fatta ſerie di grado v, la cui equazione in z ſia $z^v + fz^{v-1} + gz^{v-2} + hz^{v-3} + iz^{v-4} \ldots\ldots + tz + u = 0$, poichè i ſuoi moltiplicatori ſono $-u$, $-t \ldots$, $-i$, $-h$, $-g$, $-f$, e l' appendice de' termini zero è compoſta di num.° di termini $v-1$, mentre i moltiplicatori ſono di num.° v, è certo, diſſi, che ſarà il 2.° termine $y_1 = -fy_0$. In oltre avremo il 3.° termine $y_2 = -fy_1 - gy_0$, cioè $y_2 = (f^2 - g)y_0$. Poi $y_3 = -fy_2 - gy_1 - hy_0$, ovvero $y_3 = (-f^3 + 2fg - h)y_0$ ecc. coſicchè la ſerie diventerà la ſeguente

$(0) \ldots - y_0$, $-fy_0$, $(f^2 - g)y_0$, $(-f^3 + 2fg - h)y_0$,

$(f^4 - 3f^2g +$

$(f^4 - 3f^2g + 2fh + g^2 - i)y_0$, $(-f^5 + 4f^3g - 3f^2h - 3fg^2 + 2fi + 2gh - l)y_0$ ecc.; e questa si potrà continuare finchè si vuole. Dunque, poichè i simboli f, g, h ecc. son quelli, che abbiamo sempre adoperato, se supporremo che nella equazione in z vi siano le radici espresse colle solite specie β, γ, δ ecc., e che b, c, d ecc. significhino i moltiplicatori di β^v, γ^v, δ^v ecc. nel termine generale y_v, non avrem da far altro che sostituire nel valore di $N.b$ del §. 23. in vece di y_1, y_2, y_3 ecc. i corrispondenti valori

$-fy_0$, $(f^2-g)y_0$, $(-f^3+2fg-h)y_0$ ecc. della serie (O), Per tal modo si ha

$$N.b = y_0 \left\{ \begin{array}{r} \beta^{v-1} + f\beta^{v-2} + g\beta^{v-3} + h\beta^{v-4} + i\beta^{v-5} \text{ ecc.} \\ -f\beta^{v-2} - g\beta^{v-3} - h\beta^{v-4} - i\beta^{v-5} \text{ ecc.} \\ -f^2\beta^{v-3} - fg\beta^{v-4} - fh\beta^{v-5} \text{ ecc.} \\ +f^2\beta^{v-3} - fg\beta^{v-4} - fh\beta^{v-5} \text{ ecc.} \\ +2fg\beta^{v-4} + 2fh\beta^{v-5} \text{ ecc.} \\ +f^3\beta^{v-4} + f^2g\beta^{v-5} \text{ ecc.} \\ -f^3\beta^{v-4} + 2f^2g\beta^{v-5} \text{ ecc.} \\ -3f^2g\beta^{v-5} \text{ ecc.} \\ -g^2\beta^{v-5} \text{ ecc.} \\ +g^2\beta^{v-5} \text{ ecc.} \end{array} \right\}$$

ove si vede, che fuor del primo β^{v-1} tutti gli altri termini si distruggono, onde abbiamo con espressione semplicissima $N.b = \beta^{v-1}y_0$, e per la stessa ragione $N.c = \gamma^{v-1}y_0$; $N.d = \delta^{v-1}y_0$ ecc. Ponghiamo ancora che vi siano più radici eguali α nell'equazione in z, ed A, A', A' ecc. significhino lo stesso che negli esempj antecedenti. A buon conto avremo $N.A = \alpha^{v-1}y_0$. Per gli altri poi ricorreremo all' espressione generica di $N.A^{m-1}$ de' §. 31., 35., nella quale, dopo aver fatto per brevità $\frac{(v-1)(v-2)\ldots(v-(m-1))}{1.2.3\ldots(m-1)} = \omega$; $\frac{(v-2)(v-3)\ldots(v-m)}{1.2.3\ldots(m-1)} = \omega'$, e così ai susseguenti surrogati ω'', ω''' ecc., sostituiremo in vece di y_1, y_2, y_3 ecc. i corrispondenti valori della serie (O), e nascerà

$$N.A^{m-2} = \left\{ \begin{array}{r} \omega\alpha^{v-m} + \omega' f\alpha^{v-(m+1)} + \omega'' g\alpha^{v-(m+2)} \text{ ecc.} \\ - \omega' f\alpha^{v-(m+1)} - \omega'' g\alpha^{v-(m+2)} \text{ ecc.} \\ - \omega'' f^2\alpha^{v-(m+2)} \text{ ecc.} \\ + \omega'' f^2\alpha^{v-(m+2)} \text{ ecc.} \end{array} \right\} y_\circ$$

$$- \frac{A^{m-2}dZ}{1.d\alpha} - \frac{A^{m-3}d^2Z}{1.2d\alpha^2} \text{ ecc.}$$

Da questo calcolo pure rilevasi che s' annullano i termini delle podestà di α eccetto il primo $\omega\alpha^{v-m}y_\circ$. Onde, rimesso il valore di ω,

$$N.A^{m-2} = \frac{(v-1)(v-2)(v-3)\ldots(v-(m-1))\alpha^{v-m}}{1.2.3\ldots(m-1)} y_\circ$$

$$- \frac{A^{m-2}dZ}{1.d\alpha} - \frac{A^{m-3}d^2Z}{1.2d\alpha^2} \ldots \frac{-Ad^{m-1}Z}{1.2\ldots(m-1)d\alpha^{m-1}}$$

che dà tutti i valori di $N.A'$, $N.A''$, $N.A'''$ ecc., secondo le ipotesi di $m = 2, 3, 4$, ecc. Per la qual cosa il termine generale di questa serie sarebbe

$$y_x = \frac{\beta^{v-1}y_\circ\beta^x}{dP:d\beta} + \frac{\gamma^{v-1}y_\circ\gamma^x}{dP:d\gamma} + \frac{\delta^{v-1}y_\circ\delta^x}{dP:d\delta} + \text{ecc.}$$

$$+ \left(\frac{\alpha^{v-1}y_\circ}{Z}\right) \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(m-2))\alpha^{x-(m-1)}}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$+ \left(\frac{(v-1)\alpha^{v-2}y_\circ}{1.Z} - \frac{dZ}{Zd\alpha}\left(\frac{\alpha^{v-1}y_\circ}{Z}\right)\right) \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(m-3))\alpha^{x-(m-2)}}{1.2.3\ldots(m-2)}$$

$$+ \left(\frac{(v-1)(v-2)\alpha^{v-3}y_\circ}{1.2Z} - \frac{dZ}{Zd\alpha}\left(\frac{(v-1)\alpha^{v-2}y_\circ}{1.Z} - \frac{dZ}{Zd\alpha}\left(\frac{\alpha^{v-1}y_\circ}{Z}\right)\right)\right.$$

$$\left. - \frac{d^2Z}{1.2Zd\alpha^2}\left(\frac{\alpha^{v-1}y_\circ}{Z}\right)\right) \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(m-4))\alpha^{x-(m-2)}}{1.2.3\ldots(m-3)} + \text{ecc.}$$

sino al termine che viene moltiplicato per α^x.

37. Pongasi per esempio numerico la ricorrente dell'equazione $(z-1)(z^2-1)(z^3-1)(z^4-1)(z^5-1) = 0$. Questa, siccome è stato da me dimostrato nel Prodromo dell' Enciclopedia Italiana e poi nel num.° XI. dell' Antologia Romana per l' anno 1784, appartiene alla serie che esprime il numero de' modi, onde con 5 termini diversi della serie de' numeri naturali continuata senza limite si può formare

qualunque delle possibili somme. Presento la suddetta equazione in questo aspetto equivalente;

$(z-1)^5 (z+1)^2 (z^2+z+1)(z^2+1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$, e noto che le 4 radici dell'ultimo fattore sono le 4 immaginarie dell' unità elevata alla podestà 5.^{a}; le due del penultimo sono le due immaginarie dell' unità biquadrata; finalmente le due dell' antipenultimo sono le due immaginarie dell'unità cuba. Chiamo pertanto le 4 prime $\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma'''$; le seguenti δ, δ', le 2 altre ε, ε', e denominate β le 2 eguali che nascono dalla formola $(z+1)^2$, faccio α le cinque eguali del fattore $(z-1)^5$. Oltracciò nel termine generale y_x di questa serie siano c, c', c'', c''' i coefficienti di γ^x, γ'^x, γ''^x, γ'''^x, d, d' quelli che moltiplicano i termini δ^x, δ'^x, indi e, e' quei che moltiplicano ε^x, ε'^x. Appresso faccio β' quel che moltiplica β^x, e B quel che moltiplica $x\beta^{x-1}$; finalmente A'''', A''', A'', A', A i coefficienti di α^x, $x\alpha^{x-1}$, $\frac{x(x-1)x^{x-2}}{2}$, $\frac{x(x-1)(x-2)\alpha^{x-3}}{2.3}$, $\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)\alpha^{x-4}}{2.3.4}$; e la forma del termine generale sarà la seguente;

$$y_x = c\gamma^x + c'\gamma'^x + c''\gamma''^x + c'''\gamma'''^x + d\delta^x + d'\delta'^x + e\varepsilon^x + e'\varepsilon'^x$$
$$+ Bx\beta^{x-1} + B'\beta^x + \frac{Ax(x-1)(x-2)(x-3)\alpha^{x-4}}{2.3.4}$$
$$+ \frac{A'x(x-1)(x-2)\alpha^{x-3}}{2.3} + \frac{A''x(x-1)\alpha^{x-2}}{2} + A'''x\alpha^{x-1} + A''''\alpha^x.$$

Il grado della serie è il 15^{esimo}, il che dà $v=15$; ed essendo essa una di quelle che hanno $v-1$, cioè 14 termini eguali a zero innanzi al primo y_0 che è 1, le competerà tutto ciò che abbiam detto nel §. precedente. Comincio dunque dal chiamar P la formola in z, e colle attuali moltiplicazioni de' fattori polinomj trovo

$P = z^{15} - z^{14} - z^{13} + z^{10} + z^9 + z^8 - z^7 - z^6 - z^5 + z^2 + z - 1$, e

$\frac{dP}{dz} = 15z^{14} - 14z^{13} - 13z^{12} + 10z^9 + 9z^8 + 8z^7 - 7z^6 - 6z^5 - 5z^4 + 2z + 1 \ldots (P)$, ove colla sostituzione di γ

a z risulta $\frac{dP}{d\gamma} = 15\gamma^{14} - 14\gamma^{13} - 13\gamma^{12} + 10\gamma^{9} + 9\gamma^{8} + 8\gamma^{7} - 7\gamma^{6} - 6\gamma^{5} - 5\gamma^{4} + 2\gamma + 1$, che sarà il denominatore di c. Ma questo denominatore si può ridurre a maggiore semplicità, se si riflette che essendo γ una delle radici dell' unità alzata al 5.° grado, sarà $\gamma^5 = 1$, e $\gamma^4 + \gamma^3 + \gamma^2 + \gamma + 1 = 0$. E però sostituendo 1 in vece di γ^5 e di γ^{10}; $\frac{dP}{d\gamma} = 15\gamma^4 - 14\gamma^3 - 13\gamma^2 + 10\gamma^4 + 9\gamma^3 + 8\gamma^2 - 7\gamma - 6 - 5\gamma^4 + 2\gamma + 1$, ossia coll' union degli omologhi; $\frac{dP}{d\gamma} = 5(4\gamma^4 - \gamma^3 - \gamma^2 - \gamma - 1) = 25\gamma^4$. Avremo medesimamente $\frac{dP}{d\gamma'} = 25\gamma'^4$; $\frac{dP}{d\gamma''} = 25\gamma''^4$; $\frac{dP}{d\gamma'''} = 25\gamma'''^4$. Il numeratore poi di c debb' essere (§. 36.) $\gamma^{v-1} y_0 = \gamma^{14}$, perchè $y_0 = 1$, $v = 15$. Dunque $c = \frac{\gamma^{14}}{25\gamma^4} = \frac{\gamma^{10}}{25} = \frac{1}{25}$, e tal valore avranno ancora c', c'', c''' cosicchè i primi 4 termini di y_x diventano $\frac{1}{25}(\gamma^x + \gamma'^x + \gamma''^x + \gamma'''^x)$. Per avere il valore di d deesi in (P) por δ in vece di z, che somministra $\frac{dP}{d\delta} = 15\delta^{14} - 14\delta^{13} - 13\delta^{12} + 10\delta^9 + 9\delta^8 + 8\delta^7 - 7\delta^6 - 6\delta^5 - 5\delta^4 + 2\delta + 1$; e questo è il denominatore di d, che si riduce al semplice colle necessarie equazioni $\delta^4 = 1$, $\delta^2 + 1 = 0$, essendo δ una radice dell' unità biquadrata. In vigor della prima nasce $\frac{dP}{d\delta} = 8(\delta^3 + \delta^2 - \delta - 1) = 8(\delta + 1)(\delta^2 - 1)$, ovvero, siccome la seconda dà $\delta^2 = -1$; $\frac{dP}{d\delta} = -16(\delta + 1)$. Ma il numeratore di d è $\delta^{v-1} y_0 = \delta^{14} = \delta^2 = -1$; Dunque $d = \frac{1}{16(\delta + 1)} = \frac{\delta - 1}{16(\delta^2 + 1)} = \frac{-(\delta - 1)}{32}$; e per la stessa ragione essendo $d' = \frac{-(\delta' - 1)}{32}$, il 5.° e il 6.° termine di y_x si esprimeranno colle formole

$\frac{1}{32}(\delta^x + \delta'^x) - \frac{1}{32}(\delta^{x+1} + \delta'^{x+1})$. Così si ha

$\frac{dP}{d\varepsilon} = 15\varepsilon^{14} - 14\varepsilon^{13} - 13\varepsilon^{12} + 10\varepsilon^9 + 9\varepsilon^8 + 8\varepsilon^7 - 7\varepsilon^6 - 6\varepsilon^5$ $- 5\varepsilon^4 + 2\varepsilon + 1$; e appartenendo ε all' unità cuba, varranno le equazioni $\varepsilon^3 = 1$; $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Onde

$\frac{dP}{d\varepsilon} = 15\varepsilon^2 - 14\varepsilon - 13 + 10 + 9\varepsilon^2 + 8\varepsilon - 7 - 6\varepsilon^2 - 5\varepsilon$ $+ 2\varepsilon + 1 = 9(2\varepsilon^2 - \varepsilon - 1) = 27\varepsilon^2$, che è il denominatore di e, il quale ha per numeratore $\varepsilon^{14} = \varepsilon^2$; e quindi

$e = \frac{\varepsilon^2}{27\varepsilon^2} = \frac{1}{27}$, al qual valore sarà anche eguale e'. Quindi

il 7.° e l' 8.° termine di y_x diventano $\frac{1}{27}(\varepsilon^x + \varepsilon'^x)$.

38. Esauriti i termini delle radici disuguali ci si presentano quelli delle radici eguali, pei quali fa duopo determinare B, B', che riguardano le 2 radici eguali β, e gli altri simboli A, A' ecc. che spettano alle 5 radici eguali α. Quanto ai primi B, B' ci ricorderem della regola del §. 35., la quale ci comanda di togliere dall' equazione in z il prodotto dei fattori eguali che contengono le radici β e di por nel quoziente β in vece di z. Con ciò abbiamo il denominatore comune de' due simboli B, B' che è

$= (\beta - 1)^5 (\beta^2 + \beta + 1)(\beta^2 + 1)(\beta^4 + \beta^3 + \beta^2 + \beta + 1)$

$= \beta^{13} - 3\beta^{12} + 4\beta^{11} - 5\beta^{10} + 6\beta^9 - 6\beta^8 + 7\beta^7 - 7\beta^6 + 6\beta^5$ $- 6\beta^4 + 5\beta^3 - 4\beta^2 + 3\beta - 1$, che chiamo Z^1, onde

$\frac{dZ^1}{d\beta} = 13\beta^{12} - 36\beta^{11} + 44\beta^{10} - 50\beta^9 + 54\beta^8 - 48\beta^7 + 49\beta^6$ $- 42\beta^5 + 30\beta^4 - 24\beta^3 + 15\beta^2 - 8\beta + 3$. Ma $\beta = -1$. Dunque $Z^1 = -64$; $\frac{dZ^1}{d\beta} = 416$. Ora pel §. 36 adattando il valore generale di $N.A^{n-1}$ e di A al nostro caso col fare

$A = B$, $m = 2$, ritroveremo $B = \frac{\beta^{v-1}y_0}{Z^1} = \frac{\beta^{14}}{-64} = \frac{-1}{64}$; ed es-

fendo $B'=\frac{(v-1)\beta^{v-2}y_0}{Z^1}-\frac{BdZ^1}{Z^1 d\beta}$, rifulterà $B'=\frac{14\beta^{13}}{-64}$ $+\frac{416}{-64.64}=\frac{14}{64}-\frac{416}{64.64}=\frac{15}{128}$. Sicchè il 10° e l' 11° termine di y_x fi fanno $-\frac{x(-1)^{x-1}}{64}+\frac{15(-1)^x}{128}$, offia $\frac{(2x+15)(-1)^x}{128}$.

39. Reftano i 5 termini che fi riferifcono alla radice $\alpha=1$, per cui bifogna trovare i 5 coefficienti A, A', A'', A''', A''''. Cominciamo dal denominatore comune, che è il quoto dell' equazione in z divifa per $(z-1)^5$, ove in effo quoto facciafi $z=\alpha$. Chiamando Z quefto quoziente farà

$$Z=(\alpha+1)^2(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha^2+1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)$$
$$=\alpha^{10}+4\alpha^9+9\alpha^8+15\alpha^7+20\alpha^6+22\alpha^5+20\alpha^4+15\alpha^3$$
$$+9\alpha^2+4\alpha+1=120.$$ Onde fi deduce

$$\frac{dZ}{d\alpha}=10\alpha^9+36\alpha^8+72\alpha^7+105\alpha^6+120\alpha^5+110\alpha^4+80\alpha^3$$
$$+45\alpha^2+18\alpha+4=600$$
$$\frac{d^2Z}{2d\alpha^2}=45\alpha^8+144\alpha^7+252\alpha^6+315\alpha^5+300\alpha^4+220\alpha^3$$
$$+120\alpha^2+45\alpha+9=1450$$
$$\frac{d^3Z}{2.3d\alpha^3}=120\alpha^7+336\alpha^6+504\alpha^5+525\alpha^4+400\alpha^3+220\alpha^2$$
$$+80\alpha+15=2200$$
$$\frac{d^4Z}{2.3.4d\alpha^4}=210\alpha^6+504\alpha^5+630\alpha^4+525\alpha^3+300\alpha^2$$
$$+110\alpha+20=2299.$$

Riaffunto adeffo il valore generale di $N.A^{m-1}$ e di A (§. 36) col fare fucceffivamente $m=2, 3, 4, 5$, troveremo

$A=\frac{1}{120}$, $A'=\frac{9}{120}$, $A''=\frac{4070}{120.120}$, $A'''=\frac{8080}{120.120}$;

$A''''=\frac{1013020}{120.120.120}$; e però introducendo tutti quefti valori

nel termine generale della nostra serie, avrem finalmente

$$y_x = \frac{\gamma^x + \gamma'^x + \gamma''^x + \gamma'''^x}{25} + \frac{\delta^x + \delta'^x}{32} - \frac{(\delta^{x+1} + \delta'^{x+2})}{32} + \frac{\varepsilon^x + \varepsilon'^x}{27}$$

$$+ \frac{(2x+15)(-1)^x}{128} + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{120.1.2.3.4} + \frac{9x(x-1)(x-2)}{120.1.2.3}$$

$$+ \frac{407x(x-1)}{12.120.1.2} + \frac{101x}{180} + \frac{50651}{6.120.120} \ldots\ldots (\mathfrak{Q})$$

40. In questo termine generale potrebbe imbarazzare il non sapere cosa diventino i primi dieci termini, quando x assume i valori di 1, 2, 3, 4 ecc. Ma riflettendo, che i primi 4 termini, e così le 3 coppie susseguenti non contengono altro che le somme delle radici, de' loro quadrati, cubi ecc. dell' unità potenziata, si vede a un tratto, che ci trarrem facilmente d' intrico col noto teorema, con cui si esibiscono queste somme per mezzo de' coefficienti i quali moltiplicano i termini dell' equazione composta delle medesime radici. Il teorema è questo. Sia $z^n + Az^{n-1} + Bz^{n-2} + Cz^{n-3} + Dz^{n-4} \ldots + V = 0$, e le radici di questa equazione, $\pi, \pi', \pi'' \ldots \pi^{n-1}$. Chiamisi la loro somma $\pi + \pi' + \pi'' \ldots + \pi^{n-1} = r$; la somma de' loro quadrati $= r'$; quella de' loro cubi $= r''$; e in genere la somma delle podestà k delle medesime radici $= r^{k-1}$. Dimostrano gli Analisti essere $r = -A$; $r' = -Ar - 2B$; $r'' = -Ar' - Br - 3C$; $r''' = -Ar'' - Br' - Cr - 4D$, e generalmente $r^{k-1} = -Ar^{k-2} - Br^{k-3} - Cr^{k-4} - Dr^{k-5} \ldots - kX$, chiamato X quel coefficiente che nell' equazione $z^n + Az^{n-1}$ ecc. è al termine di posto $k+1$ Ciò premesso, vogliasi *v.g* sapere cosa diventano i primi 4 termini in $(\mathfrak{Q})$ quando $x = 1$. Poichè ad essi compete 'l equazione $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, saranno A, B, C, D eguali all' unità positiva, e di più π, π' ecc. eguali a γ, γ' ecc. Dunque perchè $r = -A$, avremo $\gamma + \gamma' + \gamma'' + \gamma''' = -1 = r$. Fatto $x = 2$, i suddetti primi 4 termini vengono espressi da $r' = -Ar - 2B$, che colle sostituzioni si cangia in $r' = -1$. Così troveremo $r'' = -1$; $r''' = -1$. Volendo poi la somma delle quinte podestà delle radici, nel valore dj r^{k-1} si fa $k = 5$, e il termine $-kX$ sarebbe il 6.° della data equazione. Ma questa

non ne ha che cinque. Dunque questo termine e in conseguenza $X = 0$. Sarà pertanto $r'''' = -Ar''' - Br'' - Cr' - Dr = -r''' - r'' - r' - r = 4$; il che confronta con ciò che porta la natura medesima delle radici γ, γ', γ'', γ''', che son le 4 radici immaginarie dell'unità quadrato-cuba, onde debb' essere $\gamma^5 = 1$, $\gamma'^5 = 1$, $\gamma''^5 = 1$, $\gamma'''^5 = 1$. Fatto $x = 5$, la somma delle seste podestà di γ, γ' ecc. si fa eguale alla somma delle stesse radici, cioè $= -1$. Così la somma delle settime podestà sarà lo stesso che la somma de' quadrati ecc., onde sarà chiaro qual debba essere il valore di queste somme, qualunque sia x. Lo stesso discorso faremo pei termini $\frac{\varepsilon^x + \varepsilon'^x}{27}$, ai quali compete l' equazione $z^2 + z + 1 = 0$; ove fatto $x = 1$, e $x = 2$, ci risulterà $\varepsilon + \varepsilon' = -1$; $\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 = -1$. Ma perchè $z^2 + z + 1$ contiene le 2 radici immaginarie dell' unità cuba, se faremo $x = 3$, sarà $\varepsilon^3 + \varepsilon'^3 = 2$; e quindi $\varepsilon^4 + \varepsilon'^4 = \varepsilon + \varepsilon' = -1$; $\varepsilon^5 + \varepsilon'^5 = \varepsilon^2 + \varepsilon'^2 = -1$; $\varepsilon^6 + \varepsilon'^6 = 2$ ecc. Le due coppie de' termini, che in y_x contengono le radici δ, δ' che sono le 2 immaginarie dell' unità biquadrata, deonsi riferire all' equazione $z^2 + 1 = 0$, la quale, perchè manca il 2.° termine, fa essere nella generale $A = 0$, $B = 1$. Quindi r ossia $\delta + \delta' = 0$, il che nasce, quando $x = 1$, nella prima delle 2 coppie. In oltre fatto $x = 2$, diventa $r' = -2B$, cioè $\delta^2 + \delta'^2 = -2$. E se $x = 3$, abbiamo $\delta^3 + \delta'^3$ ossia $r'' = -Br - 3C$. Ma C è nullo, perchè dovrebbe trovarsi questo coefficiente al 4.° termine dell' equazione $z^2 + * + 1 = 0$, il qual manca, e di più r, ovvero $\delta + \delta' = 0$. Dunque $\delta^3 + \delta'^3 = 0$. Finalmente è chiaro che se facciamo $x = 4$, sarà $\delta^4 + \delta'^4 = 2$, e così saran noti $\delta^5 + \delta'^5$; $\delta^6 + \delta'^6$, ecc. per qualunque ipotesi di x, senza che vi sia bisogno nè per la somma delle potenze di queste radici nè per quella delle potenze delle precedenti, di trovare prima il valore di ciascuna delle stesse radici colle risoluzioni algebraiche; il che riuscirebbe molto operoso, e ne' gradi alti di impresa assai malagevole, e fors' anche disperata.

41. Il termine generale y_x del §. 39. dà realmente il numero delle maniere, colle quali si può formare una data somma prendendo 5 diversi termini nella serie aritmetica de' numeri

meri naturali; ma però essa deesi considerare continuata senza limite, perchè se la serie non arrivasse che a un certo termine m entrerebbero in campo altre serie, le quali combinate con quella del suddetto termine generale servirebbero ad esibire i veri numeri delle maniere cercate, che non si ottengon sempre colla prima sola. Nel Prodromo dell'Enciclopedia Italiana, e poi con maggiore esattezza nel num.° XI dell' Antología Romana per l' anno 1784 esamino l' indole di queste nuove serie, determino i loro punti d' ingresso, e ne stabilisco l' uso, qualunque sia il num.° de' diversi termini dell' aritmetica che si prendono in somma. Quando i termini son cinque, la prima nuova serie che chiamo di sottrazione ha il termine generale della seguente forma

$$\frac{\delta^{x'}+\delta'^{x'}}{32}-\frac{(\delta^{x'+1}+\delta'^{x'+1})}{32}-\frac{(\varepsilon^{x'+1}+\varepsilon'^{x'+1})}{27}+\frac{(2x'+11)(-1)^{x'}}{128}$$
$$+\frac{x'(x'-1)(x'-2)(x'-3)}{24.1.2.3.4}+\frac{7x'(x'-1)(x'-2)}{24.1.2.3}+\frac{239x'(x'-1)}{288.1.2}$$
$$+\frac{19x'}{16}+\frac{2815}{3456}.$$

La x' comincia ad avere il valor zero, quando nel termine generale y_x si fa $x=m-4$, cui corrisponde la somma $m+11$; e quindi diventa $x'=x+4-m$, essendo δ, δ', ε, ε' in questa lo stesso che nella prima serie. Ma questa serie, i cui termini dal punto del suo ingresso van sottratti da quelli che nella prima lor corrispondono, non basta, perchè quando $x=2m-7$ subentra alle 2 precedenti una 3.ª serie di addizione, il cui termine generale è

$$\frac{\varepsilon^{x''}+\varepsilon'^{x''}}{27}+\frac{(2x''+9)(-1)^{x''}}{64}+\frac{x''(x''-1)(x''-2)(x''-3)}{12.1.2.3.4}$$
$$+\frac{x''(x''-1)(x''-2)}{2.1.2.3}+\frac{173x''(x''-1)}{144.1.2}+\frac{205x''}{144}+\frac{1357}{1728}.$$

In esso ε, ε' significano lo stesso che negli altri, e $x''=x+7-2m$, che principiando dal valor zero fa aggiungere il primo termine che risulta da questa ipotesi alla differenza de' correspettivi termini nelle altre due serie. Per esempio, coi 90 numeri del Lotto di Roma si cerca in quan-

te maniere cinque di essi numeri estratti possano far la somma 227, che è una delle due di massimo numero di combinazioni. In questa supposizione (num. cit. Antol.) diventa $x=212$, $x'=126$, $x''=39$. Posti pertanto questi valori ne' tre termini generali sopra notati, risultano i numeri 805563 $-518672+12369$, vale a dire in 299260 maniere diverse si può fare con 5 numeri dei 90 la somma 227.

APPENDICE

Sul Problema del trovar le maniere, colle quali si può formare una data somma prendendo un dato numero di termini diversi nella serie de' numeri naturali continuata fino a un dato termine.

1. Il celebre nostro Collega Sig. *Paoli* nella sua Memoria che sta inserita nel 2.° Tomo della Società Italiana, dopo avere adattato le nuove teorie de' gran Geometri i Sigg. *la Place e la Grange* sul calcolo delle differenze finite ad alcuni problemi spettanti alla partizione de' numeri, scioglie anche quello di trovare il num.° delle maniere per formare una somma data col prendere in una serie aritmetica un dato numero di diversi termini. Ma egli nello stesso tempo suppone che la serie aritmetica sia protratta all' infinito, e lascia intatto il problema modificato al caso che la serie sia limitata. Nell' ipotesi trattata dal Sig. *Paoli* unica è la legge della serie che presenta le ricercate maniere, laddove nell' altra del limite viene essa dopo alcuni termini turbata dalla necessità d' introdur nuove serie, senza le quali non si soddisferebbe pienamente al quesito. Avendo io pertanto versato più d' una volta su questo argomento, ho voluto avere il piacere di trattarlo nuovamente in quest' Appendice col calcolo delle differenze finite, che mi ha guidato ad esibire con una sola forma di termine generale tutti i termini generali che appartengono alle diverse serie necessarie per la soluzion del problema.

2. A questo fine chiamato x il num.° de' termini, che nella serie de' numeri naturali $(A)\ldots\ 1, 2, 3, 4, 5\ldots$ p, $p+1$, $p+2$, $p+3$ ecc. si voglion prendere in somma,

ſuppongo note le ſerie de' modi per formare con x diverſi termini di (A) qualunque ſomma fattibile, ov' eſſa foſſe ſenza limite continuata. Io dimoſtro la generazione di queſte ſerie nel Prodromo dell' Enciclopedia Italiana e poi al Num.° XI. dell' Antologia Romana per l' anno 1784 diſcopro in eſſe una proprietà che mi rende facile la loro protrazione fino a quel termine che mi aggrada. Ecco in che eſſa conſiſte. Sottopongo l' una all' altra di queſte ſerie per ordine ſecondo le diverſe ipoteſi di x.

Serie generali delle maniere

$x=1$	1.ª	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1	ecc.	... (B)
$x=2$	2.ª	1,	1,	2,	2,	3,	3,	4,	4,	5,	5	ecc.	... (C)
$x=3$	3.ª	1,	1,	2,	3,	4,	5,	7,	8,	10,	12	ecc.	... (D)
$x=4$	4.ª	1,	1,	2,	3,	5,	6,	9,	11,	15,	18	ecc.	... (E)
$x=5$	5.ª	1,	1,	2,	3,	5,	7,	10,	13,	18,	23	ecc.	... (F)
ecc.	ecc.												

ed oſſervo, che ſe ſcrivo la prima diſteſamente e dopo i due primi termini metto ſotto la ſteſſa ſerie, e poi replico l' operazione dopo altri due della 2.ª fila e così dopo altri due della 3.ª ecc. come nello ſchema che qui preſento

```
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 ecc.
      1, 1, 1, 1, 1, 1
            1, 1, 1, 1 ....(C)
                  1, 1
                  ecc.
```

indi faccio la ſomma delle colonne verticali che riſultano, naſce la ſerie 1, 1, 2, 2 ecc.....(C) che compete all' ipoteſi di $x=2$. All' iſteſſo modo operando ſulla ſerie (C) ma col replicare la medeſima ſerie dopo 3 in 3 termini, come nell' anneſſa figura

```
1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5 ecc.
         1, 1, 2, 2, 3, 3, 4....(D)
                  1, 1, 2, 2
                           1
                          ecc.
```

e poi ſommate le colonne verticali ſi ottiene la ſerie (D) dell' ipoteſi $x=3$. Così la ſerie (D) replicata ſimilmente,

ma dopo 4 in 4 termini e prese le somme, dà origine alla serie (*E*);

1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12 ecc.
1, 1, 2, 3, 4, 5
1, 1
ecc.

E fatta una configurazione somigliante della serie (*E*) cogl' intervalli di 5 termini, si avrà sommando le colonne la serie (*F*) ecc. Onde in generale trovata la serie che corrisponde all' ipotesi di $x - 1$, si avrà quella che corrisponde alla susseguente di x, se alla precedente si faranno le sottoposizioni della stessa serie ma cogl' intervalli di x termini, siccome è chiaro.

3. Da questa proprietà ne emana un' altra che agevola anche più la formazione di tali serie; ed è stata essa avvertita dal Sig. *Paoli* nella Memoria citata. Osservo per esempio il 10.^mo^ termine di (*E*) che è 18, e nasce nello schema (*E*) dalla somma di 12, 5, 1. Ora il 12 è il termine che nella precedente (*D*) si trova allo stesso posto che è il 18 in (*E*). Vengono poi gli altri due numeri 5, 1, i quali nello stesso (*E*) li trovo collocati al posto che è indietro di 4 termini dal decimo nella medesima figura (*E*). Così il 9.° termine di (*E*) composto di 10, 4, 1 vien formato da 10 che è il 9.° in (*D*) e da 4, 1 che è il 5.° in (*E*) cioè anteriore di 4 termini al 9.°; la qual regola vale per tutti gli altri. Se esaminiamo poi ciò che accade alla fig. (*D*) e prendiamo v. g. il 10.° termine, esso si compone di 5, 4, 2, 1 cioè di 5 che è il 10.° della anterior serie (*C*) e di 4, 2, 1 che si presentano 3 termini innanzi al 10.° nella stessa (*D*); il che si verificherà ancora per qualunque altro termine che si assuma. Parimente nello schema (*C*) oltre il termine egualmente situato in (*B*) converrà prender quello che precede di due il posto del primo. Onde potremo stabilire il canone, che nella serie competente al num.° indefinito x, qualunque termine sarà eguale al termine che nella stessa serie è distante x termini dal ricercato, con di più il termine di egual posto a quel che si vuole, preso nella serie che spetta alla presente ipotesi di $x - 1$. Quindi, chiamato t il num.° de' termini, e coi nuovi simboli del Sig. *la Pla-*

ce, facendo che $Z^{(t,x)}$ rappreſenti il termine che ſi cerca nella ſerie ſpettante a x, valerà l' equazione $Z^{(t,x)} = Z^{(t-x,x)} + Z^{(t,x-1)} \ldots\ldots (a)$. E' aſſai ingegnoſo il raziocinio di cui fa uſo il Sig. *Paoli* per trarre dall' indole del problema queſta equazione, la quale egli integra col calcolo delle differenze finite accomodato al caſo che t varj con differenza variabile x, e da cui riſultano le notate ſerie (B), (C), (D) ecc., per la dimoſtrazione delle quali, ſenza andare in traccia del Prodromo, ſarà bene leggere la ſua bella Memoria, che abbiamo teſtè mentovata.

4. Ma veniamo al caſo del noſtro problema. Nella ſerie aritmetica (A) è facile il vedere; 1.°, che prendendoſi in eſſa x termini diverſi, la ſomma minima delle fattibili debb' eſſere $1 + 2 + 3 + 4 \ldots\ldots + x$, cioè $\frac{x(x+1)}{2}$, e la ſomma maſſima; $p + p - 1 + p - 2 + p - 3 \ldots + p - (x-1) = px - \frac{x(x-1)}{2}$, quando (A) debba terminare in p: 2.° che per natura del problema le maniere di formar le ſomme principiando dalla minima e ſalendo ſino ad una certa ſomma media S, ſaranno eguali di numero alle maniere per formar le ſomme principiando dalla maſſima e diſcendendo ſino alla ſteſſa S. Per la qual coſa avremo egual numero di termini nella ſerie delle maniere di qua e di là da quello che corriſponde a queſta ſomma S, il valor de' quali ſarà lo ſteſſo ne' poſti egualmente diſtanti dal medio nominato; e queſto medio eſibirà il maſſimo numero di queſte maniere: 3°. che eſſendo la ſerie delle ſomme una ſerie aritmetica limitata, e trovandoſi S in mezzo a queſta ſerie, ſarà S un medio aritmetico tra la ſomma minima $\frac{x(x+1)}{2}$ e la maſſima $px - \frac{x(x-1)}{2}$, cioè $S = \frac{x(p+1)}{2}$, dove, ſe $x(p+1)$ ſarà num.° diſpari, non potendo aver luogo la ſomma fratta che riſulta da tale ipoteſi, due ſaranno i termini eguali di maſſimo num.° di maniere, de' quali il primo, che termina la parte aſcendente della ſerie, appartiene alla ſomma

$\frac{px+x-1}{2}$; l' altro, che comincia la diſcendente, appartiene alla ſomma che ſegue $\frac{px+x+1}{2}$; e queſte ſomme ſono neceſſariamente numeri interi: 4.° che eſprimendoſi la ſomma minima dalla formola $\frac{x(x+1)}{2}$, ſe s rappreſenterà qualunque delle ſomme fattibili, e t il poſto de' termini o nella ſerie delle ſomme o in quella delle maniere, ſi avrà generalmente $t = s + 1 - \frac{x^2 - x}{2}$, onde il poſto del termine pel num.° maſſimo di maniere ſarà dato da queſta equazione $t = 1 + \frac{px - x^2}{2}$.

5. Premeſſe tutte queſte coſe, ſi ripigli in mano la ſerie (A); $1, 2, 3, 4, 5 \ldots p, p+1, p+2, p+3$ ecc. e ſi ragioni così. Le ſerie (B), (C), (D) ecc. proſeguirebbero ſempre colla lor légge, ſe non ſi voleſſe porre alcun limite ai termini di (A); ma facendo p il ſuo limite, tutte le maniere di formar le ſomme nella ſerie (A) ſenza confine, che naſcono dal combinare i termini $p+1$, $p+2$, ecc. cogli altri eſiſtenti nella ſerie che va ſino a p, dovranno eſſer tolte dai numeri eſpreſſi ne' termini corriſpondenti delle ſerie (B), (C) ecc.; il che verrà a formare una ſerie di ſottrazione che unita all' altre darà il vero numero delle maniere che eſige il problema. Ora è paleſe, che la legge delle ſuddette ſerie (B) ecc. reſta invariata dalla ſomma minima $\frac{x(x+1)}{2}$ ſino alla ſomma

$p + 1 + 2 + 3 \ldots + (x-1) = p + \frac{x^2 - x}{2}$ la quale non ſi può formare con x termini coſicchè ſia un d' eſſi maggior di p. Ma a queſta ſuccede l' altra $p + 1 + \frac{x^2 - x}{2}$, che oltre le maniere abbracciate dalla ſerie ſino a p potrebbe anch' eſſer formata dal termine $p+1$, che manca, combinato con

$1, 2, 3 \ldots\ldots x - 1$. Dunque questa maniera va sottratta dal termine analogo alla somma $p + 1 + \frac{x^2 - x}{2}$ nelle serie (B) ecc.; ed ecco l' ingresso della serie di sottrazione il cui primo termine è 1, la quale comincia ad aver luogo, quando nelle suddette serie (B), (C) ecc. sia l' indice dei termini $t = p + 2 - x$.

6. La somma che le vien dietro è $p + 2 + \frac{x^2 - x}{2}$, la quale oltre il numero di maniere compreso da' termini della serie limitata (A) potrebbe prodursi eziandio da $p + 2$ combinato con $1 + 2 + 3 \ldots + x - 1$, e da $p + 1$ combinato con $1 + 2 + 3 \ldots + x - 2 + x$, ossia combinato con $1 + 2 + 3 \ldots + x - (x - 1)$ che è lo stesso. Siccome però questi due modi per ragion de' termini $p + 2$, $p + 1$ che s' impiegano non entrano nel vero numero delle cercate maniere, così dai termini di (B) (C) ecc. che sono al posto $p + 3 - x$ van levate queste 2 combinazioni. Andando innanzi colle somme, e ragionando similmente si vedrà quante combinazioni devon sottrarsi dai termini corrispondenti delle serie (B), (C), cioè si verran formando le serie delle sottrazioni secondo le diverse ipotesi di x.

7. Ecco il tipo de' modi da escludersi dalle serie (B) ecc. secondo le diverse somme o secondo i diversi termini delle stesse serie (B) ecc.

$$S = p+1+\frac{x^2-x}{2};\ t = p+2-x;\ \left\{p+1+1+2+3 \ldots + x - 1\right\}$$

$$S = p+2+\frac{x^2-x}{2};\ t = p+3-x;\ \left\{\begin{matrix} p+2+1+2+3 \ldots + x - 1 \\ p+1+1+2+3 \ldots x - (x-1) \end{matrix}\right\}$$

$$S = p+3+\frac{x^2-x}{2};\ t = p+4-x;\ \left\{\begin{matrix} p+3+1+2+3 \ldots + x - 1 \\ p+2+1+2+3 \ldots + x - (x-1) \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} p+1+1+2+3 \ldots + x + 1 - x - (x-1) \\ p+1+1+2+3 \ldots + x - (x-2) \end{matrix}\right\}$$

$$S = p+4+\frac{x^2-x}{2}\,;\; t = p+5-x\,;\quad \begin{cases} p+4+1+2+3\ldots+x-1 \\ p+3+1+2+3\ldots+x-(x-1) \\ p+2+1+2+3\ldots+x+1-x-(x-1) \\ p+2+1+2+3\ldots+x-(x-2) \\ p+1+1+2+3\ldots+x+2-(x+1)-x-(x-1) \\ p+1+1+2+3\ldots+x+1-x-(x-2) \\ p+1+1+2+3\ldots+x-(x-3) \end{cases}$$

ecc. ecc. ecc.

Un po' di rifleſſione farà trovare le combinazioni da eſcluderſi per le ſomme ulteriori; ma non ſi dee già credere, che tutte le combinazioni qui notate, e le altre che ſi poſſon trovare abbian luogo per ciaſcuna delle ſerie *(B)*, *(C)* ecc. che competono alle particolari ipoteſi di x. La ſerie di maniere che conveniſſe al numero indefinito x di termini che ſi prendono in ſomma le ammetterebbe tutte, ma ove a x ſi diano i valori di 1, 2, 3 ecc., debbonſi rigettare dalle notate tutte quelle combinazioni che ſon contrarie all' ipoteſi del valore che ſi è dato a x, e formeranſi per tal modo le vere ſerie di ſottrazione. Mi ſpiego più chiaramente con qualche eſempio. Sia in primo luogo $x=1$. La ſerie di ſottrazione ha il ſuo ingreſſo, quando $s=p+1=t$, cioè a quella ſomma che nella ſerie *(A)* limitata a p è fuor delle ſomme fattibili. Dunque la ſerie *(B)* ſino al termine il cui poſto è p contiene i veri numeri delle maniere per far tali ſomme oſſia ciaſcun termine della ſerie *(A)*. Ma ſe la ſerie *(B)* ſi vuol conſiderare come nata dalla ſerie *(A)* ſenza limite, anche ai termini $p+1$, $p+2$, $p+3$ ecc. di queſt' ultima corriſponderanno 1, 1, 1 ecc. nella prima, i quali devon eſſer diſtrutti dalla ſerie di ſottrazione, onde ſi verifichi la condizione del problema, che non ammettendo in *(A)* termine maggior di p, devon eſſer zero le maniere onde formare $p+1$, $p+2$ ecc. Il perchè è chiaro, che la ſerie di ſottrazione cominciando il ſuo ingreſſo all' indice $p+1$ de' termini in *(A)* debb' eſſere 1, 1, 1, 1 ecc., con che ſi annullano le maniere per formare $p+1$, $p+2$ ecc. ſino all' infinito. Con ciò pare che non concordino le maniere generali notate al principio di queſto §. e coſtituenti la ſerie generale di ſottrazione, ſecondo la quale i primi termini dovrebber eſſere 1, 2, 4, 7 ecc. Deeſi però avvertire che

che alcune delle generali combinazioni ivi notate non salvano la condizione che nella serie (A) si debba prendere un sol termine, e quindi non vanno computate. Alla somma $p+1$ appartiene la combinazione $p+1+1+2+3\ldots+0$ il che vuol dire che al termine $p+1$ non va unito nessun termine della serie $1, 2, 3\ldots x-1$, come appunto richiede l' ipotesi di $x=1$. Perciò alla somma $p+1$ spetta realmente nella serie di sottrazione il termine 1. Per la seguente $p+2$ abbiamo in genere 2 combinazioni da sottrarre; $p+2+1+2+3\ldots+0$; $p+1+1-0$. La prima va d' accordo coll' ipotesi per la ragion sopraddetta, ma non già la seconda, perchè al termine $p+1$ si congiunge l' altro termine 1 che si prende nella serie $1, 2, 3\ldots x$, e si leva zero, cioè non levandosi alcun altro termine, si vengono a prendere realmente 2 termini della serie (A), il che è contrario all' ipotesi di $x=1$. Ommessa pertanto questa 2.ª combinazione, anche per la somma $p+2$ avremo il termine nella serie di sottrazione che sarà 1. Usando di simile raziocinio per le somme $p+3$, $p+4$ ecc. e i numeri di combinazioni corrispondenti, si vedrà che questi saranno tutti 1, e che sarà la serie di sottrazione 1, 1, 1, 1 ecc.

8. Pongasi $x=2$, e non incontrandosi contrarietà alcuna all' ipotesi pei primi 2 termini della serie generale di sottrazione competenti alle somme $p+2$, $p+3$, saranno essi 1, 2. La somma però $p+4$ riceve senza contraddizione le 3 prime maniere notate nella serie generale, ma ricusa la 4.ª, perchè essa verrebbe ad esser formata da $p+1+1+2-0$, cioè da 3 termini della serie (A) quando l' ipotesi vuol che sian 2. Così alla seguente somma $p+5$ convengono per una ragion simile le 3 prime combinazioni e la 5.ª, e non la 4.ª, la 6.ª e la 7.ª E se si continueranno i termini della serie generale di sottrazione, si vedrà che questa adattata all' ipotesi di $x=2$ sarà del tenore seguente; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ecc.

9. Supposto $x=3$, e fissate le prime 3 somme che spettano ai primi 3 termini della serie di sottrazione, e sono $p+4$, $p+5$, $p+6$, i primi 3 termini della serie generale suddetta, cioè 1, 2, 4 sono giustissimi. Non così il 4.° della somma $p+7$, nel quale non va computata l' ultima

combinazione $p+1+1+2+3\ldots+x-(x-3)$, ossia $p+1+1+2+3-0$, perchè 4 sarebbero i termini di (A) presi in somma; ma solo le 6 precedenti. Per questa ipotesi la serie di sottrazione si troverà essere 1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20 ecc. Ove poi per parecchj altri termini si continui la serie generale di sottrazione, per trar da questa le particolari serie che riguardan le ipotesi de' valori numerici dati a x si osserverà valer questa regola. Cominciando dall' ipotesi di $x=2$, da' numeri generali delle maniere si escluderanno tutte quelle combinazioni, nelle quali apparisce il binomio composto della differenza tra x e il valor dell' ipotesi dato a x, oppure della differenza tra x e un valore maggiore del valore dato a x, ammettendo tutte le altre. Così posto $x=2$, delle 4 combinazioni del 5.° termine nella serie generale delle sottrazioni, va rifiutata l'ultima, perchè in essa apparisce il binomio $x-2$; e delle 7 combinazioni che costituiscono il 4.° termine non si dee tener conto della 4.ª, 6.ª e 7.ª perchè contengono i binomj $x-2$, $x-3$. Con tali avvertenze ci verrà fatto di stabilire per le particolari ipotesi di x le seguenti

Prime serie di sottrazione.

$x=1$;	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1	ecc. ....(G)
$x=2$;	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8	ecc. ....(H)
$x=3$;	1,	2,	4,	6,	9,	12,	16,	20	ecc. ....(I)
$x=4$;	1,	2,	4,	7,	11,	16,	23,	31	ecc. ....(L)
$x=5$;	1,	2,	4,	7,	12,	18,	27,	38	ecc. ....(M)
ecc.			ecc.						

10. In queste serie si manifesta una proprietà simile a quella delle altre (B), (C), (D) ecc. (§. 2.). La 2.ª (H) nasce dalla 1.ª (G) replicata nella guisa che si è posta in pratica colle prime, ma cogl' intervalli d' un sol termine, come qui si vede.

$$\begin{array}{l}
1,1,1,1,1,1,1,1 \\
\quad 1,1,1,1,1,1,1 \text{ ecc.} \ldots\ldots (H) \\
\quad\quad 1,1,1,1,1,1 \\
\quad\quad\quad 1,1,1,1,1 \\
\quad\quad\quad\quad 1,1,1,1 \\
\quad\quad\quad\quad\quad 1,1,1 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 1,1 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad ,1
\end{array}$$

La ſomma delle colonne verticali viene appunto a formare la ſerie 1, 2, 3, 4, 5 ecc., cioè la 2.^{a} (H). Così la ſerie (H) replicata coll' intervallo di 2 termini produce la 3.^{a} ſerie (I). Eccone la figura,

$$\begin{array}{l}
1,2,3,4,5,6,7,8 \\
\quad\quad 1,2,3,4,5,6 \text{ ecc.} \ldots\ldots (I) \\
\quad\quad\quad\quad 1,2,3,4 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 1,2
\end{array}$$

All' iſteſſo modo continuando le figure della ſerie (I) replicata coll' intervallo di 3 termini ſi ottiene la ſerie (L).

$$\begin{array}{l}
1,2,4,6,9,12,16,20 \\
\quad\quad\quad 1,2,4,6,9 \text{ ecc. } (L) \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 1,2
\end{array}$$

E generalmente per avere la ſerie ſpettante alla ipoteſi x biſognerà nel modo ſuddetto far la replica della ſerie che riguarda l' ipoteſi di $x-1$ coll' intervallo di $x-1$ termini. Quindi ſi deduce a un colpo d' occhio per queſte ſerie una legge ſimile a quella che oſſervammo nelle ſerie (B), (C) ecc. Per eſempio nella 2.^{a} (H) qualunque termine t naſce dal precedente e dal termine ſovrappoſto a t nella prima fila (G) uniti in ſomma. Così ogni termine t della 3.^{a} (I) è l' aggregato del termine diſtante di due dal cercato e del termine che gli ſta ſopra nella fila (H); e ad avere qualunque termine t di (L) biſognerà unire il termine della ſteſſa fila (L) diſtante di tre termini al ſovrappoſto in (I). Onde uſando i ſimboli ſteſſi del §. 3. generalmente per la ſerie che compete a x varrà l' equazione $Z^{(t,x)}=Z^{(t-(x-1),x)}$ $+Z^{(t,x-1)}$, ovvero ſoſtituendo $x+1$ in vece di x; $Z^{(t,x+1)}=Z^{(t-x,x+1)}+Z^{(t,x)}\ldots\ldots(b)$.

11. Quando $x=1$, abbiam veduto (§. 7), che coll' unica ſerie di ſottrazione 1, 1, 1, 1 ecc., la quale ha il ſuo

ingresso al num.° de' termini $p+1$ della serie (B) si fanno svanire tutte le maniere di formar le somme $p+1$, $p+2$, $p+3$ ecc. della serie illimitata (A), restando solo le altre sino a p. Ora, fatto $x=2$, si potrà egli dire, che facendo entrar la serie di sottrazione (H) al termine $t=p+2-x=p$ della serie (C) prodotta indefinitamente, questa basti ad annullare in (C) tutti i termini, che corrispondono alle somme $2p$, $2p+1$, $2p+2$ ecc, che vanno escluse dalla serie delle somme nella serie (A) limitata a p, perchè la somma massima è $p+p-1=2p-1$? Veggiamolo. Alla somma $2p$ corrisponde nella serie (C) $t=2p-2$ (§. 4). Dunque essendo esso posto pari, sarà, per l' indole della serie 1, 1, 2, 2, 3, 3 ecc., ivi situato il 2.° dei valori eguali $p-1$. Per la legge poi dell' ingresso della serie di sottrazione (H) a quel termine dell' altra (C) che è nel posto p (§. 7), è evidente, che sarà pure $p-1$ il termine della serie aritmetica (H) che è analogo all' altro $p-1$ della serie (C). Onde la combinazione di queste due serie formerà la seguente figura;

(C)....	1, 1, 2, 2, 3, 3, ...	$p-1$,	p,	p,	$p+1$,	$p+1$,	$p+2$,	$p+2$ ecc.
(H)...	...	$-(p-1)$,	$-p$,	$-(p+1)$,	$-(p+2)$,	$-(p+3)$,	$-(p+4)$,	$-(p+5)$ ecc.
(C).	. . . .		1,	1,	2,	2,	3,	ecc.

Qui si vede che i due termini $p-1$, p della serie (C) vengono distrutti dagli analoghi della serie (H), ma non così succede ne' susseguenti p, $p+1$, $p+1$ ecc., de' quali maggiori riescono que' che vi corrispondono nella serie (H). Egli è dunque necessaria una 3.ª serie (C'), i cui termini combinati con quelli delle altre due vengano a distruggersi scambievolmente. Questa serie è di addizione; comincia ad avere il suo ingresso alla somma $2p+2$, ossia quando in (C) è il num.° de' termini $t=2p$; e un leggiero esame la farà trovar la stessa che (C), nè vi è bisogno d' altro che di queste 3 serie.

12. L' ipotesi di $x=3$ somministra per prima serie; 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7 ... (D) e l' ingresso della serie di sottrazione (I) è al num°. de' termini $t=p+2-x=p-1$. Ora, poichè si suppone che si prendano 3 termini in somma della serie (A), si vede che p non può essere minore di 3, e che 6 è la minima somma, qualunque sia p. Quindi se

$p=3$, le maniere di formar le ſomme 7, 8, 9 ecc. devono eſſer zero, e la ſerie (I) comincia ad aver luogo quando $t=2$. Onde, collocata prima di tutte la ſerie delle ſomme, la diſpoſizione delle 2 ſerie (D), (I) dev' eſſere la ſeguente;

6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18 ecc.	
1,	1,	2,	3,	4,	5,	7,	8,	10,	12,	14,	16,	19 ecc.	..... (D)
	-1,	-2,	-4,	-6,	-9,	-12,	-16,	-20,	-25,	-30,	-36,	-42 ecc.	..... (I)
			1,	2,	4,	6,	9,	12,	16,	20,	25,	30 ecc.	..... (I)
						-1,	-1,	-2,	-3,	-4,	-5,	-7 ecc.	..... (D)

e fuori del 1°. termine 1 nella ſerie (D), dalle ſerie ſuſſeguenti devono rimaner diſtrutti tutti gli altri. Le 2 prime ſerie (D), (I) fanno ottenere l' intento ſino al 4.° termine di (D); ma per queſto e pei ſuſſeguenti è neceſſaria la ſottopoſizione di una 3.ª ſerie poſitiva, i cui 3 primi termini eſſendo i medeſimi che i 3 primi di (I), mi valgo di queſta ſteſſa per 3.ª ſerie, la quale però non mi fa ſvanire gli aggregati de' termini analoghi $7-12+6$; $8-16+9$ ecc. Egli è dunque duopo impiegare una 4.ª ſerie negativa, che ha il ſuo principio al 7.° termine di (D) che ſi troverà eſſere la replica della ſteſſa prima ſerie (D) e baſterà unita alle 2 precedenti per fare ſvanire tutti i termini di (D), detratto il primo. Facciaſi rifleſſione all' ingreſſo di queſte ſerie. La 2.ª (I) entra dopo un termine della 1.ª (D); la 3.ª (I) dopo 2 termini della 2.ª e la 4.ª (D) dopo 3 termini della 3ª; oſſia per la 2ª, 3ª, 4ª, quando $t=p-1$; $t=2p-2$; $t=3p-2$. Se facciam $p=4$, l' ultima ſomma delle fattibili è 9, che deve avere una ſola maniera, ond' eſſer formata; e perciò le maniere delle altre ſomme 10, 11, 12 ecc. devono annichilarſi per mezzo de' termini delle altre 3 ſerie. In tal caſo entra la 1.ª ſerie (I) di ſottrazione, quando $t=3$, cioè dopo 2 termini della 1.ª (D). Onde, diſcorrendo colla ſcorta dell' antecedente eſempio, la 3.ª ſerie avrà il ſuo ingreſſo dopo 3 termini della 2ª; la 4.ª dopo 4 della 3.ª; e con ciò ſi otterranno le ricercate diſtruzioni. Ecco la figura di queſt' ipoteſi:

6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18	ecc.
1,	1,	2,	3,	4,	5,	7,	8,	10,	12,	14,	16,	19	ecc. .... (D)
		−1,	−2,	−4,	−6,	−9,	−12,	−16,	−20,	−25,	−30,	−36	ecc. .... (I)
					1,	2,	4,	6,	9,	12,	16,	20	ecc. .... (I)
									−1,	−1,	−2,	−3	ecc. .... (D)

dove pure si verifica, che gl' ingressi delle serie (I), (I), (D) corrispondono nella prima agl' indici de' termini $t = p - 1$; $t = 2p - 2$; $t = 3p - 2$; il che ha luogo, qualunque sia il valore che diamo a p, essendo $x = 3$.

13. Si è veduto, che nell' ipotesi di $x = 1$ colla serie (B) va combinata l' unica serie di sottrazione, che è la stessa (B), e comincia ad aver luogo, quando nella 1.ª serie sia $t = p + 1$ (§. 7); che, posto $x = 2$, la serie (C), che le compete, deesi unire coll' altra di sottrazione (H), la quale entra al termine $t = p$, e poi colla 3.ª di addizione, che è la stessa (C) e principia, quando $t = 2p$ (§. 11): che fatto $x = 3$, la serie (D) dev' essere accompagnata da altre 3, la prima delle quali (I) di sottrazione entra al termine $t = p - 1$; la 2.ª di addizione, che è la replica di (I) entra al termine $t = 2p - 2$; finalmente la 3.ª di nuova sottrazione entrando al termine $t = 3p - 2$ non è altro che il ritorno della serie (D). Raccoglierem quindi guidati dall' analogia, che nella supposizione di $x = 4$ sarà mestieri alla 1.ª serie (E) dare per compagne altre 4 serie; la 1.ª di sottrazione (L) che avrà il suo ingresso, quando in (E) sia $t = p - 2$, poscia una 2.ª che comincia quando $t = 2p - 4$; indi una 3.ª, quando $t = 3p - 5$, che sarà la replica di (L); da ultimo, ove $t = 4p - 5$ una 4.ª che sarà il ritorno di (E). Per conoscere i termini della seconda delle aggiunte alla prima (E) ci servirem della più piccola ipotesi di $p = 4$, il che fa esser 10 la somma unica cui spetta 1 nella serie delle maniere, dovendo svanir tutte le altre che riguardano le somme susseguenti 11, 12, 13 ecc. senza limite. Ora, scritta distesamente la serie (E), sott' essa dopo un termine si collochi la serie (L) negativa; dopo 2 termini di (L) s' intendan posti i termini della serie (O) positiva che cerchiamo: così dopo 3 termini di (O) ritorni (L) negativa, e dopo 4 di (L) ritorni (E) positiva. Con tale disposizione delle 5 serie dovendo svanire tutte le colonne verticali, si troverà essere

la ferie (*O*) 1, 2, 5, 8 ecc. come nell' aggiunto fchema;

10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,	19,	20,	21,	22,	23,	24,	25,	26,	27	ecc.	
1,	1,	2,	3,	5,	6,	9,	11,	15,	18,	23,	27,	34,	39,	47,	54,	64,	72	ecc. ...	(*E*
	-1,	-2,	-4,	-7,	-11,	-16,	-23,	-31,	-41,	-53,	-67,	-83,	-102,	-123,	-147,	-174,	-204	ecc. ...	(*L*
			1,	2,	5,	8,	14,	20,	30,	40,	55,	70,	91,	112,	140,	168,	204	ecc. ...	(*O*
						-1,	-2,	-4,	-7,	-11,	-16,	-23,	-31,	-41,	-53,	-67,	-83	ecc. ...	(*L*
										1,	1,	2,	3,	5,	6,	9,	11	ecc. ...	(*E*

E quefta ferie (*O*) riufcirà fempre la medefima, ove cangiando fuppofizione fi faccia $p = 5$, 6, 7 ecc. e fi mettano una fotto l' altra le ferie coll' ordine de' loro ingreffi ai numeri de' termini $t = p - 2$, $2p - 4$, $3p - 5$, $4p - 5$, ficcome fopra è ftato notato.

14. Camminando fulle traccie fegnate ne' precedenti §§. ci verrà fatto di fcoprire, che all' ipotefi di $x = 5$, per la quale fi efigon 6 ferie coll' alternativa del pofitivo e del negativo, la 3.ª di addizione che le appartiene è 1, 2, 5, 9, 16, 25, 39, 56 ecc. e che ad effa è eguale la 4.ª di nuova fottrazione, ritornando le 2 prime nelle altre 2 fuffeguenti. E l' efame di ciò che fi è trovato fin' ora ci farà conofcere la regola generale per qualunque ipotefi di p e di x. Efibifco per comodo dell' indagine fecondo i diverfi valori di x le ritrovate

Prime ferie di addizione

$x = 2$; 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 ecc. .... (*C*)
$x = 3$; 1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20 ecc. .... (*I*)
$x = 4$; 1, 2. 5, 8, 14, 20, 30, 40, ecc. .... (*O*)
$x = 5$; 1, 2, 5, 9, 16, 25, 39, 56 ecc. .... (*P*)
ecc. ecc.

e veggo che la 2.ª (*I*) può nafcere dalla 1.ª (*C*) fottopofta e replicata fempre cogl' intervalli d' un termine dalla anteriore, come fi vede qui appreffo;

1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 ecc.,
1, 1, 2, 2, 3, 3, 4 ecc.
1, 1, 2, 2, 3, 3 ecc.
1, 1, 2, 2, 3 ecc.
1, 1, 2, 2 ecc.
1, 1, 2 ecc.
1, 2 ecc.
1 ecc.

facendo poi la somma delle colonne verticali. Così la 3.ª (O) risulta dalle somme de' termini verticali della 2.ª (I) replicata cogl' intervalli di 2 termini. La 4.ª (P) nasce da (O) ripetuta cogl' intervalli di 3 termini; e però sapremo come dee nascere la 5.ª, 6.ª ecc. che corrispondono a $x=6$, $x=7$ ecc. Tal proprietà poi si risolve in una legge che osservano queste serie simile a quella, che hanno le serie (B), (C), (D) ecc. e le prime di sottrazione (G), (H), (I) ecc. I termini della 2.ª (I) in questo §. nascono dalla unione del precedente al cercato con quello che al cercato è sovrapposto nella 1.ª serie (C). Per avere qualunque termine della 3.ª (O) conviene unire al sovrapposto in (I) quel che in (O) è distante a sinistra di due termini da quel che si vuole; per la 4.ª (P) al suo verticale in (O) quel che in (P) è distante di 3 termini; ecc. Dunque chiamato t il posto del termine per queste serie di addizione, e usando i simboli del Sig. *la Place*, sarà $Z^{(t,x)} = Z^{(t-(x-2),x)} + Z^{(t,x-1)}$, ovvero $Z^{(t,x+2)} = Z^{(t-x,x+2)} + Z^{(t,x+1)}$ .... (c).

15. Per le seconde serie di sottrazione non ci verrà meno la regola. Presentandole conforme i valori esaminati di x, ci appariscono come stanno qui esposte.

Seconde serie di sottrazione

$x=3$; 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 ecc. .... (D)
$x=4$; 1, 2, 4, 7, 11, 16, 23, 31 ecc. .... (L)
$x=5$; 1, 2, 5, 9. 16, 25, 39, 56 ecc. .... (P),
ecc. ecc.

e la 2.ª (L) vien prodotta dalla replica continua di (D) coll' intervallo d' un termine; la 3.ª (P) dalla ripetizione di (L) coll' intervallo di 2 termini ecc; la qual proprietà identificata coll' altra che esprimesi coll' equazione simbolica farà valere per queste seconde serie di sottrazione l' ugualità; $Z^{(t,x)} = Z^{(t-(x-3),x)} + Z^{(t,x-1)}$ ossia $Z^{(t,x+3)} = Z^{(t-x,x+3)} + Z^{(t,x+2)}$... (d). Uniscansi presentemente le 4 equazioni trovate (a), (b), (c), (d); e sarà assai chiaro dall' ordine che esse osservan ne' termini, che, chiamato λ il num.° delle serie di vicendevoli sottrazioni e addizioni che si combinano colle prime comprese dall' equazione (a) per costitui-

re il

re il num.° di maniere onde formare una delle fattibili somme, si avrà l' equazione generalissima;

$Z^{(t, n+\lambda)} = Z^{(t-n, n+\lambda)} + Z^{(t, n+\lambda-1)} \ldots\ldots (k)$, la quale abbraccia tutte queste serie senza escludere le stesse serie prime di (a), traendosi l' equazione (a) dall' ipotesi di $\lambda = 0$. Gl' ingressi poi di queste serie riferiti al posto del termine nella 1.ª serie di (a) vengono determinati dall' equazione generale $t = \frac{\lambda^2 + \lambda(1 + 2p - 2x) + 2}{2}$, alla quale (§. 4.) corrisponde la formola delle somme corrispondenti;

$s = \frac{\lambda^2 + \lambda(1 + 2p - 2x) + x^2 + x}{2}$. Fatto v. g. $\lambda = 1$, la 1.ª serie di sottrazione entra al termine della 1.ª serie delle maniere $= 2 + p - x$ ossia alla somma $s = \frac{2 + 2p - x + x^2}{2}$; fatto $\lambda = 2$, la 2.ª serie di addizione ha il suo ingresso, quando nella prima di (a) sia $t = 4 + 2p - 2x$, o quando diventa la somma $s = \frac{6 + 4p - 3x + x^2}{2}$, e così si dica delle rimanenti fino alla serie $x.^{esima}$. Onde, sebbene si fa uso dello stesso simbolo t, i valori di t nelle equazioni (b), (c), (d) variano dal 1.° t cosicchè chiamato t^λ l' indice de' termini nella serie del valor generico λ, sarà

$$t^\lambda = t - \frac{\lambda^2 - \lambda(1 + 2p - 2x)}{2}.$$

16. Rimane ora che s' integri l' equazione (k) perchè si possa esibire il termine generale di tutte le mentovate serie. Facendo pertanto che $\alpha_{x+\lambda}$ rappresenti una funzione di x, e l' espressione $\pi.\alpha_{x+\lambda}$ indichi il prodotto di tutti i valori della funzione $\alpha_{x+\lambda}$ che competono alle successive ipotesi di $x = 1, 2, 3 \ldots, x$, cioè sia

$\pi.\alpha_{x+\lambda} = \alpha_{1+\lambda} \cdot \alpha_{2+\lambda} \cdot \alpha_{3+\lambda} \cdot \alpha_{4+\lambda} \ldots \alpha_{x+\lambda}$, dal che nasce

$\pi.\alpha_{x-1+\lambda} = \alpha_{1+\lambda} \cdot \alpha_{2+\lambda} \cdot \alpha_{3+\lambda} \ldots \alpha_{x-1+\lambda}$, e quindi

$\pi.\alpha_{x+\lambda} = \alpha_{x+\lambda}.\pi.\alpha_{x-1+\lambda}$; si ponga $Z^{(t, x+\lambda)} = b^t \pi.\alpha_{x+\lambda}$, ove b^t è la podestà $t.^{esima}$ di una costante b. Sarà dunque $Z^{(t-x, x+\lambda)} = b^{t-x}\pi.\alpha_{x+\lambda}$; e $Z^{(t, x+\lambda-1)} = b^t\pi.\alpha_{x-1+\lambda}$; e introducendo questi valori in (k), risulterà l' equazione $b^t\pi.\alpha_{x+\lambda} = b^{t-x}\pi.\alpha_{x+\lambda} + b^t\pi.\alpha_{x-1+\lambda}$, ovvero (dopo la divisione per b^t, la sostituzione di $\alpha_{x+\lambda}.\pi.\alpha_{x+\lambda-1}$ in vece di $\pi.\alpha_{x+\lambda}$ e la nuova divisione per $\pi.\alpha_{x+\lambda-1}$) l' equazione

$\alpha_{x+\lambda} = b^{-x}\alpha_{x+\lambda} + 1$, cioè $\alpha_{x+\lambda} = \frac{1}{1-b^{-x}}$; e però

$\pi.\alpha_{x+\lambda} = \frac{1}{(1-b^{-1})(1-b^{-2})(1-b^{-3})\ldots(1-b^{-x})}$. Ora potendosi rappresentare il denominatore di questa frazione colla formola generica $1 + cb^{-1} + eb^{-2} + fb^{-3}$ ecc. nella quale c è l' aggregato delle radici contenute dai binomj $1-b^{-1}$; $1-b^{-2}$ ecc....., $1-b^{-x}$, e prese negativamente; e l' aggregato di tutti gli ambi delle medesime radici; f quello de' terni presi negativamente, ecc., sarà pure

$\pi.\alpha_{x+\lambda} = \frac{1}{1+cb^{-1}+eb^{-2}+fb^{-3}\text{ ecc.}}$ .....(y); onde coll' attual divisione ridotta questa frazione in serie, potrà $\pi.\alpha_{x+\lambda}$ assumere un valore della seguente forma;

$\pi.\alpha_{x+\lambda} = 1 + Nb^{-1} + N'b^{-2} + N''b^{-3}$ ecc.........(z).

Nelle 2 diverse espressioni di $\pi.\alpha_{x+\lambda}$ si passi ai logaritmi, e avrem per (z); $l\pi.\alpha_{x+\lambda} = l(1 + Nb^{-1} + N'b^{-2} + N''b^{-3}\text{ ecc.})$, e per (y); $l\pi.\alpha_{x+\lambda} = l1 - l(1 + cb^{-1} + eb^{-2} + fb^{-3}\text{ ecc.})$. Col prendere poi i differenziali facendo variar b troveremo

$$-\frac{b^2 D.\pi\alpha_{x+\lambda}}{d.b\pi.\alpha_{x+\lambda}} = \frac{N + N'b^{-1} + N''b^{-2} + N'''b^{-3}\text{ ecc.}}{1 + Nb^{-1} + N'b^{-2} + N''b^{-3}\text{ ecc.}}$$ rispetto a

(z); e $-\frac{b^2 D.\pi.\alpha_{\varkappa+\lambda}}{d.b\pi.\alpha_{\varkappa+\lambda}} = \frac{-c - 2eb^{-1} - 3fb^{-2}\text{ ecc.}}{1 + cb^{-1} + eb^{-2} + fb^{-3}\text{ ecc.}}$ rispetto a (y). Si butti in serie quest' ultima frazione, e nasce;

$$-\frac{b^2 D.\pi\alpha_{\varkappa+\lambda}}{db\pi\alpha_{\varkappa+\lambda}} = -c + (c^2 - 2e)b^{-1} + (3ce - c^3 - 3f)b^{-2}\text{ ecc.};$$

sicchè ricordandoci di ciò che abbiamo detto al §. 40. della nostra Memoria che precede quest' Appendice, vedremo che chiamate r tutte le radici della nostra formola; r' la somma de' loro quadrati; r'' quella de' loro cubi, ecc., avran luogo queste equazioni; $r = -c$; $r' = -cr - 2e$; $r'' = -cr' - er - 3f$; ecc., cioè $r = -c$; $r' = c^2 - 2e$; $r'' = 3ce - c^3 - 3f$; ecc. Laonde inferiremo essere

$$-\frac{b^2 D.\pi\alpha_{\varkappa+\lambda}}{db\pi\alpha_{\varkappa+\lambda}} = r + r'b^{-1} + r''b^{-2} + r'''b^{-3} + r''''b^{-4}\text{ ecc.}$$

$= \frac{N + N'b^{-1} + N''b^{-2} + N'''b^{-3}\text{ ecc.}}{1 + Nb^{-1} + N b^{-2} + N''b^{-3}\text{ ecc.}}$, e i valori di N', N'', N''' ecc. si renderan noti colla risoluzione delle seguenti necessarie equazioni, $N' = r$; $2N' = N'r + r'$; $3N'' = N''r + N'r' + r''$; $4N''' = N''r + N'r' + N'r'' + r'''$ ecc., che procedono con legge chiara; ove prima si trovi il modo di esibire i valori di r, r', r'' ecc.

17. Ciò si ottiene senza difficoltà coll' investigare prima per ciascun de' binomj, $1 - b^{-1}$, $1 - b^{-2}$..., $1 - b^{-\varkappa}$ la somma delle radici, quella de' lor quadrati, cubi ecc., e far poi la somma delle somme. Rivolgeremci pertanto al teorema analitico del §. 40, il quale, stabilito che sia; $1 + Ab^{-1} + Bb^{-2} + Cb^{-3} \ldots + \gamma b^{-\varkappa} = 0 \ldots (i)$, e fatto R la somma delle radici di questa ugualità, R' la somma de' loro quadrati, R'' quella de' cubi, ecc. fino a R^{k-1} che rappresenta la somma delle podestà $k.^{esime}$ delle stesse radici, ci somministra l' equazione

$R^{k-1} = -Ar^{k-2} - Br^{k-3} - Cr^{k-4} \ldots - kX$, in cui X significa il coefficiente che in (i) è al num.° de' termini $k+1$. Si prenda ora in mano il 1.° binomio $1 - b^{-1}$ che

confrontato coll' equazione (i) dà $x=1$, $X=-1$. Dunque in (l) fatto successivamente $k=1, 2, 3, 4$ ecc. si troverà $R=1$, $R'=1$, $R''=1$, $R'''=1$ ecc. Pel 2.° binomio poi $1-b^{-2}$ bisogna fare in (i) $x=2$, $A=0$; e la sostituzione in (l) di $1, 2, 3$ ecc. in vece di k farà che sia $R=0$; $R'=2$; $R''=0$; $R'''=2$; $R''''=0$, $R'''''=2$ ecc. Così al 3.° binomio $1-b^{-3}$, pel quale $x=3$, $A=0$, $B=0$, compete $R=0$; $R'=0$; $R''=3$; $R''''=0$, $R''''=0$, $R''''''=3$ ecc. ecc. E diremo generalmente che respettivamente all' ultimo binomio $1-b^{-x}$ che può essere risguardato come il termine generale di tutti i precedenti, sarà $R^{x}=x$; $R^{2x}=x$; $R^{3x}=x$ ecc., ma $R=0$; $R'=0$; $R''=0$ ecc. sino a $R^{x-1}=0$, annullandosi eziandio le somme intermedie tra R^{x} e R^{2x}, tra R^{2x} e R^{3x} ecc. Per presentar tutto sotto un sol punto di vista si schierino orizzontalmente i simboli di queste somme, e ad essi si sottopongano i valori trovati mettendo rincontro a questi i corrispondenti binomj, come qui si vede;

	R,	R',	R'',	R''',	R'''',	R''''',	R'''''' ecc.
$1-b^{-1}$	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1 ecc.
$1-b^{-2}$	0,	2,	0,	2,	0,	2,	0 ecc.
$1-b^{-3}$	0,	0,	3,	0,	0,	3,	0 ecc.
$1-b^{-4}$	0,	0,	0,	4,	0,	0,	0 ecc.
$1-b^{-5}$	0,	0,	0,	0,	5,	0,	0 ecc.
$1-b^{-6}$	0,	0,	0,	0,	0,	6,	0 ecc.
$1-b^{-7}$	0,	0,	0,	0,	0,	0,	7 ecc.
	ecc.						

e per la chiara legge che osservano queste file orizzontali potendosi ingrandire le colonne verticali quanto si vuole, saranno in pronto anche le somme delle somme cioè i valori di r, r', r'', r''' ecc. che appartengono alle diverse ipotesi di x. Sia per esempio $x=3$, ed è evidente, che si dee tener conto sol delle 3 prime file, onde fatte le somme de' numeri verticali si avrà $r=1$, $r'=3$, $r''=4$, $r'''=3$, $r''''=1$, $r'''''=6$, $r''''''=1$ ecc., ma se $x=5$, prese verticalmente le somme nelle 5 file, risulta $r=1$, $r'=3$, $r''=4$, $r'''=7$, $r''''=6$, $r'''''=6$ ecc. Sarà quindi noto il metodo che si deve tenere per gli altri casi.

18. Non essendoci più ignoti i valori de' coefficienti N', N'' ecc. nell' equazione $\pi.\alpha_{n+\lambda} = 1 + Nb^{-1} + Nb^{-2}$ $+ N''b^{-3}$ ecc.....(z), per avere il termine generale dell' altra (k) moltiplicheremo (z) per b^t; e proviene $b^t\pi\alpha_{n+\lambda}$ ossia $Z^{(t,n+\lambda)} = b^t + Nb^{t-1} + N'b^{t-2} + N''b^{t-3}$ ecc., dove, perchè t è dato per le somme s e pel num.° de' termini x, saranno b^t, b^{t-1}, b^{t-2} ecc. funzioni di s e di x. Cominciamo dal caso delle prime serie (B), (C), (D) ecc. (§. 2.), per le quali debb'essere $\lambda = 0$ (§. 15.). Espressa dunque la funzione b^t col simbolo $f^{(t)}$, risulterà $Z^{(t,n)} = f(t) + Nf(t-1)$ $+ N'f(t-2)$ ecc., Ora supponendo $x = 1$, diventa

$$\pi.\alpha_{n+\lambda} = \frac{1}{1 - b^{-1}} = 1 + b^{-1} + b^{-2} + b^{-3} \text{ ecc., e}$$

$Z^{(t,n)} = Z^{(t,1)} = b^t + b^{t-1} + b^{t-2}$ ecc., ovvero $Z^{(t,1)} = f(t)$ $+ f(t-1) + f(t-2)$ ecc., il che fa essere $N' = 1$, $N'' = 1$, $N''' = 1$ ecc., onde ancora si trae $Z^{(t-1,1)} = f(t-1)$ $+ f(t-2) + f(t-3)$ ecc., e in conseguenza $Z^{(t,1)} - Z^{(t-1,1)} = f(t)$. Se t è negativo, o zero, siccome a termine nullo o negativo non può corrispondere alcuna delle somme fattibili, che nella ipotesi di $x = 1$ sono i numeri 1, 2, 3 ecc. della serie (A), così sarà $Z^{(t,1)} = 0$; $Z^{(t-1,1)} = 0$. E quindi $f(t) = 0$. Se t è positivo ma in modo che sia $t > 1$, avremo $Z^{(t,1)} = 1$, $Z^{(t-1,1)} = 1$ come rilevasi dalla serie (B). Onde anche con tali ipotesi sarà sempre $f(t) = 0$. Ma posto $t = 1$, abbiamo $Z^{(1,1)} - Z^{(0,1)} = f^{(1)}$, e siccome $Z^{(1,1)} = 1$; $Z^{(0,1)} = 0$, sarà $f(1) = 1$. Questo è pertanto l' unico caso, in cui $f(t)$ sia 1, in tutti gli altri qualunque funzione di t è zero. Presa dunque la funzione generale di t, cioè $f(t-n)$, esprimerà essa il valore 1 quando sia $t - n = 1$, che dà $n = t - 1$. Ma nell' equazione $Z^{(t,n)} = f(t) + Nf(t-1) + N'f(t-2)$ ecc., quel numero che sotto la funzione si sottrae da t è sempre l' apice dell' N che gli corrisponde. Dunque svanendo tutte le altre funzioni, resterà finalmente $Z^{(t,n)} = N^{t-1}$, che è il termine generale delle serie (B), (C) ecc.

19. Sopra questo metodo, di cui si serve il Sig. *Paoli* nella sua Memoria citata, faremo tra poco alcune nostre ri-

flessioni, ma trattanto passeremo alla determinazione del simbolo generale $Z^{(t,x+\lambda)}$, per cui pure si ha l' equazione $Z^{(t,x+\lambda)}=b^t+Nb^{t-1}+N'b^{t-2}+N''b^{t-3}$ ecc., o anche $Z^{(t,x+\lambda)}=f(t)+Nf(t-1)+N'f(t-2)$ ecc. Si ponga $x=1$, e per la ragione che diventa allora

$$\pi.a_{x+\lambda}=\frac{1}{1-b^{-1}}=1+b^{-1}+b^{-2}+b^{-3} \text{ ecc.},$$ saranno N', N', N'' ecc. eguali all' unità positiva; e quindi $Z^{(t,1+\lambda)}=f(t)+f(t-1)+f(t-2)+f(t-3)$ ecc.; $Z^{(t-1,1+\lambda)}=f(t-1)+f(t-2)+f(t-3)$ ecc. dalle quali equazioni traendosi $Z^{(t,1+\lambda)}-Z^{(t-1,1+\lambda)}=f(t)$, ci resta da determinare questa funzione $f(t)$. Ora io osservo, che se $\lambda=1$, si fa $Z^{(t,1+\lambda)}=Z^{(t,2)}$, che spetta alla 2.ª serie (H) delle 1.ᵉ serie di sottrazione, la quale è precisamente la somma della 1.ª serie (B) nelle serie generali delle maniere. Se $\lambda=2$; $Z^{(t,1+\lambda)}=Z^{(t,3)}$ appartiene alla 2.ª serie (I) delle 1.ᵉ di addizione, che è pur la somma della 2.ª (C) delle suddette prime serie. Così, se $\lambda=3$, onde nasce $Z^{(t,1+\lambda)}=Z^{(t,4)}$, cui corrisponde la 2.ª serie (L) nelle seconde serie di sottrazione, si vedrà che questa è la somma della 3.ª serie (D) ecc. Dunque generalmente, nelle serie o di addizione o di sottrazione, che competono al num. λ, quella che ha per termine generale $Z^{(t,1+\lambda)}$ sarà la somma della serie che nelle serie generali delle maniere è al numero λ; e però $Z^{(t,1+\lambda)}-Z^{(t-1,1+\lambda)}$ è l' espressione del termine generale della stessa serie, che vien denominata dal num.° λ. Ma (§. 18.) esso si è trovato $=N^{t-1}$. Dunque denotando con ${}^{\lambda}n$ il suddetto N, per indicare a qual serie appartiene, avremo $Z^{(t,1+\lambda)}-Z^{(t-1,1+\lambda)}={}^{\lambda}n^{t-1}=f(t)$, e però ${}^{\lambda}n^{t-2}=f(t-1)$; ${}^{\lambda}n^{t-3}=f(t-2)$ ecc. Quindi colle sostituzioni sarà $Z^{(t,x+\lambda)}={}^{\lambda}n^{t-1}+{}^{\lambda}n^{t-2}N'+{}^{\lambda}n^{t-3}N''+{}^{\lambda}n^{t-4}N'''\ldots+N^{t-4}$, E questa formola abbraccia tutti i termini generali che competono a tutte le serie necessarie per la completa soluzione del nostro problema.

20. Vogliasi per esempio il 5.° termine della 2.ª serie (L) delle seconde serie di sottrazione, quando si prendono 4 numeri nella serie aritmetica $1, 2, 3, 4, 5 \ldots p$. Sarà $x+\lambda=4$, e, perchè $\lambda=3$, $x=1$; in oltre $t=5$, e quindi

$Z^{(5,4)} = {}^3n'''' + {}^3n'''N' + {}^3n'N'' + {}^3n'N''' + N''''$. Ma perchè $x = 1$, diventa $N' = 1$, $N'' = 1$, $N''' = 1$, $N'''' = 1$. Dunque $Z^{(5,4)} = {}^3n'''' + {}^3n''' + {}^3n'' + {}^3n' + 1$. Si stabiliscano le 3 serie delle podestà delle radici sino al 4.° termine nel modo seguente.

$R.$	R',	R'',	R'''
1,	1,	1,	1
0,	2,	0,	2
0,	0,	3,	0

e sommando le colonne verticali sarà $r = 1$, $r' = 3$, $r'' = 4$, $r''' = 3$. Ma pel §. 16. cangiati gli N in ${}^3n$, abbiamo

$${}^3n' = r,\ {}^3n'' = \frac{{}^3n'r + r'}{2};\ {}^3n''' = \frac{{}^3n''r + {}^3n'r' + r''}{3};$$

$${}^3n'''' = \frac{{}^3n'''r + {}^3n''r' + {}^3n'r'' + r'''}{4},$$ mediante la sostituzione de' valori delle r e la risoluzione delle equazioni lineari che ne derivano, si ottiene ${}^3n' = 1$, ${}^3n'' = 2$, ${}^3n''' = 3$, ${}^3n'''' = 4$, e però il 5.° termine di $(L) = 4 + 3 + 2 + 1 + 1$, cioè $Z^{(5,4)} = 11$.

21. Si cerchi il 5.° termine della 3.ª serie (P) delle seconde di sottrazione. Tal domanda fa subito essere $\lambda = 3$, $x = 2$, $t = 5$. Dunque, poichè i valori di ${}^3n'$, ${}^3n''$ ecc. son quei medesimi che abbiam trovato nell' esempio superiore, sostituendo avremo $Z^{(5,5)} = 4 + 3N' + 2N + N'' + N'''$. Debbonsi presentemente trovare i valori di N', N'' ecc. che convengono all' ipotesi di $x = 2$; al qual fine si faccia la solita figura numerica di due sole file, come segue

R,	R',	R'',	R'''
1,	1,	1,	1
0,	2,	0,	2

dalla quale si ricava $r = 1$, $r' = 3$, $r'' = 1$, $r''' = 3$. Questi valori sostituiti nei generali di N del §. 16., somministrano $N' = 1$, $N'' = 2$, $N''' = 2$, $N'''' = 3$, onde $Z^{(5,5)} = 4 + 3 + 4 + 2 + 3 = 16$.

22. Esaminiamo presentemente se i termini generali delle proposte serie esibiti da questo ingegnoso metodo abbiano realmente quelle qualità che competono al termine general d' una serie. E' noto a tutti i Geometri, che il termine

generale d' una ſerie non deve avere alcuna dipendenza, nè da termini antecedenti nella medeſima ſerie, nè molto meno da altre ſerie che, al caſo di ricorrenti doppie, precedan la data. Per meglio ſpiegarmi, ſe la ſerie variando in doppio ſenſo ſia tale, che le appartengano due variabili t, x, la prima delle quali rappreſenti il numero de' termini, x il numero delle file, il ſuo genuino termine generale ſarà una funzione di t, x tale che dati que' valori che ſi vogliono a queſte indeterminate, e introdotti nella funzione, ſomminiſtri eſſa il termine iſolato che ſi ricerca ſenza ſcorrimento nè per altri termini nè per altre file. Abbianſi per eſempio le ſerie qui eſpoſte,

	1,	2,	3,	4,	5......t	
1	1,	2,	3,	4,	5	ecc.
2	3,	5,	7,	9,	11	ecc.
3	8,	12,	16,	20,	24	ecc.
4	20,	28,	36,	44,	52	ecc.
5	48,	64,	80,	96,	112	ecc.
:	ecc.					
:						
x						

che hanno la proprietà compreſa dalla ſeguente equazione $Z^{(t,x)} = Z^{(t,x-1)} + Z^{(t+1,x-1)}$. Sarà facile il vedere, che la formola $2^{x-2}(2t+x-1)$ eſprime il termine generale di queſte ſerie. Ora ſaper ſi brami di qual valore ſia il 4.° termine della 5.ª fila. Dunque debb' eſſere $t=4$, $x=5$; e meſſi queſti valori nel ſuddetto termine generale, avremo $Z^{(4,5)} = 2^3(8+4) = 8.12 = 96$; il che ſi ottiene ſenza la neceſſità di conoſcere prima i precedenti termini 80, 64, 48, o qualunque altro numero delle file anteriori.

23. Ma queſto vantaggio non ſi ha coll'applicazione del metodo di cui abbiam fatto uſo in queſta Appendice al caſo del noſtro problema; la qual coſa appariſce chiaramente dall' iſteſſo termine generale $Z^{(t,x)} = N^{t-1}$ ſpettante alle prime ſerie (B), (C), (D) ecc. del §. 2. S' io voglio v. g. l'8.° termine della 3.ª fila (D), per cui vale l' equazione $Z^{(8,3)} = N^{'''''''}$, che mi preſcrive la regola di fare? Io debbo prima di tutto formar la figura ſeguente di 3 colonne,

1, 1,

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2
0, 0, 3, 0, 0, 3, 0, 0

sommare i numeri verticali per avere le determinazioni che noto; $r=1$, $r'=3$, $r''=4$, $r'''=3$, $r''''=1$, $r'''''=6$, $r''''''=1$, $r'''''''=3$; segnare le 7 equazioni, $N'=r$; $2N''=N'r+r'$ ecc. sino all' ultima $7N'''''''=N''''''r$ ecc.; introdurre in queste i valori trovati di r, r' ecc., finalmente eseguire la risoluzione delle medesime, dalla quale ricavasi $N'=1$, $N''=2$, $N'''=3$, $N''''=4$, $N'''''=5$, $N''''''=7$, $N'''''''=8$. Si faccia qui la riflessione, che quest' ultimo valore di N''''''' io non lo posso avere se prima non trovo quelli di N', N'' ecc. Ma essi sono appunto i termini nella serie (D) precedenti all' ottavo. Dunque per poter esibire un termine io son costretto dal metodo a formare a un per uno que' che gli vanno avanti, cosicchè se mi piacerà di saper cosa sia il 100.^{mo} termine, la dipendenza che esso ha dagli altri 99 mi obbliga a trovarli tutti.

24. Cresce poi notabilmente questa dipendenza, se cerco qualcun de' termini delle serie di addizione o di sottrazione. Nel termine generale di queste serie (§. 18.) pongo per esempio $t=8$, $x=2$, $\lambda=3$, onde nasce $Z^{(8,5)}={}^3n''''''+{}^3n'''''N'+{}^3n''''N''+{}^3n'''N'''+{}^3n''N''''+{}^3n'N'''''+N''''''$. Per ragione dell' espressione $Z^{(8,5)}$ egli è come s' io volessi in una serie il termine $t=8$, essendo l' altra variabile $x=5$; e per ragione che è $\lambda=3$, tal serie è (P) cioè quella serie delle seconde sottrazioni che corrisponde a $x=5$. Ho scelto l' 8.° termine quando $\lambda=3$ perchè lo schema dell' esempio superiore mi determini a un tratto i valori di ${}^3n'$, ${}^3n''$ ecc, che sono ${}^3n'=1$, ${}^3n''=2$, ${}^3n'''=3$, ${}^3n''''=4$, ${}^3n'''''=5$, ${}^3n''''''=7$, ${}^3n'''''''=8$. Dunque $Z^{(8,5)}=8+7N'+5N''+4N'''+3N''''+2N'''''+N''''''+N'''''''$; e riman l' indagine de' valori degli N che riguardan l' ipotesi di $x=2$. Formisi pertanto la figura che segue di due file sino all' ottavo termine; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 ed eseguendo le
0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2
consuete somme, nasce $r=1$, $r'=3$, $r''=1$, $r'''=3$, $r''''=1$, $r'''''=3$, $r''''''=1$, $r'''''''=3$. Surrogati poscia questi valori nelle equazioni generiche degli N e compiuto il cal-

colo, avremo $N' = 1$, $N'' = 2$, $N''' = 2$, $N'''' = 3$, $N''''' = 3$, $N'''''' = 4$, $N''''''' = 4$. Sarà quindi $Z^{(8,5)} = 8.1 + 7.1 + 5.2 + 4.2 + 3.3 + 2.3 + 1.4.1.4. = 56$, com' è appunto il termine 8.° di (P). Ora osserveremo, che i valori degli ${}^3n$, ove si aggiunga per 1.° termine l'unità, costituiscon la serie, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, cioè fan risultare gli otto primi termini di (D) che è la 3.ª delle serie generali delle maniere; e quei degli N coll'unità aggiunta producono gli 8 primi termini 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 di (C), che è la 2.ª delle stesse serie generali. Sicchè è manifesta la necessità di trovare successivamente 8 termini non d'una ma di due serie anteriori per aver l' ottavo di (P). La qual cosa verificandosi per qualunque altro esempio, io dubito che le proprietà caratteristiche del termine generale possano convenire a quei termini generali che si trovano col presente metodo applicato al problema che ci siamo proposti.

25. Prima d' andare innanzi credo opportuno di non lasciare inavvertita una curiosa proprietà, che in tutte le serie di sottrazione e di addizione combinabili colle prime delle maniere ho rimarcato, per occasione dell'ultimo esempio. Che si è egli fatto nelle supposizioni di $x = 2$, $\lambda = 3$, $t = 8$ per conoscere il valore dell' 8.° termine di (P)? Si son presi in (D) 8 termini principiando dall' ultimo e venendo fino al primo che sono 8, 7, 5, 4, 3, 2, 1, 1; altri 8 dal primo fino all' ottavo, cioè 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 nella serie (C); poi procedendo dalla sinistra alla destra in tutte e due le file si sono moltiplicati tra loro i termini di posto eguale, come qui si vede, 8.1, 7.1, 5.2 ecc. fino all' ultimo 1.4; e la somma di tai prodotti ha generato l' 8.° termine, di cui s' andava in traccia. Fatta ora la riflessione che alla serie (D) corrisponde l' ipotesi di $x = 3$ che è lo stesso valore di λ, e alla serie (C) $x = 2$ che è pure la nostra ipotesi, si cangino i dati, e sia $x = 2$, $\lambda = 2$, $t = 7$. Poichè la supposizione di $\lambda = 2$ ci porta alle prime serie di addizione, ed è $x + \lambda = 4$, si fa evidente, che noi cerchiamo il 7.° termine della serie (O) (§. 14.). Dunque coll' analogia dell' esempio superiore si scrivano al rovescio i 7 primi termini di (C), cioè 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1, perchè

1, 1, 2, 2, 3, 3, 4

$\lambda = 2$, e poi, perchè anche $x = 2$, si sottopongano agli altri i 7 primi termini della stessa serie (*C*) presa dirittamente, dipoi si eseguiscano le moltiplicazioni ne' termini che si corrispondono verticalmente; e si ottiene $4 + 3 + 6 + 4 + 6 + 3 + 4 = 30$, che è precisamente il valore del 7.° termine di (*O*). Questa regola si vedrà verificata in qualunque altro esempio e la esprimo generalmente così. Sia da trovarsi il valore di $Z^{(t, x+\lambda)}$. La determinazione di λ ci indica a quali serie di addizione, o di sottrazione appartenga questo termine, e il num.° $x + \lambda$ ci dà il valore della x che si scrive lateralmente alla serie, e resta quindi noto il numero della fila nella quale $Z^{(t, x+\lambda)}$ è collocato. Conosciuto ciò, nelle prime serie delle maniere si assuma quella che corrisponde a $x = \lambda$ e l' altra che spetta al valore di x, e in ambidue preso il num.° t di termini, il 1.° della 2.^{a} si moltiplichi nel t^{esimo} della prima; il 2.° della 2.^{a} nel $t - 1.^{esimo}$ della prima ecc. fino al prodotto del $t.^{esimo}$ della 2.^{a} nel 1.° della prima. La somma di questi prodotti sarà eguale a $Z^{(t, x+\lambda)}$. E questa stessa regola si deduce dall' equazione generale (§. 19.) per tutte queste serie; $Z^{(t, x+\lambda)} = {}^{\lambda}n^{t-1} + {}^{\lambda}n^{t-2}N'$ ecc., la quale, perchè gli N appartengono ai valori di x, si potrebbe con maggior chiarezza scriver così; $Z^{(t, x+\lambda)} = {}^{\lambda}n^{t-1} + {}^{\lambda}n^{t-2x}N' + {}^{\lambda}n^{t-3x}N'' + {}^{\lambda}n^{t-4x}N''' \ldots + {}^{x}N^{n-1}$.

26. Includendo, come abbiam detto, i termini generali delle nostre serie trovati col presente metodo la necessità di formare una o più serie che comincino dal primo termine fino a quello di posto t, e togliendo ciò la naturale indipendenza, che le forme de' lor valori devono avere; per dare ad essi queste forme io non veggo per ora altro partito che quello di ricorrere alle usitate regole, per mezzo delle quali, conosciuto che sia il grado delle serie proposte, e il numero sì delle radici eguali che disuguali nelle scale di relazione che lor competono, si presentano nel loro vero aspetto questi termini generali. Dobbiam però confessar con piacere, che all' ottenimento di un tal fine ci riesce di molta utilità l' equazione generalissima $Z^{(t, x+\lambda)} = Z^{(t-x, x+\lambda)} + Z^{(t, x+\lambda-1)} \ldots\ldots (k)$, la quale è frutto de' nuovi simboli e abbraccia tutte le serie del problema. Con ciò in fatti io non ho bisogno d' altro che di sapere il grado della ricor-

rente per le ipotesi di $x=2$, $\lambda=0$; e la equazione (k) mi basta per conoscere i gradi di tutte le altre serie, senza aver da trovarli a tentone, come far dovrebbesi, quando si mancasse di qualche guida. Fatta pertanto la supposizione di $x=2$, $\lambda=0$, questa ci porta alla serie 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 ecc. . . . . . (C), che è la 2.ª delle serie delle maniere (§. 2.); ed essa, come si può veder facilmente, è una ricorrente di 3.° grado, che ha per scala di relazione l'equazione $z^3-z^2-z+1=(z-1)(z^2-1)=0$. Cerchisi adesso di qual grado sia la susseguente serie (D) che nasce dal supporre $x=3$, $\lambda=0$. Coll' uso di questi valori l'equazione (k) diventa $Z^{(t,3)}-Z^{(t-3,3)}=Z^{(t,2)}$. Ora se fosse $Z^{(t,3)}-Z^{(t-3,3)}=0$, la teoria delle ricorrenti semplici ci avviserebbe subito, che la serie spettante al termine generale $Z^{(t,3)}$ è ricorrente di 3.° grado. Dunque essendo $Z^{(t,3)}-Z^{(t-3,3)}=Z^{(t,2)}$, e sapendosi che $Z^{(t,2)}$ è il termine generale d'un' altra ricorrente di 3.° grado, ne viene per conseguenza, che $Z^{(t,3)}$ quando appartiene alla serie (D), la costituisce una ricorrente di 6.° grado. Così per la 3.ª (E) abbiam l'ipotesi di $x=4$, $\lambda=0$, a cui corrisponde l'equazione $Z^{(t,4)}-Z^{(t-4,4)}=Z^{(t,3)}$. Il primo membro di questa eguagliato a zero ci porterebbe a una serie di 4.° grado. Ma $Z^{(t,3)}$ vuole una serie di 6.° Dunque (E) è ricorrente di 10.° grado. Ragionando similmente per le seguenti serie (F) ecc. si fa palese, che nella costante supposizione di $\lambda=0$, all' equazione $Z^{(t,x)}=Z^{(t-x,x)}+Z^{(t,x-1)}$ del valore generico x appartiene una ricorrente di grado $\dfrac{(x+1)x}{2}$.

27. Passiamo presentemente alle 1.ᵉ serie di sottrazione (G), (H), (I) ecc. (§. 9.) per le quali è sempre $\lambda=1$, e vale l' equazione $Z^{(t,x+1)}-Z^{(t-x,x+1)}=Z^{(t,x)}$ ovvero $Z^{(t,x)}-Z^{(t-(x-1),x)}=Z^{(t,x-1)}$. Ommessa la serie ($G$) che è parallela si dia principio dalla (H) che esige l' ipotesi di $x=2$; ed essendo essa la serie aritmetica de' numeri naturali, considerata come ricorrente, sarà di 2.° grado e le corrisponderà il termine generale $Z^{(t,2)}$. Sia poi $x=3$, cioè si voglia conoscere il grado di (I). Per questa avremo $Z^{(t,3)}-Z^{(t-2,3)}=Z^{(t,2)}$; e se fosse $Z^{(t,3)}-Z^{(t-2,3)}=0$, sarebbe $Z^{(t,3)}$ il termine generale d' una serie di 2.° grado. Sicchè

non essendo eguale a zero quel 1.° membro, ma bensì eguale a $Z^{(t,2)}$ che richiede similmente una serie di 2.° grado, $Z^{(t,3)}$ apparterrà a una ricorrente di 4.° e di tal grado sarà (I). All' istessa maniera discorrendo, troveremo (L) di 7.° grado, (M) di 11.° ecc., onde generalmente la 1.ª serie di sottrazione che spetta al num.° x sarà del grado $\frac{x(x-1)}{2}+1$.

28. Per le prime serie di addizione si fa $\lambda=2$, e abbiam l' equazione $Z^{(t,x)}-Z^{(t-(x-2),x)}=Z^{(t,x-1)}$, essendo (C) la 1.ª serie dell' ipotesi $x=2$, che dà $Z^{(t,2)}$ per termine generale della ricorrente di 3.° grado. Se $x=3$ nasce $Z^{(t,3)}-Z^{(t-1,3)}=Z^{(t,2)}$, dove il 1.° membro esige una serie di 1.° grado, e l' omogeneo di comparazione $Z^{(t,2)}$ una di 3.°; e quindi a $x=3$ compete una serie di 4.°. Parimente le serie di 6°., 9°., 13.° ecc. saran volute dalle supposizioni di $x=4$, 5, 6 ecc., e però il grado della serie spettante a x verrà esibito dalla formola $\frac{(x-1)(x-2)}{2}+3$.

29. Spingendo avanti l' indagine, le 2.ᵉ serie di sottrazione pel valore generico x si troveranno del grado $\frac{(x-2)(x-3)}{2}+6$, competendo ad esse l' ipotesi di $\lambda=3$; le 2.ᵉ di addizione sono del grado $\frac{(x-3)(x-4)}{2}+10$, ecc., onde trarrem finalmente per le serie del valore generale λ la formola del grado $=\frac{\left(x-(\lambda-1)\right)(x-\lambda)}{2}+\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}$, avvertendo che in ciascun dei sistemi di queste serie la prima da notarsi è sempre quella, a cui corrisponde l' ipotesi di $x=\lambda$.

30. Acquistata che sia la notizia del grado della ricorrente espresso dalla formola universale $\frac{\left(x-(\lambda-1)\right)(x-\lambda)}{2}+\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}$...... (u), si fa che tanti debbono essere i suoi moltiplicatori, che generano la scala di relazione, quanto è

il numero (u), e che per la loro determinazione fa duopo aver noti i primi termini della ferie di num.° $2(u)$. Ora questo potrebbe talvolta riuscire di troppo grande imbarazzo, se una riflessione opportuna non ci minorasse notabilmente la molestia del calcolo e non ci agevolasse la risoluzione delle equazioni lineari che contengono i suddetti moltiplicatori, obbligandoci soltanto ad aver dati nella serie termini di numero $(u)+1$. Cominciamo dalle 1.e serie delle maniere, e si prenda in mano la serie (D), a cui si riferisce l' equazione $Z^{(t,3)}=Z^{(t-3,3)}+Z^{(t,2)}$. E' cosa chiara, che nella precedente serie (C), che corrisponde all' ipotesi di $x=2$ i due termini avanti al primo son zero, essendo il 3.° e il 4.° alla sinistra -1, -1, il 5.° e il 6.°, -2, -2 ecc. Fatto pertanto $t=3$, $t=2$, $t=1$, $t=0$, $t=-1$, per la serie (D) nascono le equazioni;

1.a $Z^{(3,3)}=Z^{(0,3)}+Z^{(3,2)}$

2.a $Z^{(2,3)}=Z^{(-1,3)}+Z^{(2,2)}$

3.a $Z^{(1,3)}=Z^{(-2,3)}+Z^{(1,2)}$

4.a $Z^{(0,3)}=Z^{(-3,3)}+Z^{(0,2)}$

5.a $Z^{(-1,3)}=Z^{(-4,3)}+Z^{(-1,2)}$

Ma $Z^{(3,3)}=2$, $Z^{(3,2)}=2$. Dunque la 1.a darà $Z^{(0,3)}=0$. Nella 2.a abbiamo $Z^{(2,3)}=1$, $Z^{(2,2)}=1$, e così nella 3.a $Z^{(1,3)}=1$, $Z^{(1,2)}=1$. Quindi $Z^{(-1,3)}=0$, $Z^{(-2,3)}=0$. Parimente essendo nella 4.a $Z^{(0,3)}=0$ $Z^{(0,2)}=0$, e nella 5.a $Z^{(-1,3)}=0$, $Z^{(-1,2)}=0$, saranno necessariamente $Z^{(-3,3)}=0$, $Z^{(-4,3)}=0$. Laonde in (D) sicuramente 5 termini innanzi al primo son zero. Non sarà però nullo il 6.°, avendosi per esso l' equazione $Z^{(-2,3)}=Z^{(-5,3)}+Z^{(-2,2)}$, dove, perchè $Z^{(-2,3)}=0$, e $Z^{(-2,2)}=-1$, debb' essere $Z^{(-5,3)}=1$. Termina pertanto nella serie protratta alla sinistra il numero de' zero al 5.° posto; ed avendo essa 6 moltiplicatori, come deducesi dalla formola (u) modificata alle ipotesi di $\lambda=0$, $x=3$, risulta che i termini zero anteriori al primo sono di num.° $(u)-1$. La stessa conclusione trarremo dall' indole della serie (C) la quale è di 3.° grado ed ha 2 soli termini al primo che sono $=0$. Ed adattando il raziocinio alle altre serie (E), (F) ecc. resterà sempre verificata la proposizione, che il 1.° termine di que-

ſte ſerie ſarà preceduto da $(u)-1$ termini di valor nullo. E' ora evidente il vantaggio che ci vien prodotto nel calcolo da una tal proprietà, e ci ſervirà d' eſempio la ſerie (D) di cui vuolſi determinare i 6 moltiplicatori, che ſuppongo eſſere; a, b, c, d, e, f. Segno di eſſa i 7 primi termini, premetto i 5 termini zero, e ſottopongo i 6 moltiplicatori, come qui ſi vede;

$$0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7 \text{ ecc.}$$
$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$$

Eſeguite poi le conſuete moltiplicazioni trovo ſubito $f=1$, e con altre equazioni ſempliciſſime $e=1$, $d=0$, $c=-1$, $b=-1$, $a=1$, onde riſulta per (D) la ſcala di relazione $z^6-z^5-z^4+z^2+z-1=0$, ovvero $(z-1)(z^2-1)(z^3-1)=0$. Senza lo ſcoprimento di tal proprietà mi ſarebbe convenuto trovar 12 termini della ſerie, e poi riſolvere 6 equazioni contenenti tutti i 6 moltiplicatori indeterminati, il che non ſarebbe ſtato di piccolo incomodo.

31. Non ci vien meno la ſteſſa regola degli $(u)-1$ zero termini innanzi al primo per le altre ſerie di ſottrazione e di addizione. Conſideriam per eſempio le ſerie delle 1.ᵉ ſottrazioni. Io veggo che quando $x=2$, eſſendo la competente ſerie (H) di ſottrazione una ſerie aritmetica, il termine anteriore al primo debb' eſſere neceſſariamente zero, e quindi $Z^{(0,2)}=0$; ma non così ſuccede dei termini ulteriori alla ſiniſtra, i quali ſono -1, -2 ecc., cioè $Z^{(-1,2)}=-1$ ecc. Ora quanti termini eguali a zero avrà la ſuſſeguente ſerie (I)? Per queſta vale l' equazione $Z^{(t,3)}=Z^{(t-2,3)}+Z^{(t,2)}$, onde fatto ſucceſſivamente $t=2$, 1, 0, naſceran le equazioni;

$$1.^a\ Z^{(2,3)}=Z^{(0,3)}+Z^{(2,2)}$$
$$2.^a\ Z^{(1,3)}=Z^{(-1,3)}+Z^{(1,2)}$$
$$3.^a\ Z^{(0,3)}=Z^{(-2,3)}+Z^{(0,2)}$$

E perchè (§. 9.) $Z^{(2,3)}=2$, $Z^{(2,2)}=2$, ſarà $Z^{(0,3)}=0$. Così per eſſere $Z^{(1,3)}=1$; $Z^{(1,2)}=1$, avremo $Z^{(-1,3)}=0$; e da ultimo anche $Z^{(-2,3)}=0$, perchè $Z^{(0,3)}$ e $Z^{(0,2)}$ ſon zero. Oltre di queſti 3 non abbiamo altri termini precedenti di valor nullo; e ſiccome (I) è una ricorrente di 4.° gra-

do, e (H) di 2.°, realmente i termini zero che anticipano il primo ſono di num.° $(u)-1$; il che ſi troverà realizzato non ſolo nelle ſuſſeguenti ſerie (L), (M) ecc., ma in tutte le altre di addizione o di ſottrazione, che ſon richieſte dal problema.

32. Facilitandoſi con tale avvertenza il ritrovamento de' reſpettivi moltiplicatori nelle anzidette ſerie, non ſarà più che un affar di calcolo il determinar la forma delle ſcale di relazione che ad eſſe appartengono. Io credo bene di metterle qui tutte ſotto un ſol punto di viſta, perchè procedendo eſſe con una legge aſſai chiara ſi poſſa ad ogni caſo protrar la ſerie delle ſcale quanto biſogna.

Per le 1.^e ſerie delle maniere; $(z-1)(z^2-1)(z^3-1)\ldots(z^x-1)=0$

2.^e di ſottrazione; $(z-1)^2(z^2-1)(z^3-1)\ldots(z^{x-1}-1)=0$

3.^e di addizione; $(z-1)^2(z^2-1)^2(z^3-1)\ldots(z^{x-2}-1)=0$

4.^e di ſottrazione; $(z-1)^2(z^2-1)^2(z^3-1)^2(z^4-1)\ldots(z^{x-3}-1)=0$

⋮ ⋮

$\left(\frac{x+2}{2}\right)^{esime}$; $(z-1)^2(z^2-1)^2(z^3-1)^2\ldots(z^{x:2}-1)^2=0$, ſe x è pari

$\left(\frac{x+1}{2}\right)^{esime}$; $(z-1)^2(z^2-1)^2(z^3-1)^2\ldots(z^{(x-1):2}-1)^2(z^{(x+1):2}-1)=0$, ſe x è diſpari

⋮ ⋮

$x.^{esima}$; $(z-1)^2(z^2-1)(z^3-1)\ldots(z^{x-1}-1)=0$

$(x+1).^{esima}$ $(z-1)(z^2-1)(z^3-1)\ldots(z^x-1)=0$.

Sinchè il num.° delle ſuddette ſcale è minore di $\frac{x+2}{2}$ ſe x è pari, o minore di $\frac{x+1}{2}$ ſe x è diſpari, ſi accettino le forme delle prime ſcale notate; ma quando, ſecondo che x è pari o caſſo, ſi arriva al num.° $\frac{x+2}{2}$, ovvero $\frac{x+1}{2}$, ſi

debbono

debbono assumere le forme che a questi numeri corrispondono. Dalla equazione $(x+1)^{esime}$ risalendo sino alla $\left(\frac{x+1}{2}\right)^{esima}$, o $\left(\frac{x+2}{2}\right)^{esima}$, ritornan le stesse equazioni che sonosi notate discendendo dalla prima sino alla stessa $\left(\frac{x+1}{2}\right)^{esima}$ o $\left(\frac{x+2}{2}\right)^{esima}$; per la qual regola deve apparir due volte la equazione $\left(\frac{x+1}{2}\right)^{esima}$ se x è dispari, e una solvolta la equazione $\left(\frac{x+2}{2}\right)^{esima}$, se x è pari.

33. Ecco ora tutto preparato per lo stabilimento de' veri termini generali delle nostre serie. Alle loro equazioni di relazione si dia quella forma che fa veder separate le radici eguali dalle disuguali, e poi si applichino ad esse le teorie esposte diffusamente nella Memoria che va innanzi a questa Appendice, ricordandosi nello stesso tempo di ciò che si è detto al §. 15. relativamente agl' ingressi delle diverse serie di sottrazione e di addizione, onde in (A) limitata al termine p prendendo x termini si abbia il giusto numero delle maniere, con cui si può formare una data somma. Sia per esempio $x=2$. Questa ipotesi esige 3 serie; la 1.ª delle maniere, la 2.ª di sottrazione, e la 3.ª di addizione. La scala della 1.ª è $(z-1)(z^2-1)=0$, ovvero $(z-1)^2(z+1)=0$; quella della 2.ª che vien data dalla formola $\left(\frac{x+2}{2}\right)^{esima}$ è $(z-1)^2=0$; e la 3.ª è poi il ritorno della 1.ª Di questa si troverà il termine generale espresso dalla seguente equazione; $Z^{(t,2)}=\frac{2t+1}{4}-\frac{(-1)^t}{4}$; e per la 2.ª di sottrazione sarà $Z^{(t',2)}=t'$; finalmente per la 3.ª $Z^{(t'',2)}=\frac{2t''+1}{4}-\frac{(-1)^{t''}}{4}$. Ripresa pertanto l' espressione generale degl' indici de' termini (§. 15.);

$t^{\lambda} = t - \frac{\lambda^2 - \lambda(1 + 2p - 2x)}{2}$, e fatto in essa $x = 2$, e successivamente $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, avremo $t' = t + 1 - p$; $t'' = t + 1 - 2p$. Si voglia ora sapere in quante maniere con 2 termini della serie aritmetica che va sino al num.° 30 si possa fare la somma 40. Poichè in genere $t = s + 1 - \frac{x^2 - x}{2}$ (§. 4.), essendo $s = 40$, $x = 2$, sarà $t = 38$ e $p = 30$; il che dà $t' = 9$, $t'' = -21$; e quest' ultimo valore riuscendo negativo significa che non è ancora entrata la 3.ª serie, e che bastano le 2 prime. Onde colle sostituzioni avremo $Z^{(38,2)} = Z^{(t,2)} = \frac{77}{4} - \frac{1}{4} = 19$; e $Z^{(t',2)} = Z^{(9,2)} = 9$; e quindi $Z^{(38,2)} - Z^{(9,2)} = 10$, cioè in 10 maniere diverse, ove sia $x = 2$, e $p = 30$, si potrà far la somma 40.

34. La somma massima, che si può formare con 2 in 30 numeri di (A), è $30 + 29 = 59$, cui corrisponde $t = 57$, che è pure il massimo indice de' termini. Ma l' indice t'' che appartiene alla 3.ª serie di addizione vien dato dalla ugualità $t'' = t + 1 - 2p$, la quale posto $t = 57$, $p = 30$, si cangia in $t'' = 58 - 60 = -2$. Dunque è manifesto, che non è ancora entrata la 3. serie quando siamo alla massima delle somme fattibili; il che vuol dire che questa 3.ª serie riesce sempre inoperosa; anzi, perchè in genere la 3.ª serie ha il suo ingresso alla somma $s = \frac{6 + 4p - 3x + x^2}{2}$ (§. 15), cioè pel nostro caso alla somma $s = 2 + 2p$, essendo $2 + 2p$ sempre maggiore di $p + p - 1$ che è la massima delle somme, non potrà mai essa avere impiego alcuno nella determinazione delle maniere cercate, e servirà solo per render nullo il numero di queste maniere, qualora ci proponessimo alcuna somma fuor delle fattibili e maggior della massima, cosicchè il numero delle maniere onde formarsi non potesse divenir zero colle sole prime 2 serie. Ciò avverrebbe, per dirne pur una, alla somma 66, cui compete $t = 64$, rimanendo invariata l' ipotesi di $p = 30$. Quindi nasce $t' = 35$;

$t'' = 5$; e però $Z^{(t,2)} = \frac{129}{4} - \frac{1}{4} = 32$; $Z^{(t',2)} = 35$; $Z^{(t'',2)} = \frac{11}{4} + \frac{1}{4} = 3$; e finalmente $Z^{(t,2)} - Z^{(t',2)} + Z^{(t'',2)} = 32 - 35 + 3 = 0$, come debb' essere.

35. Da ciò che s' è detto ne' due precedenti §§. si può vedere di quanta utilità riesca il segregare dalle nostre indagini quelle serie, che risguardando unicamente le somme maggiori della massima, sul numero delle maniere cercate non possono avere alcuna influenza; la qual cosa può effettuarsi in qualunque ipotesi di x e di p. Ma da un'altra fonte trarremo ancora maggiori vantaggi per abbreviarci il calcolo e ridurci al minor numero possibile di serie che bastino a farci ottenere l' intento. A quest' oggetto dobbiam ricordarci delle 2 parti ascendente e discendente (§. 4.), in cui si possono considerar divise le serie, i cui termini esprimono il preciso numero delle maniere, onde formare qualsisia fattibil somma. Ivi notammo, che nelle dette 2 parti i termini della serie egualmente distanti da quello, che ha il massimo numero di maniere, sono tra loro eguali, e che abbiamo questo massimo numero, ove sia l' indice de' termini $t = 1 + \frac{px - x^2}{2}$, cioè quando sia la somma $S = \frac{x(p+1)}{2}$. Onde nell' equazione del §. 15; $t^\lambda = t - \frac{\lambda^2 - \lambda(1 + 2p - 2x)}{2}$ surrogando in vece di t il valore $1 + \frac{px - x^2}{2}$, risulterà $t^\lambda = \frac{2 + px + 2\lambda x - (\lambda^2 + \lambda + 2\lambda p + x^2)}{2}$; e arriveremo al termine di mezzo della serie primitiva delle maniere senza che abbiano ancora avuto il loro ingresso le serie spettanti all' indice de' termini t^λ semprechè sia $2 + px + 2\lambda x < \lambda^2 + \lambda + 2\lambda p + x^2$, perchè in tal caso t^λ è negativo. Sia ora data una somma delle fattibili $s' > \frac{x(p+1)}{2}$, che deve necessariamente corrispondere a qualche termine della parte discenden-

te della medesima primitiva serie, e rappresenti s la somma equidistante dalla media S nella parte ascendente; per proprietà della serie aritmetica delle somme sarà $s = x(p+1) - s'$. Sicchè sebbene per la somma s' potrebbero aver luogo più serie, non essendo esse ancora entrate per la somma s e dovendo sì s che s' formarsi in egual numero di maniere, basterà dato s' trovar s e coll' impiego di minor numero di serie assegneremo a s' il quantitativo delle maniere che esige s; con che si fa un risparmio non indifferente di calcolo e di fatica.

36. Renderò sensibile questo vantaggio col seguente esempio. Assumo l' ipotesi di $x = 5$, la quale di sua natura esigerebbe 6 serie, e cerco quante di esse ne abbisognano per arrivare al termine medio nella prima. Per ottener ciò adatto l' equazione $t^{\lambda} = \frac{2 + px + 2\lambda x - (\lambda^2 + \lambda + 2\lambda p + x^2)}{2}$ al valore di $x = 5$, e risulta $t^{\lambda} = \frac{2 + 5p + 9\lambda - (\lambda^2 + 25 + 2\lambda p)}{2}$

Facciasi in questa $\lambda = 1$, e nasce $t' = \frac{11 + 5p - (26 + 2p)}{2}$.

Dunque la 1.ª delle sottrazioni avrà ingresso nella parte ascendente della serie primitiva delle maniere, quando sia $11 + 5p > 26 + 2p$, ovvero $p > 5$; il che vuol dire che entrerà sempre fuorchè nell'unico caso di $p = 5$. Passando consecutivamente all' ipotesi di $\lambda = 2$, diventa $t'' = \frac{20 + 5p - (29 + 4p)}{2}$; e in quest' ultimo membro debb' essere $20 + 5p > 29 + 4p$, cioè $p > 9$, perchè abbia luogo nella suddetta parte ascendente la nuova serie delle addizioni, e quindi se $p = 5, 6, 7, 8, 9$, le 2 prime sono sufficienti ed è inutile questa 3.ª serie. Facendo poi $\lambda = 3$, si ha $t''' = \frac{29 + 5p - (34 + 6p)}{2}$, nella qual formola si vede che necessariamente t''' è negativo, qualunque sia il valore di p; e molto più troverem negativi i valori di t'''', t''''', che riguardan le 2 ultime serie. Dal che inferiremo, che al più colle sole 3 prime serie ci verrà fatto di assegnare nella parte

ascendente della primitiva quel numero di modi che servono a formare qualsisia somma in tal parte collocata, e in conseguenza il num.° di modi, che compete a qualunque altra somma riferibile alla parte discendente. Pongo il caso che sia $p=30$ e la somma data 131. Poichè la somma media S diventa $=77\frac{1}{2}$, cioè le 2 somme medie sono 77, 78, appartiene 131 alla parte discendente della 1.ª serie. Laonde $s'=131$, e però $s=24$, potendosi in tante maniere formare la somma 131 in quante si forma la somma 24, che è situata nell' indice de' termini $t=10$. Preso pertanto il 10.° nella serie (F) (§. 2.), sarà $Z^{(10,5)}=23$; e per ragion della formola generale $t^{\lambda}=t-\frac{\lambda^2-\lambda(1+2p-2x)}{2}$, colla sostituzione di $\lambda=1$ e colle altre determinazioni fissate, avremo $t'=-16$. Dunque al 10.° termine di (F) non è ancora entrata la 1.ª serie di sottrazione; e però diremo, che la somma 24, e in conseguenza la data somma 131 ha per la sua formazione 23 combinazioni, se si prendono nella serie de' numeri naturali, che termina al 30^{esimo}, cinque diversi numeri.

37. Chiuderemo questa Appendice col presentare i termini generali delle serie, che convengono alle 3 ipotesi di $x=2$, $x=3$, $x=4$ per conoscere il valore di qualunque termine collocato tra il primo e il termine di mezzo della 1.ª serie, aggiungendovi ancora le formole principali, alle quali si dee por mente, onde resti agevolata l' indagine delle maniere, con cui le somme vengono generate. E ciò affine di dare un esemplare di quello specchio, che dee mettersi innanzi agli occhi il calcolatore, ove gli piaccia d' investigar ciò che accada ne' maggiori valori della x. Si vedrà, che quando è $x=2$, basta la 1.ª serie all' intento, perchè l' altra di sottrazione subentra un termine dopo quello, che spetta alla somma media e riesce perciò inutile: nelle 2 altre ipotesi poi la sola serie di sottrazione combinata colla prima soddisfa pienamente al quesito.

(A) 1, 2, 3, 4, 5 .... p

1.ª ip. $x = 2$

Serie delle somme; 3, 4, 5, 6 .... $2p - 1$
Somma minima; 3; Somma massima; $2p - 1$;
Somma media; $p + 1$. Posto del termine corrispondente; $p - 1$
Somma all' ingresso della 2.ª serie; $p + 2$. Posto del termine nella 1.ª; p
$t = s - 2$; $t' = t - p + 1$; $s = 2p + 2 - s'$
$$Z^{(t,2)} = \frac{2t+1}{4} - \frac{(-1)^t}{4}; \quad Z^{(t',2)} = t'.$$

2.ª ip. $x = 3$

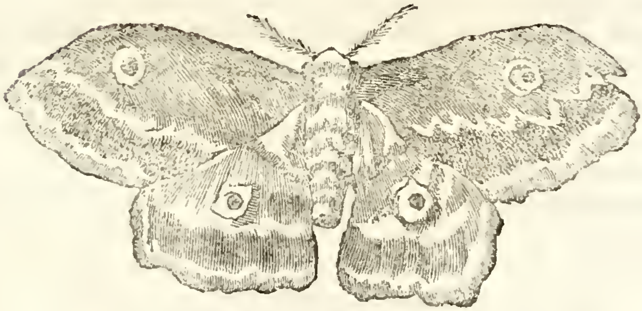
Serie delle somme; 6, 7, 8, 9, 10 .... $3p - 3$
Somma minima; 6; Somma massima; $3p - 3$
Somma media; $\frac{3p+3}{2}$; Posto del termine corrispondente; $\frac{p-3}{2}$
Somma all' ingresso della 2.ª serie; $p + 4$; Posto del termine nella 1.ª; $p - 1$
$t = s - 5$, $t' = t - p + 2$; $s = 3p + 3 - s'$. E chiamate α, α' le 2 radici immaginarie dell' unità cuba;
$$Z^{(t,3)} = \frac{6t^2 + 24t + 17}{72} - \frac{(-1)^t}{8} + \frac{\alpha^{t-1} + \alpha'^{t-1}}{9};$$
$$Z^{(t',3)} = \frac{2t'^2 + 4t' + 1}{8} - \frac{(-1)^{t'}}{8}.$$

3.ª ip. $x=4$

Serie delle somme; 10, 11, 12, 13 .... $4p-6$
Somma minima; 10; Somma massima; $4p-6$
Somma media, $2p+2$; Posto del termine corrispondente; $2p-7$
Somma all' ingresso della 2.ª serie; $p+7$. Posto del termine nella 1.ª, $p-2$
$t=s-9$; $t'=t-p+3$; $s=4p+4-s'$. E chiamate α, α' le 2 radici immaginarie dell' unità cuba; e β, β' le 2 immaginarie dell' unità quadrato-quadrata;

$$Z^{(t,4)} = \frac{2t^3+24t^2+81t+68}{288} - \frac{(t+4)(-1)^t}{32} - \frac{(\alpha^{t+1}+\alpha'^{t+1})}{27} - \frac{2(\alpha^t+\alpha'^t)}{27} + \frac{\beta^{t-1}+\beta'^{t-1}}{16}$$

$$Z^{(t',4)} = \frac{4t'^3+30t'^2+60t'+25}{144} - \frac{(-1)^{t'}}{16} - \frac{(\alpha^{t'+1}+\alpha'^{t'+1})}{27} - \frac{2(\alpha^{t'}+\alpha'^{t'})}{27}.$$



TENTATIVO

Per migliorare i Cannocchiali Acromatici proposti da Eulero

Del Sig. Ab. BARNABA ORIANI Astronomo nel Regio Osservatorio di Milano.

VErso la metà del nostro secolo si fece l' importante rivoluzione nell'Ottica colla invenzione dei Cannocchiali Acromatici. Il gran *Neuton* aveva asserito, che la dispersione dei colori nei diversi corpi trasparenti era proporzionale alla forza refrattiva dei medesimi. Il che se fosse stato vero, la confusione nei cannocchiali prodotta dalla diversa refrangibilità dei raggi di luce sarebbe stata irrimediabile, come dopo il *Neuton* dimostrarono tutti gli Autori d' Ottica. Nel 1747 *Eulero* cominciò a sospettare che combinando diverse sostanze trasparenti si potesse arrivare a togliere la dispersione dei colori senza levare tutta la rifrazione, e propose un oggettivo composto di due lenti di vetro in mezzo alle quali vi fosse dell' acqua; ma *Dollond* seguendo di mano in mano tutti i principj d' *Eulero*, appoggiato alle sperienze fatte da *Neuton*, dimostrò, che quest' oggettivo avrebbe dovuto avere un' apertura infinitamente grande, e per conseguenza sarebbe stato impraticabile.

Il rinnomato *Clairaut* dimostrò subito dopo con rigore geometrico che le speculazioni d' *Eulero* erano totalmente insussistenti, e che s' opponevano alle celebri sperienze neutoniane citate da *Dollond*. Klingenstierna, geometra Svezzese, in vista dei progetti d' *Eulero* esaminò attentamente le sperienze, ed i principj stabiliti da *Neuton*. Nel 1755 mandò a *Dollond* una piccola Memoria in cui sostenne che il risultato dell' esperienza 8 del lib. 2. dell' Ottica di *Neuton* si poteva metter in dubbio. *Dollond* si mise tosto a ripetere que-

ste sperienze con oggettivi composti di vetro, e d' acqua secondo le prime idee di *Eulero*; ma non riuscirono troppo felicemente. Adoperò in seguito due diverse sorta di vetri conosciuti coi nomi di *Flint*, e *Crown* e riuscì a comporre un sistema di tre prismi, cioè due di *Crown*, ed uno di *Flint* in maniera che gli oggetti veduti attraverso due prismi posti cogli angoli refringenti in parti opposte compajono senza alcuna rifrazione, ma con i colori; e se si guardano con tutti e tre i prismi, gli oggetti si veggono fuori di luogo rispetto alla vista diretta, cioè si ha la rifrazione senza che compaja alcun colore, ossia si ottiene la rifrazione senza alcuna separazione, o dispersione di raggi colorati, ciò che a *Neuton* era parso impossibile.

Tosto che fu conosciuta una scoperta così decisiva, ed interessante, i più celebri Matematici allora viventi, *Clairaut*, *d' Alembert*, *Eulero* per mezzo della Geometria, e dell' Analisi ricercarono le regole per costruire degli oggettivi perfetti, cioè senza colori, e liberi ancora dalla confusione prodotta dalla sfericità delle lenti. E *Dollond* medesimo ajutato più dalle sue sperienze che dalla teoria compose degli oggettivi a due, ed a tre lenti di *Flint*, e *Crown* esenti sensibilmente da tutti e due i difetti. Ebbimo pure in Italia un valentissimo Geometra il P. Boscovich, il quale in varie dissertazioni pubblicate negli Atti dell' Accademia di Bologna ed in Vienna, e più specialmente nei cinque Volumi dei suoi Opuscoli stampati l' anno scorso a Bassano, ci spiegò le teorie dei cannocchiali acromatici, e ci insegnò con semplici macchinette da esso inventate, o perfezionate a determinare le qualità rifrattive, e distrattive dei varj vetri.

L' incomparabile *Eulero*, che aveva data la prima spinta a questa scoperta, trattò diffusamente dei difetti, e dei rimedj di ogni sorta di cannocchiali in molte Memorie inserite negli Atti delle principali Accademie, e segnatamente nei Volumi dell' Accademia di Berlino per gli anni 1757, 1762. Pubblicò in seguito nel 1769 la sua Diottrica, che

un gran Matematico (*a*) qualifica di Trattato completo ſu queſta materia; e che non ſolamente contiene formole belliſſime, e generaliſſime eſpoſte con tutto il dettaglio che ſi può deſiderare; ma ancora le loro applicazioni ad un gran numero di caſi relativi ai cannocchiali, ai teleſcopj a rifleſſione, ed ai microſcopj. Non contento però *Eulero* d' aver applicate a molti eſempj particolari le ſue formole, fece pubblicare dal Sig. *Fuſs* rinomato Matematico di Pietroburgo un' altr' opera (*b*) unicamente deſtinata alla pratica. In eſſa dà le dimenſioni di tre oggettivi, uno a due lenti di *Flint*, e *Crown*, e gli altri due a tre lenti, e prendendo il più perfetto dei tre, egli inſegna di quali curvature debbano eſſere le lenti componenti l' oggettivo, e le oculari; a quale diſtanza debbano eſſere collocate l' une dall' altre per ottenere differenti ingrandimenti, e per le diverſe ſorta di cannocchiali aſtronomici, e terreſtri; e nella prefazione di queſt' opera *Eulero* ſoſtiene (*c*) che i cannocchiali da eſſo propoſti ſono molto più perfetti degli acromatici del celebre *Dollond*, e che da eſſi ſi poſſono ſperare molte importanti ſcoperte nell' Aſtronomia.

L' oggettivo perfetto di *Eulero* è diverſo da quelli eſeguiti dal *Dollond* e da quelli propoſti dagli altri Matematici. In queſti le lenti ſono unite l' una all' altra immediatamente, e quello ha le lenti alquanto diſtaccate, di maniera che ſe nell' eſecuzione l' artiſta ha fatto qualche piccolo sbaglio intorno alle curvature preſcritte, vi ſi può molte volte rimediare, accorciando, o allungando un tantino la diſtanza delle lenti fra loro. Queſta precauzione di non addoſſare immediatamente

---

(*a*) Il Sig. *de la Grange* Nouveaux Memoires de l' Acad. de Berlin pour l' année 1778 pag. 162.

(*b*) Il titolo intero dell' opera è il ſeguente; *Inſtruction détaillée pour porter les lunettes de toutes les differentes eſpéces au plus haut degrè de perfection dont elles ſont ſuſceptibles tirée de la Thèorie dioptrique de Mr.* Euler *le pere, & miſe à la portée de tous les Ouvriers en ce genre par Mr.* Nicolas Fuſs *avec la deſcription d' un Microſcope, qui peut paſſer pour le plus parfait dans ſon eſpece, & qui eſt propre a produire tous les groſſiſſemens qu' on voudra. A' St. Petersbourg* 1774.

(*c*) *On verra par là ſuffiſamment, que les lunettes de* Dollond *connues ſous le nom d' achromatiques, peuvent être portèes à un beaucoup plus haut dégrè de perfection, & qu' ainſi l' on a lieu de ſe promettre les plus importantes decouvertes dans l' Aſtronomie.* Nell' opera ſopra citata pag. 9.

le lenti l' una all' altra si trova usata ancora in molti esempj della sua Diottrica. Ivi però la distanza del mezzo d' una lente al mezzo dell' altra è molto più piccola di quella prescritta nel suo oggettivo perfetto, ed eccede pochissimo la grossezza dei vetri, cosicchè le lenti appena appena non si toccano l' una l' altra. Quest' oggettivo è per un altro riguardo notabilmente diverso da quelli proposti nella sua Diottrica. Esso ha due lenti isosceli, e la terza sola ha le due facciate di diversa curvatura dererminate dall' equazione, che rende nullo, o almeno insensibile l' errore prodotto dalla sfericità delle lenti. Ma in quasi tutti gli oggettivi della sua Diottrica le lenti hanno le facciate di curvatura diversa. Una lente, che debba essere di una data distanza focale, può avere le due curvature l' una dall' altra diverse in infinite maniere, e quel numero, che determina certe curvature a preferenza di tutte le altre, è chiamato da *Eulero numero arbitrario*, ed è *minimo* quando si fa eguale all' unità, ed è sempre maggiore dell' unità quando si vogliono le due facciate della lente di eguale sfericità, ossia quando la lente è isoscele. Nel caso poi del *minimo* si ha il vantaggio di non deviare molto dai risultati indicati dalle formole algebraiche, quantunque l' artista faccia le curvature delle lenti un poco diverse dalle prescritte. Onde nella sua Diottrica *Eulero* ha sempre preferito di fare il *numero arbitrario* eguale all' unità piuttosto che alla quantità, che rende le due facciate della lente eguali fra loro.

I famosi oggettivi di *Dollond* hanno una lente isoscele, e le facciate di ciascuna delle altre due lenti sono bensì diseguali, ma non di tanto quanto importerebbe l' ipotesi del *numero arbitrario* minimo. E questo forse vien fatto da *Dollond* per evitare le curvature troppo grandi, che impediscono di dare una considerevole apertura all' oggettivo. E forse ancora per la stessa ragione ha *Eulero* abbandonata la sua prima idea del *numero arbitrario* minimo, col sostituire nel suo oggettivo perfetto due lenti isosceli a quelle di troppo diverse curvature, tanto più che nell' esecuzione viene notabilmente diminuita la spesa, potendosi lavorare l' oggettivo con quattro sole pattine, mentre negli oggettivi della Diottrica ne abbisognano sei.

Essendomi venuta la curiosità di vedere in qual modo aveva *Eulero* ricavato dalle formole generali della sua Diottrica l' indicato oggettivo perfetto, mi sembrò che questo poteva ridursi ad una molto maggiore perfezione, ed a maggiore facilità, e minor dispendio per l' esecuzione. L' oggettivo, che sono per proporre combinato con oculari simili a quelli di *Eulero*, dà gli stessi ingrandimenti, che dà il suo, colla medesima chiarezza, egual campo e distinzione, e pure il cannocchiale risulta meno lungo dell' Euleriano nella ragione di 4 a 5. Così, a cagion d' esempio, per un ingrandimento di 320 volte in un cannocchiale astronomico a due oculari la distanza dell' oggettivo dal sito dell' occhio è per l' *Eulero* di 85 pollici e $\frac{1}{2}$, ma col seguente oggettivo questa distanza non arriva a 69 pollici. Per lavorare l' oggettivo Euleriano vi vogliono quattro pattine, mentre pel seguente bastano tre sole. Finalmente, se non m' inganno, la correzione della confusione prodotta dalla diversa refrangibilità de' raggi, ossia l' acromatismo, sarà più esatto in questo, che in quello.

Mi servirò delle formole già dimostrate da *Eulero* nella sua Diottrica, e prenderò per primo esempio un cannocchiale Astronomico con un oggettivo triplo ed a due oculari. Sia dunque la ragione del seno d' incidenza al seno di rifrazione dall' aria nel vetro $= n$, per un' altra sorta di vetro sia questa ragione $= n'$. Le dispersioni di questi due vetri saranno fra loro come $dn : dn'$. Assumeremo con *Eulero* pel vetro inglese volgarmente detto *Crown-glass* $n = 1,53$; pel *Flint-glass* $n' = 1,58$, e $\frac{dn}{n-1} : \frac{dn'}{n'-1} = 7 : 10$. Facendo ora per brevità

$$\mu = \frac{n(4n-1)}{8(n-1)(n+2)}$$

$$\nu = \frac{4(n-1)^2}{4n-1}$$

$$\rho = \frac{4+n-2nn}{2(n-1)(n+2)}$$

$$\sigma = \frac{n(2n+1)}{2(n-1)(n+2)}$$

$$\tau = \frac{n\sqrt{(4n-1)}}{2(n-1)(n+2)}$$

e sarà

Pel Crown-glass	Pel Flint-glass
$n = 1,53$	$n' = 1,58$
$\mu = 0,9875$	$\mu' = 0,8724$
$\nu = 0,2196$	$\nu' = 0,2529$
$\rho = 0,2267$	$\rho' = 0,1414$
$\sigma = 1,6601$	$\sigma' = 1,5827$
$\tau = 0,9252$	$\tau' = 0,8775$

Si ponga ora la distanza dell' oggetto dalla I lente oggettiva $= a$, la distanza della sua immagine dalla stessa lente $= \alpha$. Queste due quantità a, α si sogliono chiamare da *Eulero distanze determinatrici*, da altri *fochi conjugati*, e da altri a si nomina *foco dei raggi incidenti* ed α *foco dei raggi rifranti*. Sieno inoltre b, β; c, γ le distanze determinatrici della II e III lente dell' oggettivo: essendo questo per ipotesi di tre lenti sarà γ il foco composto di tutte e tre; similmente sieno d, δ; e, ε le distanze determinatrici della prima, e della seconda oculare. Saranno le distanze tra la lente

I, e la II $= \alpha + b$
II, e la III $= \beta + c$
III, e la IV $= \gamma + d$
IV, e la V $= \delta + e$

Si faccia ora $\frac{a}{b} = -P$, $\frac{\beta}{c} = -Q$; $\frac{\gamma}{d} = -R$; $\frac{\delta}{e} = -S$;

$\frac{\beta}{b} = B$; $\frac{\gamma}{c} = C$; $\frac{\delta}{d} = D$; $\frac{\varepsilon}{e} = E$

e si ponga $B' = \frac{B}{B+1.}$; $C' = \frac{C}{C+1}$; $D' = \frac{D}{D+1}$; $E' = \frac{E}{E+1.}$.
le distanze focali delle lenti I, II, III, IV, V si chiamino p, q, r, s, t; e supponendo che la distanza a dell' oggetto dalla I lente sia infinita, si avrà $p - \alpha$. Per fare poi che i raggi sortano paralleli dall' ultima oculare si dovrà fare

$\varepsilon = \infty$, e sarà quindi $e = t$, e per conseguenza $E = \infty$, ed $E' = 1$.

Finalmente sia π la ragione della semiapertura della II lente alla sua distanza focale, π' la stessa ragione per la III lente, π'', e π''' per la IV, e V lente, ed esprimendo per m il numero delle volte che il diametro dell' oggetto viene ingrandito, cosicchè sia nel nostro caso $m = -PQRS$, per O la distanza dell' occhio dall' ultima oculare; e per ϕ il semidiametro del campo apparente di maniera che sia $\phi = \frac{\pi - \pi' + \pi'' - \pi'''}{m + 1}$, si avranno le seguenti equazioni per le distanze determinatrici.

$$\alpha = \frac{PQ}{BC}\gamma;\ b = \frac{-Q}{BC}\gamma;\ \beta = \frac{-Q}{C}\gamma;\ c = \frac{1}{C}\gamma$$

$$d = \frac{-1}{R}\gamma;\ \delta = \frac{-D}{R}\gamma;\ e = \frac{D}{RS}\gamma;$$

e le distanze focali saranno

$$p = \frac{PQ}{BC}\gamma;\ q = \frac{-B'Q}{BC}\gamma;\ r = \frac{C'}{C}\gamma;\ s = \frac{-D'}{R}\gamma,\ t = \frac{D}{RS}\gamma.$$

quindi gl' intervalli tra la

$$\text{I, e la II lente} = \alpha + b = \frac{Q\gamma}{BC}(P - 1)$$

$$\text{II, e la III} = \beta + c = \frac{\gamma}{C}(1 - Q)$$

$$\text{III, e la IV} = \gamma + d = \gamma\left(1 - \frac{1}{R}\right)$$

$$\text{IV, e la V} = \delta + e = \frac{-D\gamma}{R}\left(1 - \frac{1}{S}\right)$$

e la distanza dell' occhio

$$\text{dall' ultima oculare} = O = \frac{-\pi'''}{m\phi}t.$$

Queſti intervalli devono eſſere tutti poſitivi, diverſamente ne riſulterebbe un cannocchiale illuſorio (*a*).

Siccome le prime tre lenti, che formano l' oggettivo, devono eſſere tra loro poco diſtanti per non diminuire di troppo il campo apparente, dovranno per conſeguenza P, e $\mathfrak{Q}$ eſſere poco differenti dell' unità, e potremo ſupporre come nell' oggettivo perfetto d' *Eulero* $P = \frac{20}{19}$ e facendo il primo intervallo $\alpha + b$ eguale al ſecondo $\beta + c$, oſſia $\frac{\mathfrak{Q}}{BC}\gamma(P-1) = \frac{\gamma}{C}(1-\mathfrak{Q})$ avremo $\mathfrak{Q} = \frac{19B}{19B+1}$. Quindi ſiccome γ è poſitivo, e per ipoteſi $P > 1$, e $\mathfrak{Q} < 1$, acciocchè i due primi intervalli reſtino poſitivi dovranno eſſere B, e C poſitivi. Vedremo ben toſto che S deve eſſere neceſſariamente negativo, e per conſeguenza R poſitivo, onde l' ultimo intervallo $= \delta + e$ non può eſſere poſitivo a meno che non ſia D negativo.

Si avranno in ſeguito le equazioni ſeguenti.

$$\pi = \frac{(1-P)\phi}{B}$$

$$-\pi' = \frac{(1-P\mathfrak{Q})\phi - \pi}{C'}$$

$$\pi'' = \frac{(1-P\mathfrak{Q}R)\phi + \pi - \pi'}{D}$$

Per evitare gli angoli troppo grandi, e per avere nello ſteſ-

(*a*) Vennero alcune volte propoſte delle combinazioni di oculari affatto impraticabili appunto per non aver avuto riguardo alla qui indicata proprietà. Se per eſempio ſi voleſſero mettere due oculari in un cannocchiale aſtronomico in maniera che l' immagine reale ſtaſſe tra l' oggettivo e la prima oculare, ſi avrebbe neceſſariamente S poſitivo e maggiore dell' unità, R negativo, e D negativo, quindi l' intervallo tra le due oculari $= \delta + e$ riſulterebbe negativo, lo che ſarebbe un aſſurdo. Oltre di che ſe una tale combinazione foſſe praticabile, col togliere nello ſteſſo tempo il margine colorato degli oggetti, il campo apparente non riſulterebbe doppio, ma molto minore di quello, che ſi ottiene con una ſola oculare. Quindi ſi vede, che il progetto del celebre Artiſta *Ramsden* propoſto nelle Tranſazioni Filoſofiche della Società Reale di Londra per l' anno 1783 parte I pag. 94 non è eſeguibile.

so tempo un campo apparente più grande conviene fare isoscele l' ultima oculare, per lo che si potrà mettere

$-\pi''' = \frac{1}{4}$.

Il valore di ϕ è sempre una frazione molto piccola quando m è grande, e le quantità P, e PQ sono poco diverse dall' unità, onde π, e π' diventano piccolissimi, e si possono considerare come eguali a zero. Per tal modo B, e C restano tuttavia indeterminate, e la terza equazione si riduce a

$$\pi'' = \frac{(1 - PQR)\phi}{D}$$

Ci restano ora tre equazioni alle quali conviene soddisfare. La prima, che serve a togliere i colori cagionati principalmente dalle oculari sul margine degli oggetti è

$$0 = \frac{7\pi}{P} - \frac{10\pi'}{PQ} + \frac{7\pi''}{PQR} - \frac{7\pi'''}{PQRS}$$

Suppongo in questa equazione, e nelle seguenti, che la sola seconda lente dell' oggettivo sia di Flint, e tutte le altre sieno di Crown. I primi due termini di questa equazione per la ragione poc' anzi accennata si possono tralasciare, e si avrà

$$\pi'' = \frac{\pi'''}{S} = \frac{-1}{4S}$$

Per avere il più gran campo possibile bisogna prendere $\pi'' = \frac{1}{4}$, e fare la prima oculare isoscele convessa. Onde ne risulta $S = -1$. e per conseguenza avremo $PQR = m$, ossia $R = \frac{m}{PQ}$, ed il semidiametro del campo apparente sarà

$$\phi = \frac{\pi'' - \pi'''}{m+1} = \frac{1}{2(m+1)} = \frac{1718}{m+1} \text{ minuti di grado.}$$

L' equazione del paragrafo precedente colla sostituzione de' valori ora trovati dà il valore di D', cioè

$$D' = \frac{\phi(1 - PQR)}{\pi''} = \frac{2(m-1)}{m+1}$$

Sarà

Sarà quindi

$$D=\frac{D'}{1-D'}=\frac{-2(m-1)}{3m-1}$$

e nel caso di m molto grande sarà sensibilmente

$$D'=-2\,,\ \text{e}\ D=-\frac{2}{3}$$

La seconda equazione, che serve a togliere ogni confusione prodotta dalla diversa refrangibilità de' raggi, cioè che rende acromatico il cannocchiale, è

$$0=7-\frac{10}{B'.P}+\frac{7}{BC'.PQ}-\frac{7}{BCD'.PQR}+\frac{7}{BCD.PQRRS}$$

I due termini ultimi, che appartengono alle due oculari, sono molto piccoli rispetto ai primi quando m è un numero molto grande, per essere $PQR=m$, e $PQRS=-m$, onde si potranno considerare come nulli. Non è nemmeno necessario di soddisfare a quest' equazione con l' ultima esattezza, primo perchè la proporzione di $\frac{dn}{n-1}:\frac{dn'}{n'-1}=7:10$ può essere un tantino diversa nelle differenti paste di Flint, e Crown, e poi perchè un piccolo sbaglio nell' acromatismo non pregiudica molto alla bontà del cannocchiale (*a*). Avremo dunque

$$0=7-\frac{10}{B'.P}+\frac{7}{BC'.PQ}$$

sostituendo i valori di $B'=\frac{B}{B+1}$, $P=\frac{20}{19}$, $Q=\frac{19B}{19B+1}$, ne ricaveremo

$$C'=\frac{7(19B+1)}{10B(5B+19)}$$

e quindi

(*a*) Il Sig. *Beguelin* ha dimostrato (Memoires de l' Acad. de *Berlin* de l' an. 1763 pag. 19) che se in un dato cannocchiale l' aberrazione prodotta dalla sfericità delle lenti presa lungo l' asse, ossia *l' aberrazione longitudinale di sfericità* è per esempio di un pollice, per produrre un' eguale confusione nell' occhio colla dispersione de' colori fa d' uopo che l' aberrazione longitudinale di refrangibilità sia di 520 pollici.

$$C = \frac{C'}{1 - C'} = \frac{7(19B + 1)}{50BB + 57B - 7}$$

Delle due quantità indeterminate B, C non ce ne rimane ora che una sola in nostro arbitrio, poichè l'altra resta necessariamente determinata con questa equazione. *Eulero* prima di risolvere la terza, ed ultima equazione che viene in seguito, deve aver preso ad arbitrio $B = \frac{9}{5}$ il qual valore sostituito nelle due formole precedenti darebbe

$$C' = \frac{7(9.19 + 5)}{90(9 + 19)} = \frac{1232}{2520} = \frac{22}{45} = 0,4889$$

$$C = \frac{C'}{1 - C'} = \frac{22}{23} = 0,9565$$

Ma dalle dimensioni dell' oggettivo perfetto d' *Eulero* (*Instruction pour porter les lunettes au plus haut degré de perfection ecc.* pag. 28) si ricava $C = 1,2762$, che è molto diverso dal valore precedente. Dunque, se non mi sono ingannato nei calcoli, si dovrà dire che l' oggettivo proposto nell' opera citata non è acromatico quanto lo potrebbe essere. Mettendo nell' equazione generale dell' acromatismo

$$0 = \frac{dn}{n-1} - \frac{dn'}{n'-1} \cdot \frac{1}{B'P} + \frac{dn}{n-1} \cdot \frac{1}{BC'PQ}$$

i valori di $P = \frac{20}{19}$, $B = \frac{9}{5}$, $Q = \frac{19B}{19B + 1} = \frac{171}{176}$,

$B' = \frac{B}{B+1} = \frac{9}{14}$, $C' = \frac{C}{C+1} = \frac{12762}{22762} = 0,5607$, che ricavansi dall' oggettivo Euleriano, si otterrebbe la ragione

$\frac{dn}{n-1} : \frac{dn'}{n'-1} :: 3 : 4$, invece di quella che danno le sperienze ed assunta dal medesimo *Eulero* tanto nella sua Diottrica quanto nell' opera ora citata, e che è $= 7 : 10$

Passiamo ora alla terza ed ultima equazione, che serve a distruggere totalmente o a rendere insensibile la confusione cagionata dalla sfericità delle lenti. Ritenendo le denominazioni già indicate ed inoltre chiamando λ, λ', λ'', λ''', λ'''' i *numeri arbitrarj* per le lenti I, II, III, IV, V, dei quali

numeri abbiamo già sopra dato un cenno, l' equazione da risolversi nel nostro caso sarà

$$0 = \lambda - \frac{\mu'}{\mu B'P}\left(\frac{\lambda'}{B'^2} + \frac{\nu'}{B}\right) + \frac{1}{B^3C'PQ}\left(\frac{\lambda''}{C'^2} + \frac{\nu}{C}\right)$$

$$- \frac{1}{B^3C^3D'm}\left(\frac{\lambda'''}{D'^2} + \frac{\nu}{D}\right) - \frac{\lambda''''}{B^3C^3D^3.m}$$

I numeri λ''', e λ'''' sono già determinati per le condizioni trovate disopra, cioè che le due oculari debbano essere isosceli convesse. Se inoltre avessimo già preso ad arbitrio un valore di B, e da questo avessimo colla formola del paragrafo precedente ricavato il valore di C, per ottenere un cannocchiale acromatico della medesima forma di quelli proposti da *Eulero* nella citata opera, bisognerebbe prendere ancora λ', e λ'' in modo, che la seconda, e terza lente dell' oggettivo fossero isosceli, ed in quest' ultima equazione non rimarrebbe d' incognito che il solo numero arbitrario λ della prima lente, il quale per conseguenza facilmente coll' equazione medesima si determinerebbe. Ma invece noi lasceremo indeterminata la lettera B, e prenderemo i numeri arbitrarj λ, λ', ecc. in maniera che tutte le lenti sieno isosceli: colla risoluzione poi di quest' ultima equazione troveremo il valore di B, in seguito quello di C, e di tutte quelle lettere che da queste dipendono

Per vedere in qual modo si determinano le curvature delle lenti per mezzo de' numeri arbitrarj, chiameremo F il raggio di sfericità della facciata anteriore della prima lente oggettiva cioè di quella che è voltata verso l' oggetto, e G il raggio della facciata posteriore della stessa lente; similmente F', G'; F'', G''; F''', G'''; F'''', G'''' i rispettivi raggi delle facciate anteriori, e posteriori delle lenti II, III, IV, V; e siccome la sola lente II è di Flint mentre tutte le altre sono di Crown, avremo

$$F = \frac{\alpha}{\sigma \mp \tau\sqrt{(\lambda - 1)}} \qquad G = \frac{\alpha}{\rho \pm \tau\sqrt{(\lambda - 1)}}$$

$$F' = \frac{Bb}{\rho'B + \sigma' \mp \tau'(1 + B)\sqrt{(\lambda' - 1)}} \qquad G' = \frac{Bb}{\sigma'B + \rho' \pm \tau'(1 + B)\sqrt{(\lambda' - 1)}}$$

$$F'' = \frac{Cc}{\rho C + \sigma \mp \tau(1 + C)\sqrt{(\lambda'' - 1)}} \qquad G'' = \frac{Cc}{\sigma C + \rho \pm \tau(1 + C)\sqrt{(\lambda'' - 1)}}$$

$$F''' = \frac{Dd}{\rho D + \sigma \mp \tau(1 + D)\sqrt{(\lambda''' - 1)}} \qquad G''' = \frac{Dd}{\sigma D + \rho \pm \tau(1 + D)\sqrt{(\lambda''' - 1)}}$$

$$F'''' = \frac{e}{\rho \mp \tau \sqrt{(\lambda'''' - 1)}} \qquad G'''' = \frac{e}{\sigma \pm \tau\sqrt{(\lambda'''' - 1)}}$$

Eguagliando ora in ciaſcuna lente il raggio della facciata anteriore a quello della poſteriore ſi ricaveranno i valori dei numeri arbitrarj che ſaranno eſpreſſi nella maniera ſeguente.

$$\lambda = 1 + \left(\frac{\sigma - \rho}{2\tau}\right)^2 = 1,60006$$

$$\lambda' = 1 + \left(\frac{\sigma' - \rho'}{2\tau'}\right)^2 \left(\frac{1 - B}{1 + B}\right)^2 = 1 + 0,67446(1 - 2B')^2$$

$$\lambda'' = 1 + \left(\frac{\sigma - \rho}{2\tau}\right)^2 \left(\frac{1 - C}{1 + C}\right)^2 = 1 + 0,60006(1 - 2C')^2$$

$$\lambda''' = 1 + \left(\frac{\sigma - \rho}{2\tau}\right)^2 \left(\frac{1 - D}{1 + D}\right)^2 = 1 + 0,60006(1 - 2D')^2$$

oſſia per eſſerſi trovato ſopra $D' = -2$, ſarà

$$\lambda''' = 1 + 0,60006.25 = 16,00150$$

$$\lambda'''' = 1 + \left(\frac{\sigma - \rho}{2\tau}\right)^2 = 1,60006.$$

Si ſono già precedentemente trovati i valori di Q, B, C, C' eſpreſſi con funzioni di B; onde non rimane che di ſoſtituire queſti nella terza equazione indicata ſopra. Ma ſi entrerebbe in un calcolo troppo lungo ed operoſo, ſe dopo la ſoſtituzione ſi voleſſe riſolvere l' equazione direttamente, e mi pare più eſpediente il fare alcune ſuppoſizioni per i valori di B (*a*) che ſoſtituiti nell' equazione danno diverſi ri-

(*a*) Per non andare affatto a tentoni nelle prime ſuppoſizioni ſi potrebbe ottener una prima approſſimazione facendo $P = Q = 1$, e tralaſciando nell' equazione i termini che hanno m nel denominatore come molto piccoli; per tal modo l' equazione ſarebbe

$$0 = \lambda - \frac{\mu'\lambda'}{\mu B'^3} + \frac{\lambda''}{B^3 C'^3} - \frac{\mu'\nu}{\mu BB'}$$

sultati, dai quali co' metodi conosciuti si ricaverebbe il giusto valore di B, che verifica l' equazione. In questa maniera dopo poche supposizioni trovai che nel caso di $m = 320$ deve essere $B = 0,9366$. L'ordine del calcolo nella risoluzione dell' equazione potrebbe essere il seguente.

B	$= 0,9366$
LB	$= 9,9715542$
$L(B+1) = L\ 1,9366$	$= 0,2870399$
LB'	$= 9,6845143$
B'	$= 0,48363$
$2B'$	$= 0,96726$
$L(1-2B')^2$	$= 7,0300778$
$L\ 0,67446$	$= 9,8289562$
$L\ 0,000723$	$= 6,8590340$

$\lambda' = 1,000723$

$L\ 7$	$= 0,8450980$
$L(19B+1) = L\ 18,7954$	$= 1,2740515$
L Numeral	$= 2,1191495$
$L\ 10B$	$= 0,9715542$
$L(5B+19) = L\ 23,683$	$= 1,3744367$

$+ \frac{\nu}{B^3 CC}$. nella quale sostituendo i valori di $B = \frac{B}{B+1}$; $C = \frac{7}{3(B+1)}$; $C' = \frac{7}{3B+10}$. $\lambda = 1,60006$;

$\lambda' = 1 + 0,67446 \left(\frac{1-B}{1+B}\right)^2$;

$\lambda'' = 1 + 0,60006\ (1-2C')^2$

$= 1 + 0,60006 \left(\frac{3B-4}{3B+10}\right)^2$, ed i valori di μ', μ, ν, ν sopra assegnati, otterressimo un' equazione di terzo grado la quale risolta dà i tre seguenti valori di B, $B = -1$; $B = 1,4023$; $B = 5,3485$. La prima radice $B + 1 = 0$ è inutile, perchè indica soltanto il caso di tre lenti piane, si potrà dunque prendere una delle altre due, per esempio la seconda, come una prima approssimazione. Si noti che questo caso particolare, e limitato dalle supposizioni di $P = Q = 1$, ed in cui non si tiene conto della confusione prodotta dalle oculari, è stato già da molti Ottici trattato. Egli è per altro evidente che la grossezza sola delle lenti non permette di supporre $P = 1$, $Q = 1$, ma si dovrebbe fare almeno $P = \frac{46}{45}$ e

$Q = \frac{45B}{45B+1}$.

L Denomin. . . . . $=2, 3459909$
L Numerat. . . . . $=2, 1191495$
LC' . . . . $=9, 7731586$
C' . . . . $=0, 59314$
$1-C'$ . . . . $=0, 40686$
$L(1-C')$ . . . . $=9, 6094429$
LC . . . . $=0, 1637157$
$1-2C'$ . . . . $=0, 18628$
$L(1-2C')^2$ . . . . $=8, 5403510$
$L\ 0, 60006$ . . . . $=9, 7781947$
$L\ 0, 020823$ . . . . $=8, 3185457$

$\lambda''=1, 020823$.

$L\ 19B=L\ 17, 7954$ . . . . $=1, 2503077$
$L(19B+1)$ . . . . $=1, 2740515$
$L\mathfrak{Q}$ . . . . $=9, 9762562$

Per maggiore facilità si dispongano in ordine questi valori

$L\frac{1}{B}$ . . . . $=0, 0284458$

$L\frac{1}{B'}$ . . . . $=0, 3154857$

$L\frac{1}{C}$ . . . . $=9, 8362843$

$L\frac{1}{C'}$ . . . . $=0, 2268414$

$L\frac{1}{\mathfrak{Q}}$ . . . . $=0, 0237438$

$L\frac{1}{P}$ . . . . $=9, 9777236$

Calcolo dei termini della terza equazione.

$L\frac{\mu'}{\mu}=L\ 0, 8834$ . . . . $=9, 9461786$

$L\frac{1}{P}$ . . . . $=9, 9777236$

$L\lambda'$ . . . . $=0,0003138$

$L\frac{1}{B'^3}$ . . . . $=0,9464571$

$L\frac{\mu'\lambda'}{\mu B'^3 P}=L\,7,42460$ . . . . $=0,8706731$

$L\lambda''$ . . . . $=0,0089504$

$L\frac{1}{B^3}$ . . . . $=0,0853374$

$L\frac{1}{P\mathfrak{Q}}$ . . . . $=0,0014674$

$L\frac{1}{C'^3}$ . . . . $=0,6805242$

$L\frac{\lambda''}{B^3C'^3P\mathfrak{Q}}=L\,5,97420$ . . . . $=0,7762794$

$L\nu'=L\,0,2529$ . . . . $=9,4029488$

$L\frac{\mu'}{\mu P}$ . . . . $=9,9239022$

$L\frac{1}{BB'}$ . . . . $=0,3439315$

$L\frac{\nu'\mu}{\mu BB'P}=L\,0,46858$ . . . . $=9,6707825$

$L\nu=L\,0,2196$ . . . . $=9,3416323$

$L\frac{1}{B^3P\mathfrak{Q}}$ . . . . $=0,0868048$

$L\frac{1}{CC'}$ . . . . $=0,0631257$

$L\frac{\nu}{B^3CC'P\mathfrak{Q}}=L\,0,31014$ . . . . $=9,4915628$

La fomma de' termini che appartengono all' oggettivo farà quindi $1,60006-7,42460+5,97420-0,46858$

$+0,31014=-0,00878$. Passiamo al calcolo degli altri termini appartenenti alle oculari

$$L\lambda'''=L\,16,0015 \quad \ldots\ldots \quad =1,2041606$$
$$L\frac{1}{m}=L\frac{1}{320} \quad \ldots\ldots \quad =7,4948500$$
$$L\frac{1}{B^3} \quad \ldots\ldots \quad =0,0853374$$
$$L\frac{1}{C^3} \quad \ldots\ldots \quad =9,5088529$$
$$L\frac{1}{D'^3}=L\left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \ldots\ldots \quad =9,0969100\,(-)$$
$$L-\frac{\lambda'''}{B^3C^3D'^3m}=L+0,00245 \quad \ldots \quad =7,3901109$$

$$L\lambda''''=L\,1,60006 \quad \ldots\ldots \quad =0,2041363$$
$$L\frac{1}{m} \quad \ldots\ldots \quad =7,4948500$$
$$L\frac{1}{B^3C^3} \quad \ldots\ldots \quad =9,5941903$$
$$L\frac{1}{D^3}=L\left(\frac{3}{2}\right)^3 \quad \ldots\ldots \quad =0,5282739\,(-)$$
$$L-\frac{\lambda''''}{B^3C^3D^3m}=L+0,00663 \quad \ldots \quad =7,8214505$$

$$L\nu \quad \ldots\ldots \quad =9,3416323$$
$$L\frac{1}{m} \quad \ldots\ldots \quad =7,4948500$$
$$L\frac{1}{DD'}=L\frac{3}{4} \quad \ldots\ldots \quad =9,8750613$$
$$L\frac{1}{B^3C^3} \quad \ldots\ldots \quad =9,5941903$$
$$L-\frac{\nu}{B^3C^3DD'm}=L-0,00020 \quad \ldots \quad =6,3057339$$

La

La ſomma de' termini per le oculari ſarà $= 0, 00245 + 0, 00663 - 0, 00020 = 0, 00888$. La ſomma di queſti co' precedenti dell' obbiettivo ſarà dunque $= 0, 00888 - 0, 00878 = 0, 0001$. L' equazione reſta pertanto verificata col valore di $B = 0, 9366$, poichè la differenza di una diecimilleſima è affatto inſenſibile, e ſi può francamente traſcurare.

Per un altro ingrandimento m minore di 320 il riſultato dell' equazione diventa maggiore, coſicchè pel caſo di $m = 50$, arriva a 0, 0476. Tuttavia ſiccome i più accreditati Autori d'Ottica *d' Alembert* (*a*), *Beguelin* (*b*), *Hennert* (*c*) ſoſtengono, che l' aberrazione cagionata dalla sfericità delle lenti, e miſurata ſull' aſſe del cannocchiale, e che chiamaſi volgarmente *aberrazione longitudinale*, è inſenſibile all'occhio quando non oltrepaſſa la quantità $0,080075\,\gamma$ e molte volte reſta ancora inſenſibile quantunque ſia maggiore di $0, 000075\,\gamma$; ci reſta da vedere quale debba eſſere il riſultato della noſtra equazione che renda l' *aberrazione longitudinale* $= \pm 0, 000075\,\gamma$. Pongaſi generalmente il riſultato medeſimo $= H$, ed il ſemidiametro dell' apertura dell' oggettivo $= x$. Vedremo toſto che il noſtro oggettivo dà $x = 0, 0975\,\gamma$; l' aberrazione longitudinale ſarà

$$\frac{\mu H B^2 C^2 D^2 x^2}{p}$$

Ora abbiamo già trovato $B = 0,9366$, $\log. C = 0,1637157$, e per conſeguenza $C = 1, 4579$, $D = -\frac{2}{3}$, ed è

$$p = \frac{PQ}{BC}\gamma = 0, 7299\,\gamma,\ \mu = 0, 9875,\ x = 0,0975\,\gamma:$$ fatta la ſoſtituzione di queſti valori nella formola precedente, eſſa diventa $= 0, 01066 H\gamma$, e fatta queſta eguale al limite dell' aberrazione inſenſibile $0, 000075\,\gamma$ darebbe

(*a*) Memoires de l' Acad. de Berlin. Année 1769 pag. 259.

(*b*) Memoires de l' Acad. de Berlin. An. 1763 pag. 9.

(*c*) Diſertation ſur les moyens de donner la plus grande perfection poſſible aux lunettes, qui a remporté le prix de l' Acad. de Berlin en 1771.

$H = 0, 00704$. Dunque finchè il risultato della nostra equazione non arriva a questo limite $0, 00704$, si potrà prendere m maggiore, o minore di 320 come si vuole senza essere obbligati a mutare il valore trovato di $B = 0, 9366$. Vale a dire che, l' oggettivo, il quale fa il massimo effetto pel caso di $m = 320$, sarà con quella restrizione egualmente buono qualora gli si adattino delle oculari diverse da quelle che convengono all' ingrandimento di 320 volte. Per la stessa ragione quantunque nel caso di $m = 320$ l' artista non eseguisca coll' estrema esattezza le lenti in maniera che il valore di B devj un poco dall' assegnato $= 0, 9366$, purchè la deviazione non sia tale da produrre $H > 0, 00704$, il cannocchiale sarà sempre eccellente, e la piccola confusione che vi rimarrà non sarà percettibile.

Dal calcolo esposto abbiamo ottenuti i valori seguenti

$$\text{Log.}\,B = 9, 9715542; \qquad B = 0, 93660$$
$$\text{Log.}\,B' = 9, 6845143; \qquad B' = 0, 48363$$
$$\text{Log.}\,C = 0, 1637157; \qquad C = 1, 45786$$
$$\text{Log.}\,C' = 9, 7731586; \qquad C' = 0, 59314$$
$$\text{Log.}\,P = 0, 0222764; \qquad P = 1, 05263$$
$$\text{Log.}\,\mathfrak{Q} = 9, 9762562; \qquad \mathfrak{Q} = 0, 94680.$$
$$\text{Log.}\,\frac{R}{m} = 0, 0014674; \qquad R = 1, 00338.m.$$
$$S = -1.$$
$$D = -\frac{2(m-1)}{3m-1} = -\frac{2}{3}$$
$$D' = -\frac{2(m-1)}{m+1} = -2$$

Quindi per le distanze determinatrici si avrà

$$\text{Log.}\,\frac{\alpha}{\gamma} = 9, 8632627; \qquad \alpha = 0, 72990\gamma$$
$$\text{Log.}\,\frac{b}{\gamma} = 9, 8409863; \qquad b = -0, 69340\gamma$$
$$\text{Log.}\,\frac{\beta}{\gamma} = 9, 8125405; \qquad \beta = -0, 64944\gamma$$
$$\text{Log.}\,\frac{c}{\gamma} = 9, 8362843; \qquad c = 0, 68594\gamma$$

$$d = -\frac{1}{1,00338.m}\gamma = -\frac{\gamma}{m}$$

$$\delta = e = \frac{2(m-1)}{3m-1} \cdot \frac{1}{1,00338m}\gamma = \frac{2}{3m}\gamma$$

Gl' intervalli fra la lente

$$\text{I } e \text{ II} = \alpha + b = 0,03650\gamma$$

$$\text{II } e \text{ III} = \beta + c = 0,03650\gamma$$

$$\text{III } e \text{ IV} = \gamma + d = \frac{m-1}{m}\gamma$$

$$\text{IV } e \text{ V} = \delta + e = \frac{4}{3m}\gamma$$

Diſtanza dell' occhio $= O = \frac{m+1}{3mm}\gamma = \frac{1}{3m}\gamma$

La ſomma di tutti queſti intervalli darà la lunghezza del cannocchiale, che trovaſi $= \left(1,073 + \frac{2}{3m}\right)\gamma$. L' immagine reale in queſto cannocchiale ſta fra le due oculari, ed è diſtante dalla prima della quantità $\delta = \frac{2}{3m}\gamma$. Il ſuo ſemidiametro a cui ſi deve eguagliare il raggio del diaframma è $= \phi PQD\gamma = \frac{1}{3m}\gamma$

Le diſtanze focali delle lenti ſaranno

$p = 0,72990\gamma$; $q = -0,33535\gamma$; $r = 0,40686\gamma$

$s = -2d = \frac{2}{m}\gamma$; $t = \delta = \frac{2}{3m}\gamma$

Finalmente il raggio della facciata anteriore, e poſteriore della lente

Prima $= 2(n-1)p = 0,77369\gamma$

Seconda $= 2(n'-1)q = -0,38901\gamma$

Terza $= 2(n-1)r = 0,43127\gamma$

Quarta $= 2(n-1)s = \frac{2,12}{m}\gamma$

Quinta $= 2(n-1)t = \frac{2,12}{3m}\gamma$

Le due ultime lenti IV, e V, che sono le oculari, devono avere tutta l' apertura di cui sono capaci. Per trovare l' apertura dell' oggettivo $= 2x$ seguiremo la pratica adottata da *Eulero*, la quale consiste nell'eguagliare x alla quarta parte del raggio minimo di curvatura delle tre lenti oggettive. Nel nostro oggettivo il raggio minimo è quello della lente isoscele concava di Flint, cioè della lente II, e fu trovato $= 0,38901\,y$. Avremo dunque $x = \frac{0,38901}{4} y$ $= 0,0975y$. Volendo dare al cannocchiale una grande chiarezza faremo pure con *Eulero* $x = \frac{m}{50}$, ed otterremo quindi $y = \frac{m}{50.0,0975} = \frac{m}{s}$ prossimamente.

Aggiungeremo ora un esempio per direzione degli artisti, e prenderemo il caso di $m = 320$, che è il massimo ingrandimento dato da *Eulero* a' suoi cannocchiali. Questo servirà a confrontare i vantaggi dell' oggettivo trovato, con quelli dell' oggettivo perfetto Euleriano

Cannocchiale Astronomico

Con oggettivo triplo, e a due oculari, che ingrandisce il diametro degli oggetti 320 volte.

	Pollici
I L' oggettivo composto di tre lenti avrà la sua distanza focale di	64, 00
Il diametro della sua apertura	12, 48
1°. La prima lente di Crown ed egualmente convessa d' ambedue le parti avrà la distanza focale	47, 71
Il raggio di curvatura dell' una, e dell' altra facciata	49, 52
2.° Dal mezzo di questa lente al mezzo della seconda si metterà la distanza di	2, 34
3.° La seconda lente di Flint concava egualmente d' ambedue le parti avrà per distanza focale	21, 46
Ed il raggio di curvatura dell' una, e dell' al-	

	Pollici
tra facciata	24, 90
4.° La diſtanza del mezzo di queſta lente al mezzo della ſeguente deve eſſere	2, 34
5.° La diſtanza focale della terza lente di Crown egualmente conveſſa d' ambedue le parti	26, 04
Il raggio di curvatura di ciaſcuna delle ſue facciate	27, 60
II La diſtanza di queſt' oggettivo alla prima lente oculare	63, 87
La prima lente oculare di Crown egualmente conveſſa d' ambedue le parti avrà per diſtanza focale	0, 40
Ed il raggio di curvatura di ciaſcuna facciata	0, 42
III La diſtanza della prima oculare al diaframma dev' eſſere	0, 13
Il diametro del diaframma	0, 13
IV La diſtanza della precedente oculare alla ſeconda, ed ultima ſarà di	0, 27
La ſeconda oculare di Crown egualmente conveſſa d' ambe le parti, avrà per diſtanza focale	0, 13
Ed il raggio di ciaſcuna delle due facciate	0, 14
V La diſtanza dell' occhio dall' ultima oculare dev' eſſere di	0, 07
Il diametro del campo apparente ſarà di	10′, 42″
La lunghezza totale del cannocchiale	68, 89

Adatteremo ora al medeſimo oggettivo una combinazione di tre lenti oculari diſpoſte in maniera che il cannocchiale ſerva per gli oggetti terreſtri, e li rappreſenti dritti. In queſto caſo prendendo $m = 200$ il riſultato dell' equazione, che ſerve a diſtruggere la confuſione cagionata dalla sfericità delle lenti, è $= 0,\ 00022 = H$, cioè molto minore del limite trovato ſopra, che era $= 0,\ 00704$, onde ſe ne può aſpettare il più grande effetto.

CANNOCCHIALE TERRESTRE

Con oggettivo triplo ed a tre oculari che ingrandiſce il diametro degli oggetti 200 volte.

	Pollici
I L' oggettivo compoſto di tre lenti, delle quali la prima e la terza di Crown, e la ſeconda di Flint, avrà la diſtanza focale di	40, 00
Il diametro della ſua apertura	7, 80
1.° La prima lente di Crown egualmente conveſſa d' ambedue le parti avrà per diſtanza focale	29, 20
Ed il raggio di curvatura delle due facciate	30, 95
2.° Dal mezzo di queſta lente al mezzo della ſeconda vi ſarà l' intervallo di	1, 46
3.° La ſeconda lente di Flint egualmente concava d' ambedue le parti avrà per diſtanza focale	13, 41
Ed il raggio di curvatura di ciaſcuna delle due facciate	15, 56
4.° Dal mezzo di queſta lente al mezzo della terza vi ſarà l' intervallo di	1, 46
5.° La diſtanza focale della terza lente di Crown egualmente conveſſa d' ambe le parti ſarà di	16, 27
Ed il raggio di ciaſcuna delle due facciate	17, 25
II La diſtanza dell' oggettivo alla prima lente oculare ſarà di	40, 48
III La prima lente oculare di Crown egualmente conveſſa d' ambedue le parti avrà per diſtanza focale	0, 48
Ed il raggio di curvatura di ciaſcuna delle due facciate	0, 51
IV La diſtanza della prima oculare dalla ſeconda ſarà	2, 16
V La ſeconda oculare di Crown egualmente conveſſa d' ambedue le parti avrà per diſtanza focale	0, 97
Ed il raggio di ciaſcuna delle due facciate	1, 03
VI Fra la ſeconda e la terza oculare vi ſarà l' intervallo di	1, 37

Pollici

VII La terza, ed ultima oculare di Crown egualmente conveſſa d' ambedue le parti avrà per diſtanza ſocale 0, 40

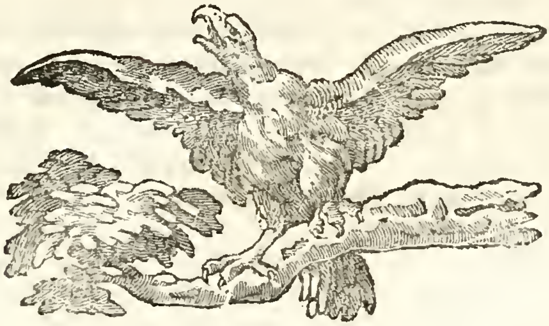
Ed il raggio di ciaſcuna delle due facciate 0, 42

VIII La diſtanza dell' occhio dall' ultima oculare dev' eſſere di 0, 28

IX Il diametro del campo apparente . . . . 12′ 9″

X La lunghezza totale del cannocchiale 47, 21.

Si potrebbero in ſimile maniera moltiplicare gli eſempj coll' adattare al trovato oggettivo altri ſiſtemi di oculari per ottenere un campo apparente più grande, come ha fatto *Eulero* nell' opera molte volte citata, ma per non prolungare più oltre queſto ſcritto finirò col rammentare agli artiſti l' avvertimento dato dal medeſimo *Eulero*, cioè che per una maggiore ſicurezza del buon eſito del cannocchiale, ſarà bene di prendere le miſure qui eſpoſte in pollici, e centeſime di pollice dal piede che ha i pollici più grandi. In caſo che le curvature delle lenti non riuſciſſero eſattamente della grandezza preſcritta, avvicinando, o slontanando un poco una lente dall' altra vi ſi potrà molte volte rimediare.



OSSERVAZIONI

SU I FELDSPATI, ED ALTRI FOSSILI SINGOLARI DELL' ITALIA.

Del P. Ermenegildo Pini Ch. Reg. B. Professore di Storia Naturale a Milano indirizzate

Al Sig. Cavaliere Ignazio de Born Consigliere nel Dipartimento Aulico delle Miniere, e membro delle Società di Pietroburgo, Londra, Upsal ecc.

Illustriss. Signore.

IL nobile entusiasmo, con cui V. S. Illustriss. intende alle scoperte di nuovi prodotti naturali, mi fece sperare che ella fosse per aggradire la notizia di alcune, per quanto io stimo, pregevoli pietre da me trovate nell' Italia. Per indirizzarle però queste mie Osservazioni, che vi feci, mi convenne dimenticare per alcun poco la grandezza ed importanza delle scoperte da lei fatte nella Storia naturale, ed il pregio del metodo, con cui ella le fa esporre; nè io certamente sarei venuto in questa determinazione, se non sulla fiducia, che ella sia per riguardarle anzi come amatore, che come giudice di questa Scienza: la qual fiducia è appoggiata sulle cortesi di lei maniere, che in più occasioni ho io pure esperimentate, e che ai Naturalisti renderanno sempre caro il di lei nome. Ho l' onore ecc.

Di

Di varj Fossili singolari dell' Italia.

NE' viaggi mineralogici, che feci per l' Italia, mi venne fatto di scoprirvi varj fossili, che per la loro novità o rarità stimai di descrivere in alcuni Opuscoli. Avendo compreso che quelli dai Mineralogisti furono riputati non immeritevoli della loro attenzione, vi proseguii le mie ricerche o per me stesso, o per mezzo di altre persone che indirizzai in diverse parti; ed in tal modo mi riuscì di trovarne altri non meno pregevoli, i quali ora imprendo a descrivere.

1. Io comincierò dalle miniere di ferro dell' isola d' Elba, siccome quelle che maggiormente contribuiscono alla gloria mineralogica dell' Italia. Sono esse tanto eleganti per la loro forma, e così deliziose per la varietà, e nitidezza dei colori, che a ragione è riputata imperfetta una collezione mineralogica, la quale ne sia mancante. E veramente la loro bellezza, e varietà vuolsi riguardare non come uno sterile ornamento della Mineralogia, ma anzi come un allettativo allo studio di questa scienza. Molti dei colori che si presentano nella superficie di queste miniere furono già da me accennati nelle mie *Osservazioni mineralogiche sulla miniera di ferro dell' Isola d' Elba*. Altri in seguito assai singolari ne riconobbi, i quali non si possono abbastanza descrivere con parole. Fra i pezzi colorati si apprezzano massimamente i cangianti, cioè quelli, che mutano il colore col mutare di situazione o l' occhio, o l' oggetto. In un pezzo però osservai un successivo cangiamento di colori per mezzo del solo alito, abbenchè rimanga fisso sì l' oggetto che l' occhio. L' alito suole appannare i corpi lucidi, e mutarne il colore deteriorandolo; nella miniera però da me accennata l' alito appena lo appanna, ed a misura che esso vi perviene e che va svaporando vedesi succedere al color giallo di fuoco il verde di smeraldo e il rosso di rubino assai vivo. Questo pezzo è un' ematite azzurrognola quasi lenticolare, le cui lenti sono larghe sino ad un pollice, e la cui superficie risplende di un color rossiccio di fuoco cangiante con colore quasi d' acqua marina. La cagione d' onde derivano i colo-

ri in queste miniere già fu da me spiegata nella indicata Memoria, e da quella stessa facilmente si può intendere come l' alito possa far cangiare colore conservandosi la vivacità, e lo splendore de' medesimi.

2. Tra le cristallizzazioni alcune parimenti ne incontrai in queste miniere, che per innanzi non vi aveva mai vedute, nè da altri trovai descritte; e queste sono due massimamente cioè la parallelepipeda, e l' esagona. Il Sig. *Romè de l' Isle* nella sua eccellente Cristallografia (*a*) descrive bensì varie miniere di ferro di quell' Isola, la cristallizzazione delle quali egli riduce a modificazioni del cubo. Nissuna però è un vero cubo, nè un parallelepipedo, ma tutte sono figure o di 12 facce, o di 24, o di 30, o di altro numero, le quali egli deriva dal cubo, introducendo in questo arbitrarie addizioni, o sottrazioni, o altre mutazioni. I parallelepipedi, che io descrivo, sono perfetti almeno in quella parte, che rimane isolata. Essi formano un elegante gruppo, nel quale sono tra loro intrecciati oppure insinuati nel rimanente del minerale. La parte, che rimane isolata, ha i piani contigui situati tra loro ad angoli retti; e gli angoli solidi non sono troncati. Molti però di questi parallelepipedi hanno qualche angolo solido ridotto ad una piramidetta, come è nella figura I. l' angolo *n*. La grandezza dei maggiori non eccede le 4 linee.

3. Più singolare è l' altra cristallizzazione in lamine esagone. Queste formano un elegante gruppo, in cui le lamine sono tra loro intrecciate; una però rimane del tutto isolata e mostra la sua figura compiutamente esagona quasi equilatera, così che anche le altre devonsi riputare di simile figura, benchè per essere inserite l' una nell' altra mostrino soltanto alcuni dei loro lati. Le lamine sono forti ma però sottili in modo che sono quasi taglienti; alcune inoltre vanno gradatamente ingrossandosi verso il centro, così che sembrano essere composte di due piramidi esagone molto compresse, ed unite alla loro base.

4. La qualità della miniera, in cui si riconoscono le due

(*a*) T. 2. Cristallographie. Paris 1783.

indicate criſtallizzazioni è un'ematite azzurrognola. Nelle oſſervazioni ſopraccennate io deſcriſſi inoltre alcune ocree di ferro criſtallizzate eptaedre, e poliedre. Queſte ſono ſembrate tanto ſtrane al Sig. *de l' Isle*, che ſenza complimenti aſſerì quelle eſſere ematiti ſoltanto incroſtate di ocrea. La facilità, con cui egli ſtima che altri abbia pigliato in iſcambio la croſta pel nocciolo, fa ſoſpettare che a lui ſia non di rado intervenuto di prendere un ſimile granchio. Io però prima di aſſerire, che quelle criſtallizzazioni foſſero di materia ocracea, ne ſpezzai più d' una, e trovai che nell' interno erano ſimili all' eſterno, cioè a dire avevano un apparenza terrea di color giallaſtro foſco, come lo ſogliono aver le ocree oſſia le calci di ferro volgari, nè certamente in neſſuna parte compariva quel teſſuto, e quello ſplendore che è proprio delle ematiti azzurrognole. La ſingolarità pertanto di queſte criſtallizzazioni non dovrà ritenere il Sig. *de l' Isle* dall' aumentare con eſſe la ſua Criſtallografia.

5. Un altro pregio della Mineralogia Italiana è ripoſto nei belli criſtalli di feldſpato che trovai nel granito di Baveno, e che già deſcriſſi in una particolare Memoria (*a*). Queſto pregio diviene maggiore atteſa la preſente rarità, della quale a taluno piacque di farne carico a me, quaſi come ſe aveſſi a tal fine uſato un mezzo ſimile a quello, che diceſi praticato dagli Olandeſi per far divenire prezioſe certe droghe. Ma la vera cagione ſi è, che dopo della ſcoperta da me fatta ed enunciata di queſti criſtalli tutti ſi affrettarono di raccogliere quelli, che negli antichi lavori del granito erano ſtati abbandonati ſulla montagna, ed in ſeguito eſſendoſi diminuito il lavoro di queſto ſaſſo, ſi diminuì anche l' occaſione di poterne eſtrarre.

6. Queſti criſtalli ſono o bianchi, o roſſi carnicini; ed i primi ſono più rari dei ſecondi. La figura sì degli uni che degli altri ſuol eſſere parallelepipeda col vertice poliedro, e tali parallelepipedi ſogliono eſſere quaſi equilateri. I più grandi da me finora trovati hanno due pollici di larghezza, e

(*a*) Memoire ſur des nouvelles criſtalliſations de Feldſpath. Milan 1779.

3 di altezza, o lunghezza, e questi sono rossi; tra i bianchi il più grosso è solo di 16 linee di larghezza, e di due pollici di altezza. Nella descrizione, che già diedi, di questi cristalli notai le diversità più principali dei loro vertici. In seguito altre molte varietà trovai nei vertici stessi, le quali sarebbe inutile di descrivere, siccome quelle che non conducono a nissuna utile conseguenza. Il Sig. *de l' Isle* però ne fece una seria occupazione avendone data una copiosa, e minuta descrizione parte nelle figure che io ho annesse alla sopraccitata mia Memoria, e parte sui feldspati che io diedi al Sig. *Besson*, o che altronde gli pervennero; anzi egli si lusinga di avere dai vertici stessi riconosciuta la natura de' cristalli medesimi. Per determinarla distingue i cristalli in semplici, e composti, da lui nominati *Macles*, e che si possono chiamare *Applicatelli*: per la composizione suppone, che due cristalli sieno stati come divisi longitudinalmente ognuno secondo una diversa diagonale, e che quindi si sieno riuniti nella direzione delle diagonali medesime: posta la quale combinazione il vertice di questi cristalli composti risulta quasi dalle metà di due vertici di cristalli semplici. Questa apposizione però è del tutto arbitraria sì perchè egli non ne arreca veruna prova, e sì anco perchè tra gli accennati cristalli nissuno mostra di essere unito nella supposta maniera, quando che in molti si riconosce chiaramente che sono quasi come formati da due o più, uniti in una direzione parallela alle loro facce. E veramente quell' angolo sinuoso, che io ho notato nel vertice di qualche cristallo, e che il Sig. *de l' Isle* prende per argomento della sua supposizione, può bensì provare l' unione da me indicata, ma non quella da lui supposta, giacchè tale angolo è diretto non a seconda della diagonale, ma bensì verso il mezzo de' lati.

7. Ommettendo pertanto molte varietà dei vertici, che in seguito mi si presentarono, passerò ad alcuni cristalli a prisma romboidale, che nei feldspati di Baveno sono rarissimi. Nella mia Memoria ne indicai alcuno, il quale però era poco bene determinato. Ma due ne raccolsi dappoi del tutto decisi. Uno di questi che è carnicino è isolato, ed è disegnato nella figura 2. in grandezza naturale. La sezione perpendicolare all' asse del prisma è un rombo *AECB* (*Fig.* 2.

n.° 2.) con uno degli angoli minori alquanto smozzato, così che il piano potrebbesi riguardare come pentagono a cagione del piccolo lato *CD*. L' angolo maggiore *ABC* è di 120.°, ed il minore *BAE* di 60.° Il prisma è a doppio vertice, uno dei quali è diedro a piani quasi triangolari *GIL*, *GFL*; l' altro è un poco guasto così che non si può determinare la figura dei piani.

8. L' altro prisma romboidale è di feldspato bianco, ed è simile al precedente, se non che è alquanto più grande essendo di 8 linee di larghezza.

9. Oltre alla figura prismatica, o parallelepipeda o romboidale trovasi nei feldspati di Baveno anche il prisma esagono. Di questi ultimi io già descrissi più varietà ed anche quella che ha il vertice diedro (pag. 56.), che che in contrario ne dica il Sig. *de l' Isle*. A queste io ora ne aggiugnerò un' altra di feldspato bianchissimo, che è un prisma esagono quasi equilatero a doppio vertice piano, e parallelo.

10. Nelle cavità dei graniti di Baveno, nelle quali sogliono star racchiuse le accennate cristallizzazioni, trovai una materia bianchissima che alle qualità esterne io reputo feldspato. Essa è striata, ma assai fragile, ed è quasi disposta in cristalletti prismatici: è opaca, e si spezza in lastrine o scagliette. Potrebbesi quella chiamare feldspato fragile.

11. Nei gruppi, che risultano dall' intreccio dei varj cristalli di feldspato, scrissi già che talora trovasi fluor minerale; aggiunsi pure che talora il fluore è inserito anche nella sostanza medesima del granito, a cui sono aderenti i cristalli stessi; onde il Sig. *de l' Isle* che asserisce il contrario sembra non avere abbastanza intese le mie espressioni.

12. Dall' esistenza del fluor minerale in questi gruppi di feldspato, e nel granito stesso, come pure dal decrepitare, che quelli fanno nel fuoco, conghietturai che nella composizione di quelli entrasse qualche porzione di fluor minerale. I fondamenti di questa conghiettura non sono certamente molto solidi, e perciò io non molto ho insistito su di essa. Per decidersi converrebbe far l' analisi di questi feldspati dirigendola appunto a questo fine di separarne il fluor minerale, o almeno di trovarvene i componenti. Nell' analisi che l' esimio Professore *Scopoli* fece dei feldspati cristallizzati di Ba-

veno e che cortesemente mi comunicò, egli vi trovò della terra calcarea, la quale è uno dei componenti del fluor minerale. Per cercar l'acido spatico, che ne è l'altro componente, converrebbe istituir l' analisi in modo, che questo, quando vi fosse, si potesse sviluppare dalle altre molte sostanze, che entrano nei feldspati stessi, e separatamente raccogliere; la qual maniera di analisi finora non è stata istituita, e perciò non si può assicurare, che questo acido non vi esista. Che qualche acido esista nei feldspati, tuttochè nessuno finora ne lo abbia separato, da molti argomenti si può raccogliere come più sotto accennerò, e quando vi sia non si potrà determinarne la natura se non dappoichè sia attualmente separato da ogni altra sostanza.

13. Vengo ora ai feldspati da me scoperti al S. *Gottardo*, montagna situata nell' Italia sui confini cogli Svizzeri. Quelli furono da me descritti in due Opuscoli già da qualche anno pubblicati (*a*): la loro singolarità m' indusse a proseguirne la raccolta sulla speranza di trovare altri pezzi curiosi, ed istruttivi; e dopo d' avere, direi quasi, fatta spazzare quella montagna, feci pure abbassare le acque di un laghetto, sotto le quali vedevasene una certa quantità. Con tali diligenze mi riuscì di averne altri pezzi, che meritano di essere qui rammemorati.

14. Nella sopraccitata mia Memoria dissi già, che la figura romboidale era la più comune nei feldspati da me raccolti al S. Gottardo. Questo stesso ho veduto verificato anche in seguito; e costantemente l' angolo maggiore del rombo è di circa 120.° , ed il minore di 60.° come nei feldspati di Baveno a prisma romboidale, dei quali angoli spesso uno degli ottusi, e talora anche uno degli acuti è troncato in modo che forma un piccolo lato. Questi rombi trovansi spesso elegantemente intrecciati, e formano de' grandissimi gruppi ora inseriti in una matrice granitosa, ed ora senza matrice. Di questi gruppi uno ne ebbi lungo 2 piedi, largo 1 $\frac{1}{2}$, ed alto 1 $\frac{1}{2}$. Talora i rombi anche solitarj sono di grandezza

---

(*a*) *Osservazioni mineralogiche nella montagna di S. Gottardo* inserita nel Tomo IV. degli Opuscoli Scelti di Milano 1781. *Memoria mineralogica nella montagna, e suoi contorni di S. Gottardo*. Milano 1783.

gigantesca; ed il massimo tra quelli da me in seguito raccolti è lungo 9 pollici, largo 7 $\frac{1}{2}$, alto 8; e questo è semitrasparente, e vi si veggono delle lamine cangianti con colore di madriperla. Alcune volte questi rombi sono intrecciati con grossi, e tersissimi cristalli di rocca giallicci. La cristallizzazione in forma di parallelepipedo sul principio della raccolta era rarissima, dappoi divenne alquanto più frequente; e con questa figura si presentarono diversi feldspati di maravigliosa grandezza. Il più grande è largo 8 pollici, alto 9. Il suo vertice è alquanto rotto, così che non vi si possono determinare i piani; e su di un lato è vestito di mica esagona argentina rosacea. Generalmente anche questi feldspati parallelepipedi sono semitrasparenti, ed hanno il vertice a piani indeterminati, sembrando come composto dal concorso di rombi, o di altre cristallizzazioni. In questi vertici frequentemente s' incontrano angoli sinuosi, i quali sogliono essere diretti verso il mezzo delle facce del prisma; talora anche il mezzo è incavato a forma quasi di piramide quadrilatera. Come tali vertici sieno composti dal concorso di diverse cristallizzazioni si può comprendere dalla loro spezzatura, nella quale le lastrine si veggono manifestamente unite a diversi angoli in diversa direzione.

15. Ordinariamente uno solo è il vertice di ciascun parallelepipedo; talora però ne sono due opposti, ma sempre a piani indeterminati, almeno nei semitrasparenti. Incontransi talora feldspati parallelepipedi opachi bianchi, i quali si rassomigliano assai a quelli di Baveno, eccettochè nella decisione, e nettezza dei piani.

16. Nei feldspati di S. Gottardo i prismi esagoni sono assai rari, e più spesso vi s' incontrano de' prismi poligoni, ma con un numero indeterminato di facce, delle quali anche alcune sogliono essere insinuate o in altri cristalli o in granito: sì gli esagoni che i poligoni sembrano provenire da rombi insinuati l'uno nell'altro in modo, che dalle loro facce, che rimangono al di fuori, risultino prismi di più o meno facce.

17. Altre cristallizzazioni più o meno irregolari mi si sono presentate, il pregio delle quali è riposto massime nella

loro prodigiosa grandezza che talora giunge ad un piede, e mezzo.

18. Per la grandezza sì di questi, come di que' due cristalli regolari poc' anzi descritti, i feldspati del S. Gottardo si devono riguardare i più giganteschi dopo i cristalli di rocca. L'Italia in quella parte, che su i suoi confini forma il Vallese, ha il pregio di contenere i più grossi cristalli di rocca, dei quali colà ne vidi uno di piedi due e mezzo di diametro. A tale grandezza di cristallizzazione nessun' altra materia giugne quando pure non si vogliano tra' cristalli annoverare le colonne, o i prismi di basalte. Ma in questi non si sono per anco riconosciuti veri caratteri di cristallizzazione. E veramente affinchè una figura regolare possa riputarsi provenuta da cristallizzazione conviene, che quella risulti nella attuale combinazione di fina materia sciolta in qualche fluido, alla quale soluzione riducesi anche la fusione; ed allora abbiamo argomento che in una data materia sia naturalmente intervenuta questa operazione, quando quella anche isolata trovasi di una data figura regolare. Ma la figura dei prismi basaltici sembra provenuta dappoichè la materia era già ridotta in grosse ed informi masse, le quali nel ristringersi si sieno staccate l'una dall'altra. In fatti tali prismi giganteschi non mai si trovano cresciuti solitarj, ma sempre sono opposti gli uni agli altri, inoltre le facce dei prismi stessi non hanno quella uniformità di superficie, che nei veri cristalli si osserva, ma presentano quelle scabrezze, e disuguaglianze che sogliono intervenire nei distacchi di materie che si ristringono. I cristalli di rocca pertanto avranno nella grandezza il primo luogo su tutte le materie cristallizzate finora note, ed i feldspati cristallizzati del S. Gottardo il secondo.

19. In tale grandezza però sono innumerevoli degradazioni fino alla sottigliezza minore di quella d' un ago. Questi cristalletti più fini sono sparsi su i più grandi in forma di aghi, i quali spesso sono distribuiti a rete: il che forma la varietà di feldspato acicolare e reticolato. Per lo più il reticolato riluce per una tenue tinta ocracea, l' acicolare talora è rosso di minio. Questa seconda varietà incontrasi sparsa sopra un gruppo di cristalli poliedri di feldspato bianco opaco,

paco, ed è anche insinuato nella matrice, che è un aggregato di simile feldspato, e di mica.

20. Avendo esposte quelle varietà di feldspati che mi si presentarono nelle ulteriori raccolte da me fatte, vengo ora a dire di alcune osservazioni che in seguito vi feci. Primamamente nel colore generalmente li trovai o bianchi, o lattei, e tra questi secondi alcuni hanno una tinta verdiccia. Ordinariamente al fuoco non decrepitano, abbenchè sieno cristallizzati: il che è un' eccezione al principio asserito dal Sig. *Kirvan (a)*, il quale sembra non aver conosciuti i feldspati di S. Gottardo.

21. Nella maggior parte dei feldspati di questa montagna da me successivamente raccolti trovai un'altra proprietà, che ai primi mancava. Questa è che nello spezzarli esalano un odore quasi simile a quello della pietra suilla, il quale dura per lo spazio di circa la decima parte di un minuto, più o meno secondo la grossezza de' pezzi. Quello, che è più singolare, si è, che questo odore non esala stropicciando un pezzo contro l' altro, nella qual operazione si sente solo un odore quasi simile a quello, che tramandano i quarzi tra loro sfregati. Quell' odore puzzolente sembra un indizio dello sviluppamento di qualche sostanza volatile combinata con qualche acido.

22. Sulla struttura lamellare dei feldspati esposi già quanto bastava per una descrizione. Al presente gioverà aggiugnere una diversità, che è tra questa struttura e quelle che il Sig. *Saussure* assegnò in altri feldspati da lui osservati, e che il Sig. *de l' Isle* adotta come universale. L' esimio Professore di Ginevra riduce tali lastrine a prismi rettangoli tron-

(*a*) Il *Kirvan* pag. 127 Elemens de Mineralogie asserisce, *che il feldspato cristallizzato decrepita ad un moderato calore; il che non fa quello, che non è cristallizzato*. Nella mia Memoria su i feldspati di Baveno accennai bensì che ciò era vero in questa specie. Ma per rapporto ad altre la cosa è altrimenti. In fatti nelle mie Osservazioni Mineralogiche su i feldspati di S. Gottardo al §. 23. notai, che essi non sogliono decrepitare al fuoco, benchè sieno cristallizzati; soggiunsi anche che per contrario in un feldspato dell' isola di Bornholm io avea osservata la decrepitazione abbenchè non fosse cristallizzato.

cati obliquamente da due piani paralleli come nella figura *ABDIEFGL* (*fig.* 3.), così che ognuna di esse presenta quattro facce rettangole cioè *AIFG*, *BDEL*, *ABDI*, *GLEF*, e due in figura di parallelogrammo, o di rombo allungato, quali sono *IDEF*, *ABLG*. Nei feldspati di S. Gottardo le lastre hanno bensì un contorno di quattro facce tra loro perpendicolari, le altre due però non sono parallele ma del tutto irregolari così che nè sono piane, nè formano colle facce contigue un angolo costante. Tali certamente si presentano alloraquando si spezzano anche feldspati meno consistenti, o si considerano quelli, che da se stessi sono giunti ad un certo grado di scomposizione. A maggior dichiarazione di tal cosa sia *DMBACN* una lastra (*fig.* 4.) nella quale intendansi le tre rette *AD*, *AB*, *AC* tra loro perpendicolari, esprimenti tre diverse direzioni. Se la lastra *DMBC* nel totale era naturalmente unita nei piani *ABNC*, *DACL*, quella per la sola percossa riesce divisibile in ogni punto per piani perpendicolari sì alla direzione *AD*, come all' altra *AB*: ed in tal modo si può per esempio colla sola percossa ritrarne la lastrina *GPEAIFCK*, che è racchiusa da quattro piani contigui tra loro perpendicolari. Ma non mai la lastra si spezza per piani perpendicolari alla terza direzione *AC*; onde per esempio la indicata lastrina *PC* ha sempre le due estremità *GE*, *KF* irregolari.

23. Questo vale nei pezzi, in cui le lastre hanno una direzione costante; ma alcuni le hanno visibilmente in diversa direzione. Così alcuni nella sezione presentano un piano il quale ha le lastrine distribuite come nella figura 5., oppure come nella figura 6; altri finalmente le hanno in direzioni molto varie, e questi sembrano essere risultati dalla combinazione di diversi cristalli. Qualunque però di quelle porzioni, che ha le lastre in direzione diversa dalle altre contigue, come sono le porzioni *ENK*, *ENF* (*Fig.* 6.) presenta quella disposizione di lastrine che poc' anzi ho spiegata; cioè a dire ognuna, come *ENK*, avrà le lastre spezzabili per piani perpendicolari a due direzioni, e non mai a tre.

24. Per facilità d'espressione io chiamerò *commessura* l'unione delle lastre nelle direzioni, secondo le quali le lastre si possono spezzare per piani paralleli, quali sono *ADLC*,

VEF, come pure *ABNC*, *HGK* (*fig.* 4.); *Giuntura* l' unione delle medeſime in quella direzione ſecondo la quale le ſpezzature non rieſcono in piani paralleli come è il piano *XOR*.

25. Le laſtrine, di cui ſono compoſti i feldſpati di S. Gottardo, ſono ſottiliſſime. La maſſima ſottigliezza loro ſi preſenta principalmente nel romper de' groſſi pezzi, giacchè allora nel forzato diſtacco ſi ſeparano lamine tanto ſottili, e lunghe, che quaſi ſono fleſſibili. In queſte però per la loro ſottigliezza non ſi conſerva un contorno regolare, e però non ſi può in una direzione riconoſcere il paralleliſmo delle commeſſure.

26. Da queſte ſottiliſſime laſtrine ne riſultano altre più groſſe; ma queſte nella loro unione hanno anche nei pezzi più grandi frequenti commeſſure viſibili, le quali tolgono l' uniformità alla pietra. Queſte commeſſure ſono tanto frequenti che appena può ritrarſene qualche laſtrina netta in groſſezza di tre linee. Inoltre nelle giunture in vece di commeſſure trovanſi frequentiſſimi peli in ogni direzione, e di figure irregolariſſime. Di qui è che i pezzi groſſi più di mezzo pollice ſogliono eſſere ſoltanto ſemitraſparenti, ſebbene ciaſcuna laſtrina, da cui quelli ſono compoſti, ſpeſſo ſia traſparentiſſima.

27. Dalle coſe eſpoſte è manifeſto, che la ſtruttura lamellare nei feldſpati di S. Gottardo è diverſa da quella, che il Sig. *Sauſſure* ha riconoſciuta in altre pietre di tal natura, e che il Sig. *Romè de l' Isle* non ſolo riguarda come generale ai feldſpati, ma aſſume anche come un principio per iſpiegarne le diverſe criſtallizzazioni dei medeſimi (*a*). Egli ſtima, che avendo le lamelle eſpoſte dal Sig. *Sauſſure* due facce in forma di parallelogrammo e quattro in forma di rettangolo, ſi poſſa da queſta ſtruttura facilmente intendere come i criſtalli di feldſpato ora ſieno priſmi romboidali, ora

(*a*) La deſcritta ſtruttura, e maniera di ſpezzarſi dei feldſpati di S. Gottardo dimoſtra pure non eſſere generalmente vero, che il feldſpato ſi ſpezzi in cubi, o rombi, come aſſeriſce il Sig. *Mongez* nella nota al §. CXXX. *Sciagraphie du Regne mineral par M.* Bergman Paris 1784.

rettangoli. Ma primamente i feldſpati di S. Gottardo non avendo nelle loro lamelle verun piano in forma di parallelogrammo o di rombo, eſſi certamente non poſſono eſſere riuſciti romboidali a cagione della figura delle loro lamelle; in ſecondo luogo, eſſendo ogni lamella quaſi come una criſtallizzazione, rimane ancora a ſpiegare d' onde in queſte derivi la figura o romboidale, o altra qualunque. Finalmente, ammeſſa anche l' indicata figura delle laſtrine, potrebbe dalla loro unione riſultare qualunque altra figura di criſtallizzazione. Perciocchè eſſe, come accennai, ſono piccoliſſime, e ſottiliſſime; ed altronde è noto che da piccoli criſtalli di una data figura può riſultare un corpo di qualunque altra figura, come per eſempio da un poligono di molti lati può riſultare un circolo e da molti cubetti può formarſi una sfera. E veramente nei feldſpati noi vediamo anche la figura priſmatica eſagona, e poliedra, e molte altre figure indeterminate, che non ſono riducibili a priſmi quadrangoli ſe non introducendo, come fa il Sig. *de l' Isle*, in una ſuppoſta figura arbitrarie addizioni, e ſottrazioni con altre modificazioni, per mezzo delle quali alla fine ſi può intendere che da un corpo qualunque derivi qualunque altro di qualſivoglia figura. Così per eſempio in quel modo che uno può derivare la figura del priſma eſagono da diverſi rombi tra loro combinati, altri potrà per contrario derivare la figura del priſma romboidale, conſiderandolo come una porzione del priſma eſagono. Un eſagono equilatero (*Fig.* 7.) ha ogni lato eguale al raggio *GC* del circolo, dentro del quale può eſſere inſcritto; e però, conducendo i tre raggi *GC*, *GA*, *GE*, eſſo ſarà diviſo in tre parallelogrammi eguali *ABCG*, *GCDE*, *AGEF*, che ſaranno altrettanti rombi. Se ſu queſto eſagono intendeſi formato un priſma retto, e ſe ſupponeſi che pei tre raggi paſſino altrettanti piani perpendicolari all' eſagono, facilmente s' intenderà ciò, che ho detto della derivazione vicendevole del priſma romboidale dall' eſagono.

28. Dalla diſpoſizione ſopraccennata delle lamelle dipende il cangiante colorato, che forma uno dei principali pregi dei feldſpati di S. Gottardo da me già chiamati Adularie. Le lamelle nei piani delle loro commeſſure ſono bensì liſce, e ſpeſſe volte più luſtre di quel, che ſi poſſa ottenere coll'

artificiale pulimento ; ma non mai sono cangianti . Il cangiante, quando vi è, sempre si presenta soltanto sulle giunture. Due specie però di cangianti voglionsi distinguere. Uno si ha per rifrazione combinata colla riflessione ; l' altro per semplice rifrazione, o trasmissione. Il cangiante, che ho detto presentarsi sulle giunture, è della prima specie ; e questo ordinariamente si vede dirigendo il piano delle giunture alla luce, e tenendo l' occhio dalla stessa parte da cui cade la luce. Affinchè però il cangiante compaja, conviene che l'occhio sia situato in una certa direzione per rapporto all' oggetto. L'altro cangiante di trasmissione si ha anche su i piani delle commessure; e perchè questo sia sensibile , conviene che la lamella sia tra la luce e l' occhio , e che questo sia situato in una certa direzione per rapporto al piano stesso . Il primo cangiante di riflessione suol essere più vivo del secondo e di un colore più carico che l'altro di trasmissione, il quale solitamente consiste in un colore dilavato più o meno ceruleo.

29. La formazione del cangiante di riflessione dipende primamente da una dispersione della luce incidente . Questo io ho riconosciuto principalmente in un pezzo di adularia trasparentissimo , e cangiante con una luce viva, ma non molto colorata. Essendo questo ben pulito in piano, ed avendolo avvicinato alla luce di una candela in modo che dal piano potesse all' occhio pervenirne la riflessione, vidi che esso rifletteva due immagini della medesima , cioè a dire in una certa situazione l' immagine della fiamma era riflessa distintamente come da uno specchio, ed in quella situazione non appariva il solito cangiante; in altra situazione poco diversa l'immagine della fiamma compariva più languida, ed accompagnata nel suo contorno da una dispersione di luce, la quale rendeva la pietra disugualmente cangiante , ed a misura che io andava allontanando la pietra dalla fiamma, l'immagine di questa sempre più si andava confondendo colla luce dispersa dal suo contorno , e finalmente sul piano della pietra non altro più compariva se non un cangiante uniforme: la qual uniformità proveniva dalla cessazione di quella maggior vivacità che era nell'immagine della fiamma quando era più vicina.

30. Il cangiante adunque deriva primamente da una dispersione di luce, la quale, come è manifesto, è anche accompagnata da riflessione. Questa però proviene non solo dal piano superficiale della pietra, ma anche da altri, che sono al disotto della superficie stessa, i quali pure producono una simile dispersione di raggi. Di che è pruova il vedere che il colore del cangiante riesce tanto più dilavato, e meno vivo, quanto più si assottiglia la pietra.

31. Finalmente a formare il cangiante concorre una separazione di certi raggi colorati. E veramente provenendo quello anche da raggi riflessi dalle lastrine sottoposte alla superficie, è manifesto che questi sì nell' entrarvi, come nell' uscirne devono rifrangersi. In questa rifrazione si fa una separazione di certi raggi colorati sotto a certi angoli: d'onde segue che il cangiante secondo la diversa natura delle lamelle si presenta sotto diverso colore, e che questo non è visibile se non sotto certi angoli.

32. Il cangiante pertanto delle adularie si può riguardare come una copiosa riflessione di luce dispersa, e rifratta. La riflessione è copiosa in quanto che si fa da molti piani situati a diverse distanze dalla superficie, ed in tanto molta luce si riflette in quanto che in molti piani succede pure la dispersione. Essendo le lastrine disposte parallelamente per riguardo a due direzioni tra loro perpendicolari, sembra che quelle poste in una di tali direzioni servano alla dispersione della luce, e che le altre riflettano verso la superficie gl' indicati raggi sotto certi angoli che altronde sono dipendenti anche dalla rifrazione.

33. Dalle cose dette si possono spiegare le molte varietà, che osservansi nel cangiante di questi feldspati. In alcuni questo ha un colore molto carico, in altri assai dilavato; alcuni anche ne mancano del tutto. Quelli, che non lo hanno, o sono opachi, o sono i più trasparenti. La ragione per cui i primi ne sono mancanti è forse perchè essendo opachi non può farvisi quella riflessione, e rifrazione di luce che ho accennata: onde presentano solo in superficie quella variazione di luce che è comune a tutti i feldspati. I trasparentissimi in tanto non hanno il cangiante in quanto che le loro lamelle sono più fittamente unite, così che tra l' una e l' altra

non può intervenire quella modificazione di luce che più sopra ho accennata. Questi però sogliono in vece avere una vivacità di luce tale, che quando sono faccettati, puliti, superano talora nello splendore qualunque altra gemma, eccetto il diamante.

34. Il colore, col quale appare il cangiante, è o ceruleo, o argentino, o giallognolo, o bianchiccio quasi striato; talora è anche rossiccio di fuoco ma dilavato, le quali varietà dipendono dalla diversa aggregazione, o coerenza delle lamelle. Il cangiante scherza sì sulle facce piane, che sulle curve; ma su queste seconde si presenta più facilmente, e gira col girare della pietra come interviene negli occhi di gatto, e nelle lunarie: il che secondo i principj poc' anzi arrecati dee appunto intervenire. Sulle superficie piane la luce riesce più viva che sulle curve di modo che vi si può scoprire qualunque piccolissimo atomo che vi si soprapponga, e qualunque sottilissimo sfregio che vi sia. Per questa proprietà combinata colla molta durezza della pietra io già proposi di farne uso per camei, e massime sigilli, giacchè l'incisione vi spicca a meraviglia, e prende una maggiore morbidezza. Finora però attesa la piccolezza delle lastre proveniente dalla cagione sopraindicata appena si è potuto formare qualche pezzo netto di una grandezza sufficiente a tale uso.

35. Allora che nell'anno 1781. pubblicai le mie Osservazioni sulla montagna del S. Gottardo riportai ai feldspati quelle pietre colà trovate, in cui riconobbi il complesso di quelle proprietà massimamente esterne, che da altri erano già state assunte per caratteri dei feldspati. Tali proprietà sono 1.° la struttura lamellare, 2.° lo scintillare alla percossa con acciajo, 3. il cangiante della pietra. A queste aggiungevansi la cristallizzazione in prismi romboidali, o parallelepipedi già riconosciuta in altre simili pietre riputate generalmente feldspati, la non difficile susione, e la natura del sasso in cui queste si trovano, il quale è un deciso granito, tra i cui ingredienti è il feldspato. Queste proprietà certamente bastavano per riportare le accennate pietre ad uno dei generi già conosciuti dai Mineralogisti, nè mi sembrò che coll' analisi si potesse giugnere ad una maggiore determinazione. Imperocchè allora non erano ancora state ben analizzate quelle

pietre, che con questo nome s' indicavano, nè si era fissato quali componenti fossero richiesti per costituire il feldspato, ed altre molte pietre. Onde coll' analisi si sarebbero bensì potuti riconoscere certi componenti di quelle pietre, ma non avrebbero servito a riportarle al genere dei feldspati nè ad altro genere già noto;, se non al caso che quelli convenissero con quelli fissati per tal genere, il che per le cose dette troppo difficilmente avrebbe potuto intervenire.

36. Al presente massime dopo le diligenti ricerche del Sig. *Bergman* sonosi aumentate le determinazioni dei componenti di diverse pietre, e con ciò si sono bensì aumentate le cognizioni chimiche dei fossili, ma non si è per anco facilitata la determinazione sistematica dei medesimi, così che dall'analisi non si saprà ancora se le pietre riputate generalmente feldspati sieno da riportarsi a questo genere o ad altro. Quel sommo Chimico determinò cinque terre semplici, cioè la ponderosa, la calcarea, la selciosa, l' argillacea, e la magnesia; e queste sebbene in natura non si sogliono trovare del tutto pure; cio non ostante potendosi esse separare quando sono unite, e distinguere tra loro, prende dalle varie loro combinazioni i caratteri di distinzione delle diverse pietre. In tal modo potendosi quelle cinque terre combinare due a due, tre a tre ecc., si possono avere tante divisioni ossia altrettanti generi, quante sono le diverse combinazioni di queste cinque qualità. Anzi potendo esistere, ed esistendo realmente altri fossili diversi in natura dalle terre, e diversi pure tra loro, come sono i sali, i bitumi, ed i metalli, e potendo questi combinarsi colle terre, si potrà perciò avere un numero molto maggiore di combinazioni; e conseguentemente di generi di pietre.

37. Nell' esecuzione però di tal maniera di divisioni, che sembra la più precisa, e la più semplice, si oppongono molte difficoltà. Una delle principali è che in moltissime pietre tra loro diversissime d' apparenza, e riputate comunemente di genere diverso, trovansi gli stessi componenti: onde coll' accennata maniera di divisioni si confondono molti generi già abbastanza distinti, e pochi generi ne possono risultare. Così

secondo

ſecondo il *Bergman* (*a*) il quarzo, il pietroſelce, e la zeolite hanno per componenti la terra ſelcioſa, l' argillacea, e la calcarea, e però dovrebbero ſormare un ſolo genere, abbenchè lo ſteſſo Chimico realmente li diſtingua, come anche gli altri Mineralogiſti ſanno. Parimenti la mica, ed il feldſpato ſecondo lui ſono compoſti di terra ſelcioſa, ed argillacea, e di magneſia. Perlochè in tal modo l' analiſi ſerve anzi a conſondere le pietre già diſtinte di quel che ſia a fiſſarvi una più preciſa diſtinzione. Sembrerebbe poterſi toglierere tale confuſione con aver riguardo non ſolo alla qualità, e al numero delle terre ſemplici, ma anche alla quantità oſſia proporzione nella quale ſono tra loro combinate. I Signori *Bergman*, e *Kirvan* (*b*) hanno di fatti aſſunto tale principio. Ma nel farne uſo tornano maggiori confuſioni, ed ambiguità. Perciocchè in due modi ſi può eſprimere la proporzione dei componenti, cioè o indeterminatamente uſando i vocaboli di poco, o molto, oppure con determinazioni numeriche. La prima maniera è generalmente ſeguita dal *Bergman*, come quando dice che la mica è compoſta di argilla, di molto ſelce, e di poca magneſia intimamente unita all' argilla ſteſſa. La ſeconda è ordinariamente ſeguita dal *Kirvan*, dicendo per eſempio, che la mica è un' argilla unita con $\frac{116}{100}$ del ſuo peſo di ſelce, $\frac{7}{10}$ di magneſia pura, e $\frac{5}{10}$ di ferro deflogiſticato. Queſta ſeconda maniera è bensì più determinata quanto all' eſpreſſione; ma non può valere ſe non per quel tal pezzo che ſi è analizzato; perciocchè non mai ſi troveranno due pezzi, benchè in apparenza egualiſſimi, i quali abbiano gli ſteſſi componenti nella medeſima proporzione, che ſi è trovata in uno; (*c*) e però ſe nella proporzione dei componenti ſi pone la natura delle pietre per coſtituirne i generi o qualunque diviſione ſiſtematica, non mai ſi potrà ad un genere fiſſato riportare un' altra pietra che

(*a*) Sciagraphia Regni Mineralis Lipſiæ 1782.

(*b*) Elemens de Mineralogie. Paris 1785.

(*c*) Queſta verità è manifeſta dai principj, che ho eſpoſti in una Introduzione *Sull' Unicità degli Eſſeri Fiſici*, che ho premeſſa alla Traduzione da me pubblicata degli Elementi di Storia Naturale del Sig. *Leſke*, in Milano 1786 Vol. II. in 8.

si trovi: onde ne risulteranno tanti generi di pietre, quanti saranno i pezzi che si analizzeranno, cioè a dire si avranno innumerevoli generi, i quali non rappresenteranno che le singole pietre analizzate, e perciò non si potranno neppur considerare come generi. Per introdurre una maggiore determinazione potrebbesi aver riguardo anche al modo d' unione delle diverse qualità, e quantità di terre tra loro combinate. Così il *Bergman* per distinguere la mica dal feldspato, le quali due pietre secondo lui hanno lo stesso numero, e le stesse qualità di componenti, aggiugne che nella mica l' argilla è intimamente unita con un poco di magnesia, la qual intima unione non è notata nel feldspato. Poco però per l' accennato oggetto si profitta anche con questo ripiego: perciocchè una terra si riguarda da noi più o meno intimamente unita con un' altra secondo che più o meno difficilmente riusciamo a separarle; e questa difficoltà è relativa ai mezzi con cui si tenta la separazione. Altronde non si può far uso di tal ripiego, se non assegnando il grado di unione con espressioni o indeterminate o numeriche; nel che intervengono quelle difficoltà, che ho accennate nell' espressione delle proporzioni dei componenti.

38. Nell' assumere per caratteri di distinzione i componenti chimici avvi un' altra difficoltà, ed è che le qualità dei componenti, le loro proporzioni, ed il grado di loro unione sono cose relative alle operazioni che si fanno nell' attuale analisi, così che facendovi altre operazioni generalmente si avrebbero altri risultati (*a*). Di ciò abbiamo moltissimi esempj nelle sole opere di *Bergman*. Di qui è che se dopo d' aver classificate le pietre secondo i componenti trovati con certi processi vi si scoprisse con altri qualche altro componente, converrebbe mutarne la classificazione: onde il metodo di classificare appoggiato ai soli componenti chimici ha in sè un principio d' incertezza e di mutabilità.

39. Aggiugnesi che non di rado i Mineralogisti chimici in certe pietre da ognuno di essi riguardate, per esempio, come feldspati trovarono diversi componenti, tuttochè abbiano

(*a*) Vedasi il Capo II. della citata Introduzione.

nell' analisi seguito lo stesso processo; e quindi ciascuno fissò per caratteri dei feldspati quei componenti che vi trovò. Così il *Bergman* per caratteri di queste pietre fissò una combinazione di terra selciosa, di argilla, e di un poco di magnesia. Laddove secondo il *Kirvan* vi dee inoltre essere contenuta anche terra pesante in una certa proporzione. Onde è che il feldspato di *Bergman* non è quello di *Kirvan*, così che un Mineralogista non potrebbe chiamare feldspato una pietra se non aggiugnendo il nome dell' Autore, che egli ha seguito. Che se avvenga che un altro Chimico in una pietra che ha tutte le apparenze di feldspato trovi qualche altro componente, egli non potrebbe riportarla nè al feldspato di *Bergman*, nè a quello di *Kirvan*, e così riescirebbe inutile la classificazione di questi due celebri Mineralogisti. Ciò appunto interviene nei feldspati di Baveno, ne' quali secondo l' analisi del Sig. *Scopoli* non si trova la terra pesante ammessa dal *Kirvan* per carattere del feldspato; e per contrario contiene terra calcarea, che secondo il *Bergman* non entra tra i componenti caratteristici del medesimo.

40. Sembrami inoltre verisimile che nei feldspati contengasi qualche sostanza salina probabilmente acida, la quale se vi fosse contenuta formerebbe un altro componente diverso dai già trovativi; nel qual caso la classificazione delle pietre secondo i loro componenti richiederebbe che per il feldspato si fissassero altri caratteri diversi da quelli finora determinati. Che i feldspati contengano qualche sostanza acida io il conghietturo dall' odore che tramandano sfregandoli tra loro: il quale certamente indica una sostanza volatile; e che questa sia accompagnata da acido si può argomentare dal piccante dell' odore medesimo. In quei feldspati, che contengono terra calcarea, siccome sono quelli di Baveno, non si può dubitare che esista almeno l' acido aereo. In molti feldspati di S. Gottardo sembra contenersi anche un altro acido simile a quello, che è contenuto nella pietra suilla; e questi sono quelli, i quali nello spezzarli tramandano un odore puzzolente simile a quello che dalla pietra suilla viene tramandato. Per decidere se questo, od altro acido, ed in genere se qualche sale sia contenuto nei diversi feldspati, conviene dirigere l' analisi espressamente a tal fine, ed usare quei pro-

cessi, i quali non possano alterare le sostanze saline, al caso che vi sieno contenute; e forse che con tali cautele si riuscirà a scoprire nei feldspati di Baveno l' acido spatico, il quale, quando vi esistesse, formerebbe colla terra calcarea già scopertavi il fluor minerale, che io sospettai esservi contenuto. Le riflessioni finora fatte non tendono ed escludere le classificazioni sistematiche, le quali altronde quanto si debbano valutare su già da me generalmente dimostrato nella sopraccennata Introduzione. Solo io intesi a far vedere, che i componenti chimici non bastano da soli a fare una precisa classificazione dei fossili, e che non sono per anco fissati i componenti distintivi del feldspato, così che a determinare se una pietra sia o no feldspato i caratteri esterni sopraindicati saranno ancora da seguirsi a preferenza di qualunque analisi che di quella si faccia; ed io non credo di avere errato, allorchè seguendo tali caratteri ho riportato ai feldspati quelle pietre del S. Gottardo, che ho chiamate adularie.

41. Fuvvi bensì chi avanzò, che tali adularie erano zeoliti, e pretese provarlo con certi argomenti derivati da alcune esperienze. La nullità però de' suoi argomenti fu già da me dimostrata con altre esperienze, che ho pubblicate in un Supplemento (*a*), ed il trasunto di queste gioverà che io qui riporti accompagnato da qualche riflessione. Il principale argomento diretto a provare, che l' adularia è una zeolite, consisteva nell' asserire che quella nel fuoco si comporta nello stesso modo come questa. Per riconoscere se così fosse o no, feci le seguenti esperienze paragonate.

ESPERIENZA I.

42. Presi un pezzo di adularia trasparentissima, grosso alcune linee, e due pezzi simili di feldspato, uno bianco di Baveno, e l' altro di Danimarca, ambedue quasi semitrasparenti; apprestai pure alcuni pezzi simili di zeolite sì cristallizzata trasparente, che non cristallizzata dell' Isola di Ferae. Avendo quindi fatti arroventare due crogiuoli, in uno gettai

(*a*) Supplemento alle Osservazioni Mineralogiche su la montagna di S. Gottardo nel Tom. VI. degli Opuscoli Scelti di Milano.

i feldſpati, e nell' altro riposi ſeparatamente le zeoliti. Queſte ſubito ſi gonfiarono ſparpagliandoſi in una forma arborizzata, ed in due minuti anche ſenza l' azione del mantice ſi fuſero in parte, formando una materia ſemivetrificata, che legava inſieme i pezzetti non fuſi. Per contrario l' adularia rimaſe illeſa per qualche tempo; ed avendo animato il fuoco col mantice per circa 6 minuti perdette ſoltanto la ſua traſparenza, e divenne più fragile di prima, il che pure accadde agli altri due feldſpati, i quali inoltre decrepitarono.

Esperienza II.

43. Riduſſi in polvere groſſiera due altri pezzi, uno di adularia, e l' altro di zeolite peſanti ciaſcuno danari 5 $\frac{1}{4}$. Quindi appreſtai due crogiuoli di argilla apira di Bialla alti 2 pollici, ed internamente gl' intonacai di polvere di carbone. In uno di eſſi riposi la polvere di adularia e nell' altro quella della zeolite, e coprii ambedue i crogiuoli lutandone anche il coperchio. Ciò fatto li diſposi in un forno docimaſtico alleſtito nel modo, con cui ſoglio fondere le miniere di ferro, e di cobalto che ſono le più refrattarie, ed uſai le richieſte diligenze, affinchè l' azione del mantice riuſciſſe contemporaneamente eguale ſu ambedue i crogiuoli. Dopo 7 minuti di fuoco li ritirai, e trovai la zeolite compiutamente fuſa: per contrario l' adularia non aveva ſegno neppure di principio di fuſione: ma ſolo la polvere era un poco aderente in guiſa però, che per una leggiera raſchiatura le particelle facilmente ſi ſtaccavano.

44. Il vetro della zeolite I. era ſpumoſiſſimo maſſime alla ſuperficie ſuperiore, ove le bolle erano rotte, e larghe ſino a tre, ed anche quattro linee: II. occupava un volume almeno 3 volte maggiore di quello che aveva la ſua polvere prima della fuſione: III. peſava ſolo danari 4 $\frac{1}{4}$, cioè a dire perdette quaſi il ſeſto del ſuo peſo: IV. Il colore era grigio bianco: V. la parte inferiore della maſſa vitrea percoſſa con acciajo dava ſcintille, ſiccome quella che era più compatta del rimanente.

Esperienza III.

45. Riposi nel fuoco l' adularia sola, lasciandola nello stesso crogiuolo che tornai a ricoprire, e lutare, ed avendolo estratto dopo 11 minuti di fuoco animato dal mantice come prima, la trovai fusa.

46. Il vetro opaco, in cui si ridusse I. era niente spumoso, ma compatto massime verso la superficie superiore, la quale era liscia con qualche piccola prominenza tubercolosa ma solida, solo mostrava diverse bollicine nell' interno, e massime quella superficie, che era stata in contatto colla polvere di carbone: II. occupava un volume la metà minore di quello che aveva la sua polvere prima della fusione: III. pesava danari 5 $\frac{11}{14}$ cioè a dire perdette solo il centesimo del suo peso: IV. il colore era bianco grigio nell' interno, e latteo verso la superficie superiore: V. percosso con acciajo dava copiose scintille non solo nella parte inferiore, ma in qualunque altra ancora.

47. Paragonando gli esposti risultati appare chiaro 1.° che l' adularia a leggiero fuoco poco o nulla si altera, laddove la zeolite si gonfia, e tende a fondersi. 2.° che a fuoco maggiore la zeolite si fonde molto più facilmente dell' adularia. 3.° che il vetro risultante dalla zeolite è nel peso, nel volume, nella consistenza, ed in altre qualità diversissimo da quello che risulta dall' adularia. Da che vuolsi conchiudere che queste due pietre si comportano nel fuoco in un modo assai diverso, così che l' adularia al fuoco non manifesta veruno carattere proprio della zeolite.

48. La principale proprietà della zeolite al fuoco è di gonfiarsi, e di produrre un vetro spumoso; ed è bensì vero che secondo le osservazioni del *Cronstedt* (*a*) alcune spumeggiano meno delle altre; ma però tutte almeno nella superficie presentano molte bolle bianche: le quali cose nell' adularia non intervengono: l' altra proprietà, che le zeoliti manifestano al fuoco, è di fondersi molto facilmente. La faci-

---

(*a*) Pag. 208. Versuch einer Mineralogie. Leipzig. 1770.

lità di fonderſi è un termine relativo che non ſi può determinare ſe non per confronto. Ora nel fatto paragone vedeſi che la zeolite ſi fonde molto più facilmente anche in confronto dell' adularia. Perciocchè per la fuſione di queſta non baſtano 7 minuti di vivo fuoco (Eſp. II.), laddove la zeolite cominciò a fonderſi al primo ardore di un crogiuolo rovente (Eſp. I.).

49. Io avrei deſiderato di fare un' analiſi dell' adularia anche per la via umida, non dubitando che da queſta ſarebbe parimenti riſultato che eſſa non ha le proprietà della zeolite. Ma per l'occupazione in altri oggetti, finora non ebbi tale opportunità di tempo. Quando altri penſi ad intraprenderla, gioverà che egli avverta, che alcuni feldſpati, quali ſono quelli di Baveno, ſe ſi calcinano con alcali minerale, e quindi vi s' infonde acido marino, eſſi ſi ſciolgono, e la loro ſoluzione ſi coagula, come interviene nelle zeoliti trattate in ſimile maniera. Quindi anche nelle adularie calcinate con alcali potrebbe facilmente intervenire, che infondendovi acido o marino, o d' altra natura, la ſoluzione ſi coagulaſſe. Queſto però, ſe accadeſſe, non dovrebbe far ſoſpettare che foſſero zeoliti. Perciocchè è bensì vero, che molte zeoliti hanno la proprietà di far coagulare l' acido, da cui vengono ſciolte; ma tal coagulazione non ſi ſuol riguardare come propria di queſte pietre, ſe non al più quando eſſa interviene ſenza eſſere ſtate trattate coll' alcali.

50. Coi feldſpati traſparenti è molto affine un' altra pietra, che talora ſebbene aſſai di rado trovaſi nelle montagne di S. Gottardo. E' quella traſparentiſſima, e nitidiſſima, ed aſſai più dura del feldſpato, e del criſtallo di rocca; la ſpezzatura è quaſi vitrea, ma non forma angoli così taglienti come quelli del quarzo; ſu i piani delle ſpezzature preſenta un cangiante colorato, ma foſco, ed aſſai dilavato. All' occhio non vi ſi riconoſce la ſtruttura lamellare; ma che eſſa ſia formata a lamelle ſi può congh ietturare sì dall' indicato cangiante (V. §. 28.), e sì anche da certi ſcalini aſſai fitti che talora riſultano nelle ſpezzature. Quando ſi ſpezza eſala quell' odore che più ſopra ho accennato (§. 21.). Al fuoco decrepita, ed i pezzi alquanto groſſi che rimangono ſi ſcrepolano, e divengono tanto fragili, che colle mani

si possono rompere. Finalmente è di fusione più difficile del feldspato.

51. Finora non ebbi di tal pietra che pezzi grossi sino a 3 pollici, i quali erano rottami provenienti da altri più grossi: onde non ho potuto rilevarne la figura originaria. Dall' esame però di questi sembrami che essa sia prismatica esagona, non molto dissimile da quella dei cristalli quarzosi. Sulle facce però, che si riconoscono intatte, non vedonsi quelle striscie, o strie perpendicolari all' asse del prisma, le quali sogliono essere sulle facce dei cristalli di rocca, ma vi si vedono diversi piani a piccoli risalti, ognuno dei quali però è liscio.

52. Da queste proprietà io conchiudo, che tal pietra non è da annoverarsi tra i cristalli di rocca. E veramente nonostante la somiglianza apparente che sembra avere con questi, pure gli stessi raccoglitori di tali cristalli la distinguono dai medesimi. Io anzi stimo che essa sia da riguardarsi come un feldspato più consistente, e più puro degli ordinarj, e tanto più quanto che ho osservato che talora certi pezzi simili ai descritti formano come una parte integrante di decisi feldspati cristallizzati.

53. La descritta varietà di feldspati sembra per leggieri degradazioni passare alla natura di certi cristalli di rocca, che nella montagna stessa si trovano. Questi hanno tutte le proprietà poc' anzi indicate, se non che la loro cristallizzazione è prismatica esagona col vertice piramidato: nella spezzatura sono pingui al tatto, e all' aspetto; e non presentano sulla superficie verun cangiante.

54. Prima di terminare il discorso sui feldspati, io qui ne aggiugnerò alcune eleganti varietà che si trovano in altre parti dell' Italia. Una che più s' accosta ai feldspati di S. Gottardo trovasi nelle lave del Vesuvio Napolitano. Questi sono in piccoli cristalli grossi poche linee, e di figura indeterminata; alcuni per l' azione del fuoco sono anche in parte semivetrificati, cosicchè una porzione dei medesimi ha presa una forma convessa. Di essi alcuni sono cangianti con un colore argentino grigio dilavato. Questo mi fa sospettare, che forse alcune delle lunarie che sono in commercio, e delle quali finora non mi è noto il luogo originario, sieno

no feldſpati tratti da lave del Veſuvio, o di altro vulcano.

55. Altre varietà trovanſi nella Corſica iſola adjacente all' Italia; e la ſcoperta loro è dovuta ad un intelligentiſſimo, ed aſſai corteſe Uffiziale Franceſe il Sig. *Barral* Iſpettore generale dei ponti, e delle ſtrade in quell' iſola, il quale ſi compiacque di farmene parte. La prima è il feldſpato ſemitraſparente a lamine eſagone irregolari, le quali ſono lunghe al più 6 linee. La ſeconda è il feldſpato parallelepipedo ora traſparente, ora ſemitraſparente, ed or opaco. Queſto ultimo è roſſo carnicino, e ſi aſſomiglia aſſai a quelli di Baveno. Trovaſi per entro ad un granito miſchiato con mica, il quale è forſe quello che forma la decima varietà deſcritta dal Sig. *Barral* alla pag. 71 del ſuo Opuſcolo, che ha per titolo: *Memoire ſur l' hiſtoire naturelle de l' Isle de Corſe*. Gli altri indicati criſtalli hanno il vertice ordinariamente a tre piani, che nella figura 9 ſono eſpreſſi dalle lettere *ABCL*, *CLED*, *BCD*: la qual figura è di grandezza tripla della naturale. La diſpoſizione però e la forma di queſti piani ha molte varietà. Una delle facce del parallelepipedo, come *ALENO*, ſuol avere pel lungo un angolo molto ottuſo *AIL*. Nello ſpezzare queſti parallelepipedi anche colla percoſſa, ed in qualunque direzione, vedeſi che ſono compoſti di lamelle; ma hanno queſta ſingolarità, che ognuna delle due facce, che riſultano nella ſpezzatura, non è piana, ma formata ad angolo ottuſiſſimo, il quale in un pezzo è rilevato, come *DEF* (*Fig.* 10.), e nell' altro corriſpondente è ſinuoſo, quale è *ABC*. Tra queſti criſtalli taluno è compiutamente traſparente; ed in alcuni pure vedeſi una tendenza al cangiante, ſebbene però in neſſuno ſia deciſo. Queſte due varietà di parallelepipedi traſparenti, e ſemitraſparenti da taluno ſono riputate ſcerli. Ma per la tendenza al cangiante per la figura, e pel teſſuto lamellare io li riguardo come feldſpati. In queſta opinione io tanto più mi confermo dal vedere, che queſte pietre della Corſica ſono ſimiliſſime a certe altre del Delfinato, che da alcuni pure ſono riguardate co-

me ſcerli bianchi, ma che dal Sig. *de la Metherie* (*a*) ſono riconoſciuti per feldſpati; e ciò per due argomenti molto plauſibili: il primo è che tali pietre hanno una ſtruttura ſimile a quella dei feldſpati; l'altro è che ſecondo l'eſperienza di M. *d' Arcet* quelle al fuoco producono un vetro, o ſmalto bianco ſimile a quello che dai feldſpati è prodotto.

56. E ciò baſti dei feldſpati. Vengo ora a dire di due altre pregevoli ſpecie di pietre che mi ſi ſono preſentate nelle raccolte da me fatte dei foſſili di S. Gottardo. La prima è uno ſcerlo bianco radiato, o anzi ſtriato a raggi concentrici. I raggi ſono ſingolari per la loro lunghezza che giugne ſino a 6 pollici. Eſſi ſono ſottiliſſimi, quaſi ſeparabili, e molto fragili, e nello inſieme formano una maſſa dura, ma fragile. Quando i fili ſono ſeparati, e ſottili ſono ſemitraſparenti, e nella ſeparazione ſi riducono in fili ſempre più ſottili, e queſti, quando ſono ridotti a ſomma ſottigliezza, ſi fondono anche alla ſemplice fiamma di una candela.

57. L'altra ſpecie è uno ſcerlo elettrico o anzi una tormalina. Allorachè io pubblicai le mie Oſſervazioni mineralogiche ſul S. Gottardo indicai tra i foſſili di queſta celebre montagna anche lo ſcerlo nero colonnare; ma perciocchè io allora lo avea ſoltanto trovato inſeparabilmente inſinuato in criſtallo di rocca, perciò non potei eſperimentare ſe foſſe elettrico. In ſeguito lo riconobbi per tale in molti ſimili ſcerli anche iſolati, che ricevetti di colà già da due anni addietro.

58. Il primo che in quella montagna lo ricercò come tormalina fu, per quanto udii, un Ginevrino, e dappoi fu di eſſa fu pubblicato un Opuſcolo Tedeſco, che finora non ho veduto. Ultimamente ne diede una deſcrizione l' egregio Sig. Abate *Beretta* negli Opuſcoli Scelti di Milano. Io qui ſoggiugnerò di queſta pietra quelle oſſervazioni che io vi ho fatte.

59. La figura di queſto ſcerlo è un priſma poligono *ABCFDE* (*Fig.* 8. *n.*° 1.) ſtriato col vertice poliedro. La ſezione verticale all' aſſe del priſma ſpeſſe volte è quaſi un triangolo *KGL* (*Fig.* 8. *n.*° 2.) coi lati curvilinei. La cur-

---

(*a*) Lettre de M. l' Ab. *Haüy* pag. 63 Journal de Phyſique Janvier 1786.

vità dei lati proviene dall' essere ognuno di essi composto quasi di molte linee rette che sono comprese tra le incisioni delle strie. Quindi il complesso di queste rette forma bensì un poligono, ma attesa massimamente la piccolezza del diametro del prisma molte rette si presentano in forma di curva, e nella sezione si distingue solo un certo numero di lati curvilinei. Questo numero suol essere indeterminato; pure dal confronto di molti prismi sembra che la figura loro sia a 6, o 7 lati più o meno curvi. Il vertice è ora a tre piani, ora a 4, ora a 5 ed anche a 6. Qualche piano del vertice talora è mistilineo, cioè composto di linee parte rette, e parte curve. Le varietà più rimarchevoli da me riconosciute sono le seguenti.

1.° Prisma triangolare curvilineo col vertice a 4 piani, dei quali due sono tetragoni, e due pentagoni.

2.° Prisma subtetragono col vertice a 4 piani, dei quali due sono tetragoni, e due pentagoni.

3.° Prisma subtetragono col vertice a 6 piani, dei quali uno è triangolare, l' altro tetragono, e quattro sono indeterminati.

4.° Prisma subesagono col vertice a 6 piani, dei quali uno è triangolare, e due sono tetragoni, e tre esagoni.

5.° Prisma subesagono col vertice a tre piani, dei quali uno è pentagono e due esagoni indecisi.

6.° Prisma subesagono col vertice a 3 piani, dei quali uno è tetragono, l' altro pentagono, ed il terzo indeterminato.

7.° Prisma subesagono col vertice a 4 piani, dei quali uno è triangolare e tre sono pentagoni.

8.° Prisma subeptagono col vertice a 4 piani, dei quali uno è tetragono, l' altro pentagono, e due sono esagoni.

9.° Prisma subeptagono col vertice a 6 piani, dei quali tre sono tetragoni e tre esagoni.

60. La grossezza di questi prismi giugne sino a linee tre e mezza, la lunghezza suol essere di circa un pollice, e talora è di due.

61. I prismi generalmente trovansi disposti con varie direzioni in gruppi di diverse grossezze, i quali però internamente formano una massa solida. Sulla superficie di tali masse sogliono essere impiantati, o sdrajati i prismi: onde è che

ordinariamente hanno un ſolo vertice; taluno però ne ha due, come già fu indicato dal Sig. *Beretta*.

62. Queſti gruppi ora trovanſi iſolati, ora aderenti a diverſe ſpecie di pietre. Tali ſono il criſtallo di rocca, il quarzo criſtallino, il feldſpato, ed il granito. Talora vi formano anche delle vene molto ampie. Una di queſte è lunga 18 pollici, larga 9, e groſſa 3; ed eſſa è inſinuata in feldſpato criſtallino fragile aderente a granito miſto con ſcerlo verde radiato.

63. La tormalina a luce rifleſſa compare di color nera, lucidiſſima, ed opaca; ma a luce rifratta e viva vedeſi ſemitraſparente e di color giallo più o meno roſſeggiante. Per vederla di tal colore non baſta collocare la pietra tra l' occhio, e la luce di una candela, o del ſole, ma convien riguardarla ſotto certi angoli, ed allora vedeſi la ſemitraſparenza ed il colore roſſiccio in una conſiderabile porzione del diametro dei priſmi, la quale è maggiore o minore ſecondo la minore o maggior groſſezza dei medeſimi. In queſto fenomeno interviene una vera rifrazione ſimile a quella, che ha luogo nei priſmi ordinarj, e però affinchè ſia ſenſibile è neceſſaria certa ſituazione d' occhio per rapporto all' oggetto, ed alla luce. Il fenomeno però deve dipendere anche da una particolare ſtruttura della pietra; ed io m' immagino che eſſa ſia compoſta di fili paralleli, i quali nella ſuperficie formano le ſopraindicate ſtrie, e che tra eſſi poſſa paſſare la luce non però ſecondo tutte le direzioni. Poſta tale ſtruttura intendeſi, come la ſemitraſparenza non compaja quando per eſempio l' occhio, la pietra, e la luce ſono nella ſteſſa direzione. Ciò interviene, perciocchè in tale ſituazione la luce, che paſſa tra i primi fili rivolti verſo la luce, viene intercetta all' occhio dai ſeguenti rivolti verſo l' occhio ſteſſo. Per contrario comprendeſi che cadendo la luce ſulla pietra ſotto un certo angolo, eſſa nel rifrangerſi deve eſcire ſotto un altro angolo, e quando l' occhio ſia ſituato nella direzione dei raggi rifratti allora dee averne la corriſpondente impreſſione.

64. Quanto alla forza elettrica la tormalina di S. Gottardo la manifeſta non ſolo nei priſmi iſolati, ma anche nelle maſſe informi: in quelli però è molto più ſenſibile che in

II

Fig: IV

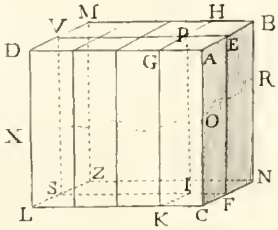


Fig: VIII n°1

n°2

Fig: VI

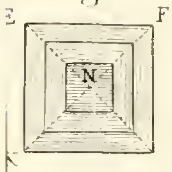


Fig: VII

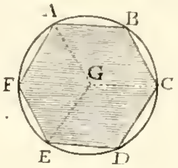
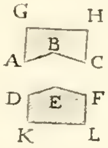


Fig: X



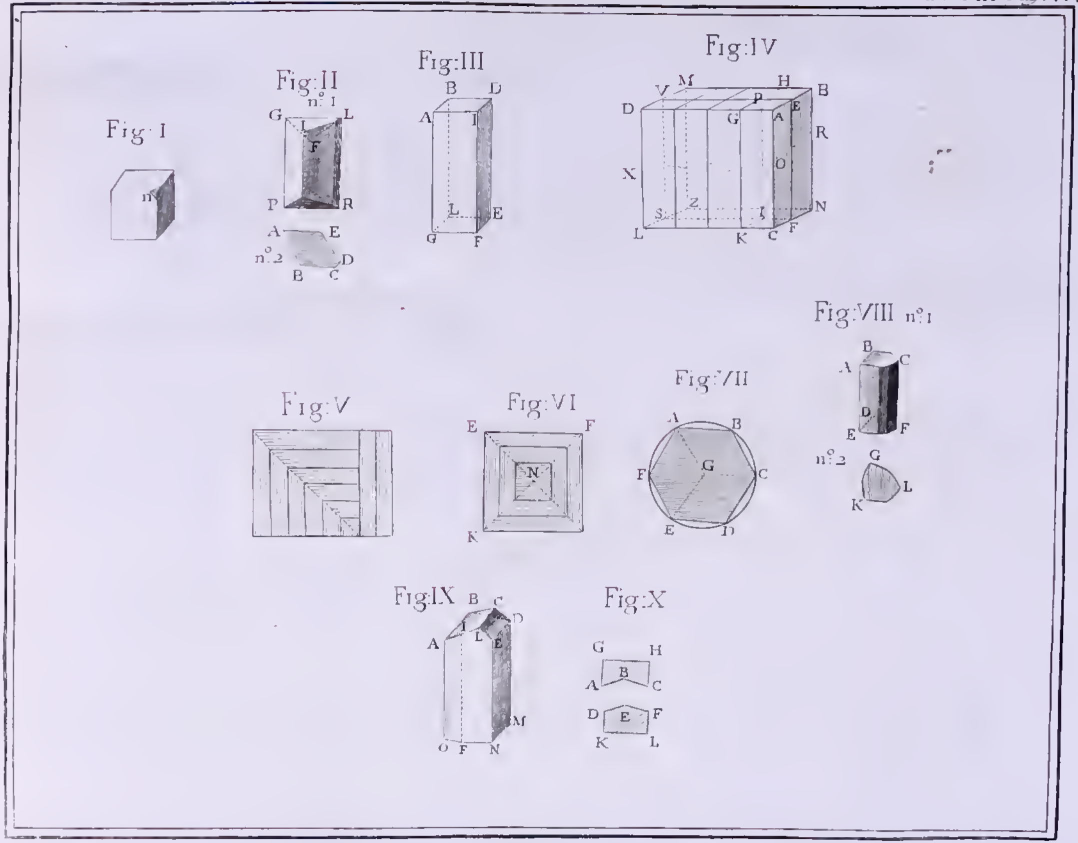


Fig: I
Fig: II
n.° 1
n.° 2
Fig: III
Fig: IV
Fig: V
Fig: VI
Fig: VII
Fig: VIII n.° 1
n.° 2
Fig: IX
Fig: X

queſte: il che ſembra dipendere dalla maggiore uniſormità di materia che è nei priſmi. Tale forza però è minore di quella con cui agiſce la tormalina del Tirolo: ed avvi inoltre un' altra diverſità, ed è che queſta ſeconda agiſce abbenchè ſia molto calda, laddove la prima non dà ſegni elettrici ſe non quando è quaſi del tutto raffreddata.

65. Sull' elettricità della tormalina io non mi ſtenderò più a lungo avendo già diffuſamente trattato chi parlò delle tormaline di Ceylan, del Braſile, e del Tirolo, e della Spagna. Solo aggiugnerò che avendo io eſperimentati altri ſcerli neri dell' Italia, che nell' apparenza ſi raſſomigliavano alla deſcritta tormalina, due ne trovai che pel riſcaldamento divenivano elettrici. Uno è dell' Iſola del Giglio, la cui groſſezza è di quaſi 6 linee. L' altro è della valle di Antigorio nell' alto Novareſe; queſto è in priſmi poligoni groſſi ſino a 5 linee, ed è inſinuato in una rocca granitoſa miſchiata con mica argentina. Sì l' uno che l' altro però di queſti ſcerli danno ſoltanto leggieriſſimi ſegni di elettricità, coſicchè appena potrebbero annoverarſi tra le tormaline, quand' anco aveſſero le altre proprietà per cui queſte dai ſcerli ſi diſtinguono.

Fine delle Memorie Sociali.

INDICE

DELLE MEMORIE

NATURAL HISTORY

PRIMA SEZIONE.

Sopra il movimento concreto de' solidi.
Del Sig. PAOLO DELANGES Professore di Matematica nel Collegio Militare di Verona . . . . . pag 1

Ricerche intorno all' origine del natro o alcali marino nativo.
Del Sig. CAVALIERE LORGNA 39

Osservazioni anatomiche e patologiche sugli organi uropoietici.
Del Sig. VINCENZO MALACARNE Direttore delle R.

Terme Acquesi, e Chirurgo Maggiore del Real Presidio di Torino
All' Illustriss. e Celebratiss. Sig. Co. Don ALESSANDRO DE BRAMBILLA Cerusico della Persona di S. M. Imperiale, Proto-Cerusico delle Truppe Imperiali Austriache ecc. 102

Esposizione anatomica delle parti relative all' encefalo degli uccelli.
Del Medesimo
Al Chiarissimo Sig. MICHELE GIRARDI Medico di Camera di S. A. R. il Duca di Parma, Presidente al Gabinetto di Storia Naturale, Professore primario della medesima, e di Notomia in quella Regia Università. 126

SECONDA SEZIONE.

Teoremi sopra le serie infinite convergenti formate dai Prodotti de' Numeri dispari successivi divisi pe' Prodotti de' Numeri pari corrispondenti.
Del P. GREGORIO FONTANA delle Scuole Pie, Pubblico Professore delle Matematiche superiori nella Regia Università di Pavia 174

Sopra l' integrazione della formula $Qdx + Py^2dx \pm dy = 0$
Del Sig. CAVALIERE LORGNA 220

Della figura del Gorgo che la Natura forma in un vaso cilindrico ripieno d' acqua, nel centro del cui fondo sia aperto un foro circolare
Del Sig. Co. GIORDANO RICCATI 238

Opposizione del nuovo Pianeta osservata nel 1783.

Dal Sig. GIUSEPPE SLOP DE CADENBERG Pubblico Profeſſore d' Aſtronomia nell' Univerſità di Piſa. 258

Conſiderazioni Ottiche.

Del Sig. Ab. GIAMBATTISTA VENTURI Profeſſore di Filoſofia e Matematica nell' Univerſità di Modena. 268

Memoria I. Sulla vera denſità de' Pianeti, ſulla riduzione de' loro ſemidiametri, e ſull' ipoteſi de' loro nuclei.

Del Sig. Ab. LEONARDO XIMENES Matematico di S. A. R. il Granduca di Toſcana 278

TERZA SEZIONE.

Di varie minere di metalli, e d' altre ſpecie di foſſili delle montane provincie Venete di Feltre, di Belluno, di Cadore, e della Carnia, e Friuli; e ſpecialmente del ſale catartico amaro a baſe di magneſia ſcoperto recentemente in quelle montagne.

Del Sig. GIOVANNI ARDUINO Profeſſore di Mineralogia, e di Chimica metallurgica, e Pubblico Sopraintendente alle coſe Agrarie dello Stato Veneto 297

Saggio analitico di alcune lucide meteore.

Del P. CARLO BARLETTI delle Scuole Pie Profeſſore di Fiſica Generale nell' Univerſità di Pavia. 331

Delle ſtazioni de' Pianeti.

Del Sig. ANTONIO CAGNOLI. 369

Nuove sperienze intorno alla dolcificazione dell' acqua del mare.
Del Sig. Cavaliere Lorgna 375

Saggio sopra l' efficacia dell' olio di olivo nell' Artritide Vaga.
Del Sig. Giovanni Antonio Marino Medico Primario dell' Ospitale della SS. Annunciata di Savigliano in Piemonte.
Presentata dal Sig. Vincenzo Malacarne. 406

Sopra alcuni fenomeni de' fosfori Bolognesi ne' differenti fluidi aeriformi.
Del Sig. Conte Morozzo 420

Osservazioni Fisiche istituite nell' Isola di Citera oggidì detta Cerigo.
Dal Sig. Ab. Lazaro Spallanzani Regio Professore di Storia naturale nell' Università di Pavia, e indirizzate
Al Sig. Cavaliere Lorgna 439

Sopra il Veleno dei Funghi.
Del Sig. Dott. Giovanni Verardo Zeviani. 465

QUARTA SEZIONE.

Ricerche Analitiche sopra diversi soggetti.
Del P. Gregorio Fontana delle S. P. Pubblico Professore delle Matematiche Superiori nella Regia Imperiale Università di Pavia 498

Sopra la distribuzione delle Alluvioni.
Del Sig. Cavaliere Vittorio Fossombroni 533

Saggio di osservazioni Anatomiche intorno agli organi Elettrici della Torpedine.

Del Sig. Michele Girardi Medico di Camera di S. A. R. di Parma, Presidente al Gabinetto di Storia Naturale, e Professore della medesima, e di Anatomia

Al Sig. Gio. Gottlieb Walter celebre Professore di Notomia in Berlino 553

Delle Serie ricorrenti.

Del Sig. Gian-Francesco Malfatti Pubblico Professore di Matematica nella Pontificia Università di Ferrara 571

Tentativo per migliorare i Cannocchiali Acromatici proposti da Eulero.

Del Sig. Ab. Barnaba Oriani Astronomo nel Regio Osservatorio di Milano 664

Osservazioni su i Feldspati, ed altri Fossili singolari dell' Italia.

Del P. Ermenegildo Pini Ch. Reg. B. Professore di Storia Naturale a Milano indirizzate

Al Sig. Cavaliere Ignazio de Born Consigliere nel Dipartimento Aulico delle Miniere, e membro delle Società di Pietroburgo, Londra, Upsal ecc. 688

		ERRORI	CORREZIONI
p. 300	l. 4	Nota (*a*) Minera, a mio parere,	Miniera, a mio parere,
301	25	*fossum autem*	*fossam autem*
309	32	Avvegnachè de'	Avvegnachè da'
312	12	delle Monache, Pezzea	delle Monache, e Pezzea
	15	Eneufs	Gneufs
315	26	tre le alpi	tra le alpi

Ciascun foglio di quest' opera, e ciascuna tavola incisa, resta fissato che importi quattro soldi Veneti alla mia Stamperia inalterabilmente ora e poi. Onde il valore del presente Tomo sciolto in Verona ascende a lire Venete 21.

BRITISH
NATURAL HISTORY.